УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНО УПРУГОЙ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЫ

В. Н. Беркович[1]

A NON-STATIONARY MIXED DYNAMIC PROBLEM FOR HETEROGENEOUS WEDGE-SHAPED ELASTIC MEDIUM

Berkovich V. N.

The paper considers a dynamic mixed boundary-value problem for the heterogeneous wedge-shaped elastic medium under the antiplane random vibrations. The problem is reduced to the boundary integral equation with unknown contact stresses. Problems of the integral equation solvability are studied in the spaces of fractional smoothness and the method of its solution development is offered.

В рассматриваемой работе предлагается метод исследования процессов распространения волн, возбуждаемых источниками нестационарных колебаний в неоднородно упругой клиновидной среде. Указанные колебания обычно связаны с появлением случайных источников внутри области, либо на её границе. При математической постановке возникают начально-краевые задачи со случайными условиями, рассмотренными, например, в [1, 2] и др. В настоящей работе изучение данной проблемы рассмотрено на примере смешанной задачи динамики кусочно-однородной клиновидной среды с граничными условиями, частично носящими случайный характер. Метод исследования основан на сведении исходной задачи к граничному интегральному уравнению I рода с однородным ядром и случайной правой частью. Уравнения II рода с однородными ядрами рассматривались ранее в [3, 4]. Работы, где было бы дано исследование уравнений, аналогичных рассмотренным в настоящей статье, автору неизвестны. Изучены вопросы разрешимости полученного уравнения и предложен метод построения его решения, основанный на результатах [5–10]. Установлено, что при $t \to \infty$ полученное решение стремится к решению соответствующей стационарной задачи.

1. Рассматривается смешанная краевая задача о нестационарных колебаниях антиплоского сдвига неоднородной клиновидной среды $Q = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < \alpha\}$, возбуждаемых источниками в полосе $\Omega = (a, b) \times R^1$, расположенной параллельно ребру клина на одной из его границ $\partial Q = \partial Q_0 \bigcup \partial Q_\alpha$, причем границы $\partial Q_0, \partial Q_\alpha$ соответствуют $\varphi = 0, \alpha$. Предполагается, что неоднородная среда Q состоит из N клиновидных компонент $Q_i = \{(r, \varphi) : r > 0,\ \varphi_{i-1} < \varphi < \varphi_i\}$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ с общим ребром, различными упругими характеристиками и углами раствора. Вне полосы Ω граница клиновидной среды ∂Q_α, содержащая полосу, свободна от напряжений, а на другой части границы заданы однородные граничные условия. Описанная выше задача динамики сводится к следующей смешанной начально-краевой задаче для волнового уравнения относительно смещений пространственного сдвига $U(r, \varphi, t)$ в клиновидной области

[1]Беркович Вячеслав Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой физики и математики филиала Московского государственного университета технологий и управления в г. Ростове-на-Дону.

$Q = \bigcup\limits_{i=1}^{N} Q_i$:

$$v^2 \Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad v(\varphi) = \sum_{i=1}^{N} v_i \chi(\varphi; Q_i), \quad (1)$$

$$U\big|_{t\leqslant 0} = \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t\leqslant 0} = 0, \quad U\big|_{\partial Q_0} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}\bigg|_{\partial Q_\alpha \setminus \Omega} = 0,$$

$$[U]_{L_i} = \left[\mu \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right]_{L_i} = 0, \qquad (2)$$

$$U\big|_{\Omega \cap \partial Q_\alpha} = f(r, w_t), \quad r \in (a, b), \quad t > 0,$$

$$U \to 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty,$$

$$v_j = \sqrt{\mu_j D_j^{-1}} \quad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

