УДК 539.375:534.1

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ВОЛНОВОДНЫЕ СВОЙСТВА ПАКЕТА УПРУГИХ СЛОЕВ[1]

***Пряхина О. Д.*[2], *Смирнова А. В.*[3]**

ACTION OF RIGID INCLUSIONS ON THE WAVEGUIDE PROPERTIES OF A PACKAGE OF ELASTIC LAYERS

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

An effective method of developing matrix-symbols of the kernels of integral equations systems and their determinants has been applied to studying dynamics of layered media with inclusions.

В таких отраслях как строительство, машиностроение, сейсмология особое значение имеют задачи механики контактного взаимодействия. Условия передачи давления в зоне контакта являются определяющим фактором в расчетах на прочность, при оценке рисков разрушения конструкций и их элементов, фундаментных и коммуникационных сооружений, литосферных плит и т. д. Контактные задачи в общем случае приводят к необходимости решения систем интегральных уравнений (СИУ), ядра которых определяются краевыми задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных со смешанными граничными условиями [1–3]. Большой вклад в развитие методов решения контактных задач теории упругости внесли замечательные ученые, лауреаты Государственной премии в области науки и техники доктор физ.-мат. наук В. М. Александров и академик РАН В. А. Бабешко, работавшие в период с 1964 г. по 1978 г. на одной кафедре — кафедре теории упругости Ростовского госуниверситета под руководством академика РАН И. И. Воровича. Проблемы контактного взаимодействия и сегодня не теряют своей актуальности.

Настоящая работа посвящена исследованию динамических контактных задач для плоских жестких включений, расположенных в многослойной полуограниченной среде в плоскостях, параллельных границам раздела слоев.

1. Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях пакета N упругих слоев, занимающего объем $(-\infty < x, y < +\infty;\ -H \leqslant z \leqslant 0)$, с жестко защемленной нижней гранью, вызванных вибрацией границ жестких включений, расположенных в $\tilde{N}$ уровнях по глубине пакета.

Перемещения $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ точек среды описываются системой дифференциальных уравнений Ляме [3]

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0 \tag{1}$$

со следующими граничными условиями (общий множитель $e^{-i\omega t}$ опущен):

на верхней грани

$$\mathbf{t}(x, y, z)|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty; \tag{2}$$

на границах раздела физико-механических свойств слоев

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, \quad -\infty < x, y < +\infty, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, \quad -\infty < x, y < +\infty \end{cases} \tag{3}$$

$$z = z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1;$$

в плоскостях расположения включений

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_k = \tilde{\mathbf{w}}_k^0, \quad (x, y) \in \Omega_k, \\ \Delta \mathbf{t}_k = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_k, \end{cases}$$

$$z = \tilde{z}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{N},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-96822, 05-01-00811), РФФИ р2003юг (06-01-96600), ФЦНТП (РИ-112/001/301).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

[3]Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

на нижней грани пакета

$$\mathbf{w}\left(x,y,-H\right)=0,\quad -\infty<x,y<+\infty. \qquad (4)$$

Здесь

$$\mathbf{w}(x,y,z)|_{z=-z_k\pm 0}=\mathbf{w}_k^{\pm},$$

$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=-z_k\pm 0}=\mathbf{t}_k^{\pm}$$

соответственно векторы перемещений и напряжений на верхней $(+)$ и нижней $(-)$ границах раздела слоев; $\tilde{\mathbf{t}}_k^{\pm}$ — вектор напряжений на верхней $(+)$ и нижней $(-)$ границах включения, занимающего область Ω_k в плоскости $z=\tilde{z}_k$,

$$\Delta\mathbf{t}_k=\tilde{\mathbf{t}}_k^{+}-\tilde{\mathbf{t}}_k^{-}.$$

Краевая задача (1)–(4) сводится к решению систем интегральных уравнений (СИУ)

