УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНОЙ[1]

А. В. Павлова[2], ***С. В. Ратнер***[3], ***С. Е. Рубцов***[4]

TO THE SOLUTION OF A DYNAMIC PROBLEM FOR ELASTIC HALF-SPACE WITH A CRACK

Pavlova A. V., Ratner S. V., Rubtsov S. E.

The problem of a half-space vibration containing semi-infinite crack parallel the surface is considered. Asymptotic properties of the Green matrix elements and the scheme of solving integral equations system are presented.

Анализу напряженного состояния слоистых анизотропных структур, ослабленных трещинами, параллельными границам раздела слоев, посвящены многочисленные публикации [1–12] и др. Широкий обзор методов решений задач для материалов, сжимаемых вдоль трещин, приведен в [13]. Однако точные аналитические решения трехмерных задач динамики трещин в настоящее время построены лишь для частных случаев областей, занимаемых полостями. Одна из таких областей — полуплоскость. В работе [6] рассмотрена трехмерная задача о полубесконечной трещине нормального отрыва, содержащейся в трансверсально-изотропной среде, в [7] приведено замкнутое решение задачи о полубесконечной трещине, расположенной параллельно границе упругого полупространства при двух типах граничных условий на поверхности. В [8] приведен эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред, содержащих полости-трещины и включения.

Устойчивый интерес к задачам для сред с дефектами определяет многообразие подходов к их решению. В настоящей работе рассматривается задача об установившихся (с частотой ω) колебаниях однородного упругого полупространства ($-\infty \leqslant x_1, x_2 \leqslant +\infty$, $x_3 \leqslant h_2$), содержащего полубесконечную трещину, расположенную в плоскости $x_3 = h_1$ ($-\infty \leqslant x_2 \leqslant +\infty$, $x_1 \leqslant 0$). Это одна из наиболее простых моделей, позволяющих ответить на некоторые вопросы распространения сейсмических колебаний в геофизической среде, которая может служить составной частью более сложных моделей.

Для построения решения применяется метод, развитый в рамках теории вирусов вибропрочности [9–12] и основанный на применении формулы Бетти для амплитуд напряже-

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦНТП (РИ-112/001/301), Программы ОНЗ РАН «Развитие технологий мониторинга, экосистемное моделирование и прогнозирование при изучении природных ресурсов в условиях аридного климата», Программы Президиума РАН «Физика и механика сильносжатого вещества и проблемы внутреннего строения Земли и планет», Программы ОНЗ РАН «Фундаментальные проблемы геологии и геохимии нефти и газа и развитие нефтегазового комплекса России», РФФИ (05-01-00902), программы «Университеты России» (УР.04.01.102).

[2]Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[3]Ратнер Светлана Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Южного научного центра РАН.

[4]Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

ний и перемещений на границе полупространства $(\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{v}_2)$ и в плоскости трещины $(\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{v}_1^{\pm})$.

Система функционально-матричных уравнений, связывающих в трансформантах Фурье перемещения точек поверхности $\mathbf{U}_2$, скачок перемещений на берегах трещины $\mathbf{U}_1$ и напряжения на поверхности $\mathbf{T}_2$ и в плоскости трещины $\mathbf{T}_1$, может быть представлена следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{T}(\alpha_1,\alpha_2), \\ \mathbf{T} = (\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2)^T,\ \mathbf{U} = (\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2)^T. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2)$ — блочная матрица-функция $\mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2) = \|\mathbf{G}_{km}\|$, $k,m = 1,2$, элементами которой также являются матрицы-функции $\mathbf{G}_{km} = \left\|g_{ij}^{km}\right\|$, $i,j = \overline{1,3}$. В свою очередь g_{ij}^{km} зависят от параметров преобразования Фурье α_1, α_2, частоты колебаний ω, плотности ρ и упругих характеристик среды λ, μ. Система (1) описывает вирус вибропрочности $V\left(2/h_1; x_1 = 0/h_2; \infty\right)$ [9].