В соотношениях (1) $\chi(\varphi; Q_i)$ — характеристическая функция клиновидной Q_i компоненты, μ_i, D_i — ее модуль сдвига и плотность материала соответственно, w_t — винеровский случайный процесс, стартующий в нуле с мгновенным отражением на границе (a, b) интервала, $f(r, w)$ — аналитическая функция w, моделирующая источники нестационарных смещений, распределенных в полосе Ω. Условия сопряжения (2) на границах раздела сред, L_i определяются значениями параметра μ. В дальнейшем скорость распространения волн сдвига $v_N = v(\alpha)$ обозначается символом v, а клиновидная область Q называется клиновидным композитом. При $t \to \infty$ потребуем выполнения принципа предельной амплитуды [5]. Кроме того, при $r \to 0$ выполняется условие $u_t(r, \varphi) = u_t^0(\varphi) + O(r^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, обеспечивающее ограниченность смещений и интегрируемость напряжений в окрестности ребра. Для восстановления поля смещений свободной поверхности ∂Q_α клиновидного композита Q в условиях возникновения случайных колебаний необходимо восстановить поле контактных напряжений в полосе Ω.

Для решения поставленной задачи воспользуемся техникой интегрального преобразования Лапласа по времени t. Тогда в изображениях $\overline{U} = \overline{U}(r, \varphi, p)$ по Лапласу соотношения (1) приводят в области Q к краевой задаче

$$\begin{gathered} \Delta \overline{U} - \kappa^2(\varphi) \overline{U} = 0, \\ \kappa(\varphi) = p v^{-1}(\varphi), \quad \operatorname{Re} p > 0, \end{gathered} \qquad (3)$$

$$\overline{U}\big|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{U}}{\partial \varphi}\bigg|_{\partial Q_\alpha \setminus \Omega} = 0,$$

$$[\overline{U}]_{L_i} = \left[\mu \frac{\partial \overline{U}}{\partial \varphi}\right]_{L_i} = 0,$$

$$\overline{U}\big|_{\Omega \cap \partial Q_\alpha} = \overline{f}_p(r), \quad r \in (a, b),$$

$$\overline{U} \to 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

где p — параметр преобразования Лапласа, $\overline{f}_p(r)$ — изображение по Лапласу функции $f(r, w_t)$. В окрестности ребра клина $r = 0$ сохраняются условия ограниченности перемещений и интегрируемости напряжений.

Смешанная краевая задача, аналогичная (3), рассматривалась в ряде работ, включая работы автора [6, 7], в которых на основе использования техники интегрального преобразования Конторовича-Лебедева указанная задача сведена к граничному интегральному уравнению относительно изображения по Лапласу неизвестного контактного напряжения $\overline{q}_p(\rho)$

$$\int_a^b k(r, \rho, p) \overline{q}_p(\rho)\, d\rho = \overline{f}_p(r), \quad a < r < b, \quad (4)$$

$$k(r, \rho, p) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{-iz}(\kappa \rho) K_{-iz}(\kappa r) K_N(z)\, dz,$$

$$\kappa = \kappa(\alpha) = p v^{-1}, \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0.$$

Функция $K_N(z)$ имеет достаточно громоздкий вид и определяется из рекуррентного соотношения

$$K_n(z) = \frac{K_{n-1}(z) + (\mu_n z)^{-1} \operatorname{th} \alpha_n z}{\mu_n z \operatorname{th} \varphi_n z K_{n-1}(z) + 1},$$

$$\mu_1 K_1(z) = z^{-1} \operatorname{th} \alpha_1 z, \quad \alpha_n = \Delta \varphi_n,$$

$$\kappa_= \kappa(\alpha), \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Уравнение (4) детально исследовано в работе [7], где изучены вопросы его разрешимости, указан вид общего решения и установлено соотношение корректности в пространствах $W_2^\gamma(a, b)$ Соболева-Слободецкого

$$\|\overline{q}_p\|_{W_2^{-1/2}(a,b)} < C \|\overline{f}_p\|_{W_2^{1/2}(a,b)}, \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0. \qquad (5)$$

При переходе к оригиналам это уравнение принимает вид

$$\mathbf{K}_t q = \int\limits_0^t \int\limits_a^b k(r,\rho,t-\tau) q_\tau(\rho)\, d\rho\, d\tau =$$
$$= f(r,w_t), \quad a<r<b, \quad 0<t\leqslant\zeta, \quad (6)$$

$$k(r,\rho,\vartheta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{v}{\sqrt{r\rho}}\times$$
$$\times \int\limits_\Gamma P_{-iz+\frac12}\left(\frac{r^2+\rho^2-v^2\vartheta^2}{2r\rho}\right) K_N(z)\, dz.$$