$$\int\limits_{\delta_1}\int\limits_{\delta_2}\mathbf{K}\left(\alpha,\beta,\omega\right)\mathbf{Q}\left(\alpha,\beta\right)e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha d\beta = \\ =\mathbf{f}(x,y),\quad (x,y)\in\mathbf{\Omega}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{f}(x,y)=\{\mathbf{w}_1^0,\mathbf{w}_2^0,\ldots,\mathbf{w}_{\tilde{N}}^0\}$ — многомерный вектор, компонентами которого являются заданные на границах включений векторы перемещений, $\mathbf{Q}=\{\boldsymbol{\eta}_1,\ldots,\boldsymbol{\eta}_{\tilde{N}}\}$ — многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье скачков векторов напряжений на границах включений $\Delta\mathbf{t}_k(x,y)$. Носителем каждой из вектор-функций $\Delta\mathbf{t}_k(x,y)$, является соответствующая область из $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}=\{\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_{\tilde{N}}\}$. Так как Ω_k расположены в разных плоскостях $z=\tilde{z}_k$, то матрица-символ ядра $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ СИУ (5) для сред, содержащих совокупность разноуровневых включений, в отличие от традиционных контактных задач, является блочной

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\left\|\mathbf{K}_{ij}\right\|_{i,j=1}^{\tilde{N}}.$$

Введем матрицы-функции $\mathbf{R}_M$ со следующей структурой элементов

$$\mathbf{R}_M(\alpha,\beta)=\left\|R_{ij}^M(\alpha,\beta)\right\|_{i,j=1}^{3},$$

$$R_{11}^M=\frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{2M}(\lambda)}r_{11}^M(\lambda)+\frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{1M}(\lambda)}\tilde{r}_{11}^M(\lambda),$$

$$R_{22}^M=\frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{2M}\left(\lambda\right)}r_{11}^M\left(\lambda\right)+\frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{1M}\left(\lambda\right)}\tilde{r}_{11}^M\left(\lambda\right),$$

$$R_{33}^M=\frac{r_{22}^M\left(\lambda\right)}{\Delta_{2M}\left(\lambda\right)}, \qquad (6)$$

$$R_{12}^M=R_{21}^M= \\ =\frac{\alpha\beta}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\Delta_{2M}\left(\lambda\right)}r_{11}^M\left(\lambda\right)-\frac{1}{\Delta_{1M}\left(\lambda\right)}\tilde{r}_{11}^M\left(\lambda\right)\right),$$

$$R_{13}^M=-R_{31}^M=i\alpha\frac{r_{12}^M\left(\lambda\right)}{\Delta_{2M}\left(\lambda\right)},$$

$$R_{23}^M=-R_{32}^M=i\beta\frac{r_{12}^M\left(\lambda\right)}{\Delta_{2M}\left(\lambda\right)},\quad \lambda^2=\alpha^2+\beta^2.$$

Известно, что матрицы-символы Грина как однородных, так и слоистых упругих полуограниченных сред типа слоя, полупространства без дефектов (трещин или включений) имеют элементы, представимые в форме (6), а вид функций r_{11}^M, $\tilde{r}_{11}^M$, r_{12}^M, r_{22}^M, Δ_{1M}, Δ_{2M} определяется конкретной моделью среды.

Для изотропных упругих сред с включениями $\mathbf{K}_{ij}$ — эрмитовы матрицы размерности 3×3, элементы которых K_{mn}^{ij} также имеют структуру (6) и зависят от параметров преобразования Фурье α, β, частоты гармонических колебаний ω, геометрических и физико-механических параметров слоев — толщины $2h_k$, плотности ρ_k, модуля сдвига μ_k, коэффициента Пуассона ν_k, $k=1,2,\ldots,N$. Параметрами задачи, кроме перечисленных, являются размеры и относительное расположение областей Ω_k.

Если в плоскостях, параллельных границам раздела слоев, расположено несколько включений, то размерность СИУ (5) будет равна $3\sum\limits_{k=1}^{\tilde{N}}P_k\times 3\sum\limits_{k=1}^{\tilde{N}}P_k$, P_k — количество включений, занимающих области Ω_{km} в плоскости $z=\tilde{z}_k$,

$$\Delta\mathbf{t}_k\left(x,y\right)=\sum_{m=1}^{P_k}\Delta\mathbf{t}_{km}\left(x,y\right),$$

$$\Delta\mathbf{t}_{km}\left(x,y\right)=\begin{cases}\mathbf{t}_{km}^{+}-\mathbf{t}_{km}^{-}, & (x,y)\in\Omega_{km},\\ 0, & (x,y)\notin\Omega_{km},\end{cases}$$