При исследовании асимптотических свойств матриц-функций $\mathbf{G}_{ij}$ установлено экспоненциальное убывание элементов $\mathbf{G}_{ij}$ $(i \neq j)$ при $\alpha \to \infty$. Матрицы, стоящие на главной диагонали содержат элементы, имеющие степенной рост. Главные члены асимптотических разложений $\mathbf{G}_{ii}$ можно представить в виде

$$g_{km}^{ii} = r_{km}^{ii}\left(1 + O(\alpha^{-2})\right),$$

где

$$r_{11}^{11} = \alpha\left(\left(1 - \gamma_1^2/\gamma_2^2\right)\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right),$$

$$r_{12}^{11} = r_{21}^{11} = \left(\frac{1}{2} - \gamma_1^2/\gamma_2^2\right)\alpha\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$r_{22}^{11} = \alpha\left(\left(1 - \gamma_1^2/\gamma_2^2\right)\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right),$$

$$r_{33}^{11} = \alpha\left(1 - \gamma_1^2/\gamma_2^2\right),$$

$$r_{11}^{22} = -\alpha\left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right),$$

$$r_{12}^{22} = r_{21}^{22} = \alpha\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$r_{13}^{22} = -r_{31}^{22} = i\frac{2\gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\alpha\cos\varphi,$$

$$r_{22}^{22} = -\alpha\left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right),$$

$$r_{23}^{22} = -r_{32}^{22} = i\frac{2\gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\alpha\sin\varphi, \quad r_{33}^{22} = \frac{-2\gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\alpha,$$

что согласуется с результатами, приведенными в [5]. Здесь использованы обозначения $\gamma_1 = {}^{\omega}\!/_{v_1}$, $\gamma_2 = {}^{\omega}\!/_{v_2}$, $v_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ и представления $\alpha_1 = \alpha\cos\varphi$, $\alpha_2 = \alpha\sin\varphi$.

Относительно трансформанты Фурье неизвестного скачка перемещений на берегах трещины система матрично-функциональных уравнений (1) может быть записана в виде

$$\left(\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{21}\right)\mathbf{U}_1 = \mathbf{T}_1 - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{T}_2.$$

Метод решения этой системы проиллюстрируем на примере задачи о колебаниях для полупространства с трещиной со свободной поверхностью. В этом случае

$$\begin{gathered} \mathbf{K}\mathbf{U}_1 = \mathbf{T}_1, \\ \mathbf{K} = \mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{21}. \end{gathered} \tag{2}$$

Применив к соотношениям (2) обратное преобразование Фурье по α_1, нетрудно получить систему интегральных уравнений относительно характеристики скачка перемещений на берегах трещины

$$\int_0^\infty \mathbf{k}\left(x_1 - \xi_1, \alpha_2\right)\mathbf{u}_1\left(\xi_1, \alpha_2\right)d\xi_1 = \mathbf{t}_1\left(x_1, \alpha_2\right). \tag{3}$$

Здесь

$$\mathbf{k}\left(x_1, \alpha_2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathbf{K}\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\exp\left(-i\alpha_1 x_1\right)d\alpha_1,$$

$$\mathbf{u}_1\left(x_1, \alpha_2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}_1\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\exp\left(-ix_1\alpha_1\right)d\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}_1\left(x_1, x_2\right)\exp\left(ix_2\alpha_2\right)dx_2,$$

$$\mathbf{t}_1(x_1,\alpha_2) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{T}_1(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1 = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_1(x_1,x_2)\exp(i\alpha_2 x_2)\,dx_2.$$

Контур Г проходит в области регулярности подынтегральных функций, обходя положительные и отрицательные особенности элементов матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)$ в соответствии с принципом предельного поглощения [14].

При этом элементы k_{ij} $(i,j=1,2)$ и k_{33} матрицы $\mathbf{K}$ имеют асимптотическое поведение $k_{ij} = r_{ij}^{11}\left(1+O\left(\alpha^{-2}\right)\right)$ при $\alpha\to\infty$.