В соотношениях (4) $P_{-iz+\frac12}(u)$ — функция Лежандра, ζ — момент выхода на границу винеровского w_t случайного процесса, $q_\tau(\rho)$ — неизвестное случайное поле контактных напряжений, $f(r,w)$ — аналитическая функция w, параметр v — скорость распространения волн сдвига в N—ой клиновидной компоненте. Функция $K_N(z)$ — четная, мероморфная в комплексной плоскости z, имеет в ней однократные нули и полюса с конечной плотностью распределения. При этом $K_N(z) > 0$, $z\in R^1$ и обладает асимптотикой $K_N(z) = O(|z|^{-1})$. В окрестности действительной оси существует полоса Π регулярности функции $K_N(z)$, содержащая контур Γ ($\Pi\supset R^1$, $\Gamma\subset\Pi$).

2. Для изучения вопросов разрешимости интегрального уравнения (6) и свойств получающихся при этом решений введем следующие функциональные пространства.

1. Пространство $B\{W_2^\gamma\}$ над элементами пространства $W_2^\gamma(a,b)$, определяемое нормой

$$|||f(r,w_\tau)|||^2_{B\{W_2^\gamma\}} = E\int\limits_{R^1} \|f_\tau\|^2_{W_2^\gamma}\, d\tau,$$

где W_2^γ пространства Соболева-Слободецкого.

2. Пространство $H^p(0,\varsigma)$, $p\geqslant 1$ функций, регулярных в единичном круге, с нормой, приведенной в работе [8]

$$\|f\|_{H^p} = E\left\{\sup_{t<\zeta}|f(w_t)|^p\right\},$$

где w_t — винеровский случайный процесс, ζ — момент его остановки.

3. Пространство $H^p\{W_2^\gamma\}$, $p\geqslant 1$ над элементами пространства $W_2^\gamma(a,b)$ определяемое нормой

$$\|f\|_{H^p\{W_2^\gamma\}} = E\left\{\sup_{t<\zeta}\|f(r,w_t)\|^p_{W_2^\gamma}\right\}.$$

4. Пространство BMO функций средней ограниченной осцилляции

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\|g\|_{H^1}\leqslant 1}\left|\int\limits_{R^1} f(x)g(x)\,dx\right|.$$

5. Пространство $S_\sigma(\Gamma)$, $\sigma>0$ функций, регулярных на контуре Γ в полосе $\Pi\supset R^1$, сходящихся в ней к нулю с весом z^σ

$$\|f(z)\|_{S_\sigma(\Gamma)} = \sup_{z\in\Gamma\subset\Pi}|f(z)z^\sigma|,$$
$$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)z^\sigma| = 0.$$

6. Пространство $B\{S_\sigma\}$, $\sigma>0$ над элементами пространства $S_\sigma(\Gamma)$, определяемое нормой

$$|||\xi_\tau(z)|||^2_{B\{S_\sigma\}} = E\left\{\int\limits_{R^1}\|\xi_\tau(z)\|^2_{S_\sigma}\,d\tau\right\}.$$

7. Пространство $c_\gamma(a,b)$, $0<\gamma<1$ функций, ограниченных с весом

$$\|f\|_{c_\gamma(a,b)} = \sup_{a<r<b}|f(r)(r-a)^\gamma(b-r)^\gamma|.$$

8. Пространство $BMO\{c_\gamma\}$ над элементами пространства $c_\gamma(a,b)$, $0<\gamma<1$ определяемое нормой

$$|||q_\tau(r)|||_{BMO\{c_\gamma\}} =$$
$$= E\left\{\sup_{\|g\|_{H^1}\leqslant 1}\left|\int\limits_{R^1} g(r)\,\|q_\tau(r)\|_{c_\gamma}\,dr\right|\right\}.$$

В пространствах Соболева-Слободецкого W_2^γ норма вводится традиционным образом, E — операция математического ожидания.