Применение развитых методов решения полученной системы интегральных уравнений (3), основанных на факторизации матриц-функций, требует убывания элементов k_{ij}. Вынося в области из обеих частей системы дифференциальный оператор $-\dfrac{d^2}{dx_1^2}+l^2$, где l — некоторое число ($l>0$), систему (2) можно привести к виду

$$\int\limits_0^{\infty}\mathbf{k}_0(x_1-\xi_1,\alpha_2)\mathbf{u}_1(\xi_1,\alpha_2)\,d\xi_1 = \\ \mathbf{t}_*(x_1,\alpha_2)+\mathbf{c}(x_1,\alpha_2), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{k}_0(x_1,\alpha_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1,$$

$$\mathbf{K}_0 = \left\|k_{ij}^0\right\|_{i,j=1}^3, \quad k_{ij}^0 = k_{ij}\left(\alpha_1^2+l^2\right)^{-1},$$

$$\mathbf{t}_*(x_1,\alpha_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\alpha_1^2+l^2\right)^{-1}\mathbf{T}_1(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1,$$

$\mathbf{c}(x_1,\alpha_2)$ — частное решение системы дифференциальных уравнений $l^2\mathbf{f}-\dfrac{d^2\mathbf{f}}{dx_1^2}=0$. В данном случае $\mathbf{c}(x_1,\alpha_2)=\mathbf{C}(\alpha_2)e^{-lx_1}$, где неизвестный вектор $\mathbf{C}(\alpha_2)$ находится из условия смыкания берегов на краю трещины

$$\mathbf{u}_1(0,\alpha_2)=0. \quad (5)$$

Для решения (4) можно воспользоваться методом Винера-Хопфа [14], следуя которому, приходим к системе функциональных уравнений

$$\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{U}^+(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \mathbf{T}_*^+(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{\mathbf{C}(\alpha_2)}{z-i\alpha_1}+\mathbf{P}^-(\alpha_1,\alpha_2), \quad (6)$$

$$\mathbf{U}^+(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_0^{\infty}\mathbf{u}_1(x_1,\alpha_2)\exp(i\alpha_1 x_1)\,dx_1,$$

$$\mathbf{T}_*^+(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_0^{\infty}\mathbf{t}_*(x_1,\alpha_2)\exp(i\alpha_1 x_1)\,dx_1,$$

$$\mathbf{P}^-(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{-\infty}^{0}\mathbf{p}(x_1,\alpha_2)\exp(i\alpha_1 x_1)\,dx_1,$$

$\mathbf{p}$ — неизвестная функция продолжения правой части (4) в область $x_1<0$.

В результате использования методов факторизации матриц по параметру α_1 в виде произведения и суммы [14,15] система (6) преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{K}_0^+\mathbf{U}^+ - \left\{\left(\mathbf{K}_0^-\right)^{-1}\mathbf{T}_*^+\right\}^+ - \\ - \mathbf{C}\left\{\frac{1}{l-i\alpha_1}\left(\mathbf{K}_0^-\right)^{-1}\right\}^+ = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_0^-\mathbf{P}^- + \left\{\left(\mathbf{K}_0^-\right)^{-1}\mathbf{T}_*^+\right\}^- + \\ + \mathbf{C}\left\{\frac{1}{l-i\alpha_1}\left(\mathbf{K}_0^-\right)^{-1}\right\}^- = 0. \quad (8)$$

Из первой системы уравнений (7) определяется вектор $\mathbf{U}^+(\alpha_1,\alpha_2)$

$$\mathbf{U}^+ = \left(\mathbf{K}_0^+\right)^{-1}\left\{\left(\mathbf{K}_0^-\right)^{-1}\mathbf{T}_*^+\right\}^+ + \\ + \mathbf{C}\left(\mathbf{K}_0^+\right)^{-1}\left\{\frac{1}{z-i\alpha_1}\left(\mathbf{K}_0^-\right)^{-1}\right\}^+.$$