Замечание 1. Так как при рассмотрении аналитических функций со значениями в банаховом пространстве из слабой аналитичности следует сильная [9], то это обстоятельство позволяет получать необходимые свойства из свойств скалярных аналитических функций, что, в частности, использовано ниже при доказательстве теоремы 1.

Для доказательства существования случайного поля контактных напряжений и описания свойств пространств $B\left\{W_2^{\pm\gamma}\right\}$ устанавливается

Теорема 1. Линейный оператор $\mathbf{K}_t$ однозначно обратим как оператор, действующий в пространствах $BMO\left\{W_2^{\pm\gamma}(a,b)\right\}$, $\gamma = 1/2$

$$\mathbf{K}_t : BMO\left\{W_2^{-\gamma}(a,b)\right\} \to \to BMO\left\{W_2^{\gamma}(a,b)\right\}. \quad (7)$$

Доказательство. Введем множество Φ бесконечно дифференцируемых и финитных $\psi_t(r)$ случайных функций $\Phi = \{\psi_t(r) : \psi_t(r) \in C^\infty(a,b); \psi_t(r) = 0, r \notin (a,b) \vee (t<0)\}$.

Назовем обобщенным решением интегрального уравнения (6) случайный процесс $q_\tau(r)$, удовлетворяющий соотношению

$$(\mathbf{K}_t q_t, \psi_t) = (f_t, \psi_t), \quad \forall \psi_t \in \Phi, \quad (8)$$

$$(f_t, \psi_t) = E\int\limits_{R^1}\int\limits_a^b f(r,w_t)\psi_t(r)\,dr\,dt.$$

Введем пространство H обобщенных решений (8) с нормой, порождаемой положительно определенным оператором его левой части

$$|||q_t|||_H^2 = E\left\{\iint\limits_{R^2}\left|\overline{Q}(z,p)\right|^2 K_N(z)\,dz\,dp\right\}, \quad (9)$$

$$\overline{Q}(z,p) = \sqrt{z\operatorname{sh}\pi z}\int\limits_a^b \overline{q}_p(r)K_{-iz}(pr)\,dr.$$

Пространство H становится гильбертовым при введении скалярного произведения

$$[q_t,\psi_t]_H = (\mathbf{K}_t q_t, \psi_t) = = E\left\{\iint\limits_{R^2}\overline{Q}(z,p)\overline{\Psi}^*(z,p)K_N(z)\,dz\,dp\right\}.$$

где $\overline{Q}(z,p)$, $\overline{\Psi}(z,p)$ — преобразования Конторовича-Лебедева от изображений Лапласа соответствующих функций, «*» означает комплексное сопряжение. Применяя классическую теорему Рисса о единственности представления линейного ограниченного функционала [9] в гильбертовом пространстве H и результаты работы [7], приходим к следующему достаточному условию разрешимости

$$|||f(r,w_t)|||_{B\{W_2^\gamma\}} < \infty \quad \gamma = 1/2$$

и соотношению корректности, получаемого из (5)

$$|||q_t|||_{B\{W_2^{-\gamma}\}} < C\,|||f(r,w_t)|||_{B\{W_2^\gamma\}}.$$

Для доказательства эквивалентности пространств $B\left\{W_2^{\pm\gamma}\right\}$ и $BMO\left\{W_2^{\pm\gamma}\right\}$ используются свойства пространств $H^p, p \geqslant 1$ [10], аналог теоремы Феффермана о сопряженности пространств BMO, H^1 для конформных мартингалов [11], и доказываются вложения:

$$B\{W_2^{\pm\gamma}\} \subseteq BMO\{W_2^{\pm\gamma}\} \subseteq B\{W_2^{\pm\gamma}\},$$

$$\mathbf{K}_t\{W_2^{-\gamma}(a,b)\} \subseteq W_2^\gamma(a,b),$$

$$\mathbf{K}_t^{-1}\{W_2^{\gamma}(a,b)\} \subseteq W_2^{-\gamma}(a,b),$$

$$\gamma = 1/2.$$

Ограниченность оператора $\mathbf{K}_t$ устанавливается непосредственно с использованием результатов [7]. Результат (7) вытекает из приведенных выше рассуждений.

Из доказанной теоремы следует, что обратный оператор $\mathbf{K}_t^{-1}$ ограничен, уравнение (6) корректно разрешимо в вышеупомянутых пространствах, а его решение $q_t(r) \in BMO\{W_2^{-1/2}(a,b)\}$ как случайная функция t является непрерывным мартингалом, что позволяет использовать все результаты этой теории [12].

3. Структуру общего решения интегрального уравнения (6) устанавливает теорема 2.

Теорема 2. Случайное поле контактных напряжений, удовлетворяющее интегральному уравнению (6) имеет вид

$$q_t(\rho) = \frac{1}{4\pi\rho\sqrt{\rho}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Gamma_1} \frac{F(z,\rho;t-\tau)}{K_N(z)} z\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\rho\sqrt{\rho}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Gamma_2} \xi_\tau^{(1)}(z) \times$$

$$\times Q_{-1/2-iz}\left[\frac{\rho^2+a^2-v^2(t-\tau)^2}{2a\rho}\right] \frac{z^2dz}{K_-(z)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\rho\sqrt{\rho}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Gamma_2} \xi_\tau^{(1)}(z) \times$$

$$\times Q_{-1/2-iz}\left[\frac{\rho^2+b^2-v^2(t-\tau)^2}{2b\rho}\right] \frac{z^2dz}{K_-(z)}, \tag{10}$$

$$0 \leqslant t \leqslant \varsigma,$$

$$F(z,\rho;\theta) = \int\limits_a^b f(r,w_\theta) \times$$

$$\times Q_{1/2-iz}\left[\frac{r^2+\rho^2-v^2\theta^2}{2r\rho}\right] \frac{dr}{r\sqrt{r}}, \tag{11}$$

$$K_N(z) = K_+(z)K_-(z),$$

$$\xi_\tau^{(i)}(z) \in B\left\{S_\sigma(\Gamma_2)\right\}, \quad \sigma > 3/2,$$

$$\Gamma_{1,2} \subset \Pi(\Gamma_2 \succ \Gamma \succ \Gamma_1),$$

$$\kappa = pv^{-1} \quad (i=1,2),$$

$$\xi_\tau^{(i)}(z) \text{ — случайные функции } \tau.$$

Данное представление единственно с точностью до функций, стохастически эквивалентных $\xi_\tau^{(i)}(z)$, в рассматриваемых пространствах.

В соотношениях (10) функции $K_\pm(z)$ — результат факторизации $K_N(z)$ относительно действительной оси, $Q_{-1/2-iz}(u)$ — функция Лежандра, пространства $B\{S_\sigma\}$ описаны в п. 2, контур Γ лежит выше Γ_1 в комплексной плоскости z.

Для доказательства представления (10) используются результаты исследования уравнения (5), общее решение которого, согласно [8], может быть записано в виде

$$\rho\overline{q}_p(\rho) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} F_p(z)K_N^{-1}(z)I_{-iz}(\kappa\rho)z\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \left\{\overline{\xi}_p^{(1)}(z)I_{-iz}(\kappa\rho)K_{-iz}(\kappa b)\right\} \frac{z^2dz}{K_-(z)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \left\{\overline{\xi}_p^{(1)}(z)K_{-iz}(\kappa\rho)I_{-iz}(\kappa a)\right\} \frac{z^2dz}{K_-(z)}, \tag{12}$$

$$F_p(z) = \int\limits_a^b \overline{f}_p(\rho)K_{-iz}(\kappa\rho)\frac{d\rho}{\rho},$$

$$K_N(z) = K_+(z)K_-(z),$$

$$\overline{\xi}_p^{(i)}(z) \in S_\sigma(\Gamma_2), \quad \sigma > 3/2,$$

$$\|X\|_{S_\sigma(\Gamma)} = \sup_{z\in\Gamma}|X(z)z^\sigma| < \infty,$$

$$\lim_{|z|\to\infty}|X(z)z^\sigma| = 0, \quad \Gamma_{1,2} \subset \Pi(\Gamma_2 \succ \Gamma \succ \Gamma_1),$$

$$\kappa = pv^{-1} \quad (i=1,2), \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0.$$

Применение к (12) техники интегрального преобразования Лапласа и последующее исследование получающихся при этом интегралов приводит к представлению (10). При этом изображения Лапласа $\overline{\xi}_p^{(i)}(z)$, как и оригиналы $\xi_\tau^{(i)}(z)$, могут быть найдены из некоторой системы интегральных уравнений, допускающей точное решение [6].