Тогда

$$\mathbf{u}_1(x_1,\alpha_2) = \\ = \mathbf{f}_1(x_1,\alpha_2)+\mathbf{C}(\alpha_2)\mathbf{f}_2(x_1,\alpha_2), \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_1(x_1,\alpha_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{K}_0^{+}\right)^{-1}\left\{\left(\mathbf{K}_0^{-}\right)^{-1}\mathbf{T}_*^{+}\right\}^{+}\times$$
$$\times\exp(-i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1,$$

$$\mathbf{f}_2(x_1,\alpha_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{K}_0^{+}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{l-i\alpha_1}\left(\mathbf{K}_0^{-}\right)^{-1}\right\}^{+}\times$$
$$\times\exp(-i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1.$$

При этом неизвестный вектор $\mathbf{C}(\alpha_2)$ в (9) определяется из условий (5), т.е. $\mathbf{C}=-\mathbf{f}_1(0,\alpha_2)\,\mathbf{f}_2^{-1}(0,\alpha_2)$.

Таким образом

$$\mathbf{u}(x_1,\alpha_2)=\mathbf{f}_1(x_1,\alpha_2)-$$
$$-\mathbf{f}_1(0,\alpha_2)\,\mathbf{f}_2^{-1}(0,\alpha_2)\,\mathbf{f}_2(x_1,\alpha_2)\,. \quad (10)$$

Из системы уравнений (8) можно найти Фурье-образ функции напряжений, возникающих на продолжении трещины

$$\mathbf{P}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)=-\left(\mathbf{G}_0^{-}\right)^{-1}\left\{\left(\mathbf{G}_0^{-}\right)^{-1}\mathbf{T}_*^{+}\right\}^{-}-$$
$$-\mathbf{C}\left(\mathbf{G}_0^{-}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{z-i\alpha_1}\left(\mathbf{G}_0^{-}\right)^{-1}\right\}^{-}.$$

Отсюда нетрудно найти обращение Фурье $\mathbf{p}(x_1,x_2)$ данной функции.

Таким образом, определение искомой вектор-функции скачка сводится к обращению Фурье по α_2 соотношения (10). Используя (10), можно также найти перемещения на поверхности.

В строительной механике и материаловедении особый интерес вызывает изучение динамики полостей-трещин конечных размеров, в том числе — не имеющих в плане правильную форму круга. Используя представленную схему построения систем интегральных уравнений, решения такого рода задач могут быть получены с помощью метода фиктивного поглощения [15].

Литература

1. *Clements D. L.* A crack in an anisotropic layered material // Rozp. Inz. 1979. V. 27. No. 1. P. 171–180.
2. *Rogowski B.* An annular crack in layered composits with transversely isotropic constituens // ZAMM. 1984. V. 64. No. 7. P. 312–314.
3. *Ang W. T.* A crack in an anisotropic layered material under the action of impact loading // Trans. ASME. Ser E.J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 1. P. 120–125.
4. *Тихомиров В. В.* Напряженное состояние кусочно-однородного слоя с симметричной полубесконечной трещиной // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 2. С. 21–27.
5. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Кардовский И. В., Мазин В. А.* О свойствах матриц Грина динамических задач для многослойных сред с трещинами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 4. С. 13–17.
6. *Тихомиров В. В.* Трещина в трансверсально-изотропном слоистом композите // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 5. С. 163–168.
7. *Тихомиров В. В.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругого полупространства // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 108–113.
8. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
9. *Бабешко В. А.* Тела с неоднородностями // ДАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 191–193.
10. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р.* Задачи о вибрации упругого полупространства, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 386. № 1. С. 625–628.
11. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
12. *Павлова А. В., Рубцов С. Е.* Исследование многослойных материалов при наличии нарушений сплошности соединений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 3. С. 19–22.
13. *Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикладная механика. 1989. Т. 25. № 9. С. 3–32.
14. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
15. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

Статья поступила 8 ноября 2005 г.
Кубанский государственный университет