4. Покажем, что для построенного решения выполняется принцип предельной амплитуды [5]. Рассмотрим уравнение (6) на множестве моментов остановки $\{\varsigma\}$

$$\mathbf{K}_\varsigma q = \int\limits_0^\varsigma \int\limits_a^b k(r,\rho,\varsigma-\tau)q_\tau(\rho)\,d\rho\,d\tau =$$

$$= f(r,w_\varsigma), \tag{13}$$

$$a < r < b.$$

Из результатов п. 2 вытекает, что, если правая часть (13) является конформным мартингалом в $BMO\{W_2^{1/2}\}$, то по свойствам мартингалов [12] в указанных пространствах существуют конечные пределы

$$\lim_{\varsigma\to\infty} f(r,w_\varsigma)e^{i\omega_0\varsigma} = f_\infty(r),$$

$$\lim_{\varsigma\to\infty} q_\varsigma(\rho)e^{i\omega_0\varsigma} = q_\infty(r)$$

для любой фиксированной частоты ω_0. Покажем, что если предел правой части (6) равен $f_t^\infty(r) = f_\infty(r)e^{-i\omega_0 t}$, то предельные функции $f_\infty(r)$, $q_\infty(r)$ будут удовлетворять интегральному уравнению задачи об установившихся колебаниях с частотой ω_0 [7]. Подставим функцию $q_t^\infty = q_\infty(\rho)e^{-i\omega_0\tau}$ в левую часть уравнения (6), преобразуем её, используя теорему со свертке для преобразования Лапласа, полагая $p = -i\omega$. В результате появления δ-функции под знаком интеграла придем к выражению

$$\mathbf{K}_\varsigma q_t^\infty = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^1} d\omega \int\limits_{R^1} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau - i\omega\varsigma}\, d\tau \times$$
$$\times \frac{1}{i\pi}\int\limits_a^b q_\infty(\rho)\, d\rho \int\limits_{R^1} K_{-iz}(\kappa r)\times$$
$$\times I_{-iz}(\kappa\rho)K_N(z)\, dz = e^{-i\omega_0\varsigma}\mathbf{K}q_\infty. \quad (14)$$

В выражении (14) правый множитель в точности совпадает с левой частью интегрального уравнения (5), которое при $p = -i\omega$ и $\overline{f}_p(r) = f_\infty(r)$ является уравнением соответствующей смешанной задачи об установившихся колебаний клиновидного композита Q. Обозначим $f_\varsigma = f(r, w_\varsigma)$, $q_\varsigma = q_\varsigma(r)$. Тогда, учитывая ограниченность оператора $\mathbf{K}_\varsigma$ в силу теоремы 2, при $\varsigma \to \infty$ из соотношения

$$\|\mathbf{K}q_\infty - f_\infty\|_{W_2^\gamma(a,b)} \leqslant$$
$$\leqslant M\left|\left|\left|q_\varsigma - q_\infty e^{-i\omega_0\varsigma}\right|\right|\right|_{BMO\{W_2^{-\gamma}\}} +$$
$$+ \left|\left|\left|f_\varsigma - f_\infty e^{-i\omega_0\varsigma}\right|\right|\right|_{BMO\{W_2^\gamma\}},$$
$$f_\varsigma = f(r, w_\varsigma), \quad \gamma = 1/2$$

вытекает равенство $\mathbf{K}q_\infty = f_\infty$, находящееся в соответствии с принципом предельной амплитуды для задачи о колебаниях клиновидного композита Q.

Замечание 2. Формулы (10) дают, в частности, решение нестационарной задачи с детерминированными граничными условиями $f(r, w_t) \equiv f(r, \phi(t))$.

5. Изучим свойства решения, построенного в теореме 2. Справедливы следующие формулы равномерного относительно β асимптотического поведения функций Лежандра [13]:

$$Q_{-1/2+iz}(\operatorname{ch}\beta) =$$
$$= \frac{e^{-i|z|\beta}}{\sqrt{2\pi|z|sh\beta}}\left[1 + O(|z|^{-1})\right], \quad (15)$$
$$|z|^{\to} \pm\infty,$$
$$\operatorname{ch}\beta_b = \frac{\rho^2 + b^2 - v^2(t-\tau)^2}{2b\rho} \quad (16)$$

Рассмотрим (15) при $t, \tau \in \{\varsigma\}$, где $\{\varsigma\}$ множество моментов остановки. Пусть τ_ρ — момент первого достижения точки $\rho \in (a, b)$, а τ_a — момент первой остановки в точке $\rho = a$. Тогда из очевидных неравенств будет вытекать $\operatorname{ch}\beta_b \geqslant 1$, $t, \tau \in \{\varsigma\}$. Из (15),(16) следуют равномерная относительно ρ оценка:

$$Q_{-1/2+iz}(\operatorname{ch}\beta_b) =$$
$$= \sqrt{\frac{b\pi\rho}{|z|}}\frac{e^{-i|z|\beta_b}}{\sqrt{b^2-\rho^2}}\left[1 + O(|z|^{-1})\right], \quad (17)$$
$$|z|^{\to} \pm\infty.$$

Аналогично получается и другая оценка

$$Q_{-1/2+iz}(\operatorname{ch}\beta_a) =$$
$$= \sqrt{\frac{b\pi\rho}{|z|}}\frac{e^{-i|z|\beta_a}}{\sqrt{\rho^2-a^2}}\left[1 + O(|z|^{-1})\right], \quad (18)$$
$$|z|^{\to} \pm\infty.$$

Теорема 3. Построенное в теореме 2 решение q_τ принадлежит пространству $BMO\{c_\gamma\}$, $\gamma = 1/2$.

Пространство $BMO\{c_\gamma\}$, $\gamma = 1/2$ описано в п. 2. Доказательство теоремы основано на исследовании характера особенности напряжений q_τ, описываемых формулой (10), в окрестности границ области контакта $a < \rho < b$. Детальное изучение асимптотического поведения $q_\tau(\rho)$ при $\rho \to a$, $\rho \to b$ с использованием представления (12), оценок (17), (18), а также вложения $c_\gamma(a, b) \subset W_2^\gamma(a, b)$, $\gamma = 1/2$ приводит к результату теоремы 3.

Таким образом, случайный характер граничных условий сохраняет известные свойства решений интегральных уравнений смешанных задач динамической теории упругости [5]. Использование полученного решения для постановки основных задач теории упругости и последующее их решение позволяет восстановить искомое поле смещений свободной поверхности.

Автор выражает признательность академику РАН Бабешко В. А. и Климентову С. Б. за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Болотин В. В., Волоховский Ю. В., Чирков В. П.* Колебания упругого полупространства под действием случайных динамических нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 72–77.
2. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 308 с.
3. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами // ДАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 727–729.
4. *Авсянкин О. Г.* О применении проекционного метода к парным интегральным операторам с однородными ядрами // Изв. вузов. Матем. 2002. Т. 483. № 8. С. 3–7.
5. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
6. *Беркович В. Н.* К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов // ДАН СССР. 1990. Т. 314. С. 172–175.
7. *Беркович В. Н.* Об одном эффективном методе в смешанных задачах динамики градиентных сред // Ряды Фурье и их приложения: Тр. Междунар. симп. Изд. ВГУ. Воронеж. 2002. Т. 10. № 2. С. 94–98.
8. *Беркович В. Н.* О точном решении одного класса интегральных уравнений смешанных задач упругости и математической физики // ДАН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 327–330.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 475 с.
10. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984. 364 с.
11. *Getoore R. K., Sharpe M. J.* Conformal martingales // Inventions math. 1972. V. 16. P. 271–308.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 564 с.
13. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции их приложения. М.-Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.

Статья поступила 2 сентября 2005 г.
Московский государственный университет технологий и управления, филиал в г. Ростове-на-Дону