$$\Omega_k=\Omega_{k1}\cup\Omega_{k2}\cup\ldots\cup\Omega_{kP_k}.$$

Для решения рассматриваемого класса задач необходимы эффективные методы построения матриц-символов ядер СИУ, методы построения определителей этих матриц, обеспечивающие проведение всестороннего анализа их свойств, а также методы построения решения СИУ большой размерности с осциллирующими ядрами. Зависимость напряженно-деформированного состояния механических систем подобного рода от большого числа параметров на первый план выводит формирование принципиально новых методологических основ проведения исследования, направленных на выявление условий возникновения особых режимов колебаний. Новую стратегию изучения сред с дефектами дает теория «вирусов» вибропрочности, созданная академиком РАН В. А. Бабешко [9]. Она нацелена на определение такого набора параметров, при котором волновой процесс оказывается локализованным в окрестности неоднородностей и приводит к резонансным явлениям. Фундаментальные результаты по теории «вирусов» вибропрочности, выявлению условий локализации и развитию принципиально новых подходов к их изучению получены в [4–10].

Теорема [8]. Пусть для заданного «вируса» параметры задачи таковы, что имеет место равенство

$$\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)=0 \text{ при } \lambda=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\xi_k,$$
$$k=1,2,\ldots,m.$$

Тогда «вирус» локализует волновой процесс в своей окрестности. Здесь $\xi_k(\alpha,\beta)$ $(k=1,2,\ldots,m)$ — одномерное корневое множество $\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$, $\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)$ — многомерная вектор-функция, являющаяся решением СИУ, получающейся из (5) заменой матрицы-символа ядра $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ на $\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)$ на основании представления

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)\,\mathbf{K}_*(\alpha,\beta,\omega),$$

$\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)$ — матрица, сохраняющая асимптотическое поведение $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ на бесконечности и не имеющая особенностей на вещественной оси $\operatorname{Im}\lambda=0$.

В соответствии с приведенной теоремой для формулировки условий локализации важным этапом является построение определителя СИУ $\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ и поиск его нулей. Эффективный метод построения элементов и определителя блочной матрицы-символа ядра СИУ, соответствующей краевой задаче (1)–(4), описан в [10, 11]. Искомые определители выражены через произведение определителей специальным образом введенных матриц $\mathbf{G}_{Np}$, описывающих положение включений в слоистой среде. Индекс N указывает на количество слоев, а индекс p — на порядковый номер границы их раздела, содержащей включение.

$$\mathbf{G}_{Np}=\left[\mathbf{K}_p^-(h_1,h_2,\ldots,h_p)\right]^{-1}-\\-\left[\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1},h_{p+2},\ldots,h_N)\right]^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{K}_p^-$ — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании. Элементы указанных матриц зависят от параметров преобразования Фурье, частоты гармонических колебаний, а также физико-механических и геометрических параметров слоев, полутолщины которых приведены в качестве аргументов. Достоинством метода является исключение на стадии аналитического построения корневых и полярных множеств определителя, имеющих пересечения при произвольных значениях параметров механической системы, что является важным при определении спектральных характеристик волновых полей, возбуждаемых системой дефектов.

В качестве примера использования предложенного метода выпишем $\det\mathbf{K}$ СИУ (5), соответствующей нескольким случаям расположения включений в N-слойном пакете со свободной от напряжений верхней гранью и жестко защемленной нижней.

2. Предположим, что включение расположено на границе между первым и вторым слоем. Тогда в (5)

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\mathbf{K}_{11}=\mathbf{G}_{N1}^{-1}(\alpha,\beta,\omega).$$

Обозначим

$$\mathbf{G}_{N1}^{-1}=\left\|G_{ij}^{N1}\right\|_{i,j=1}^3,\quad \mathbf{K}_1^-(h_1)=\left\|K_{ij}^-\right\|_{i,j=1}^3,$$
$$\mathbf{K}_{N-1}=\left\|K_{ij}^{N-1}\right\|_{i,j=1}^3.$$

Функции, формирующие в соответствии с (6) элементы матрицы $\mathbf{K}_1^-(h_1)$, имеют вид

$$k_{11}^-(h_1)=-\sigma_{21}\kappa_{21}^2\left[\gamma_1^2\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)-\right.\\\left.-\lambda^2\sigma_{11}\sigma_{21}\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)\right],$$
$$\tilde{k}_{11}^-(h_1)=\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1),$$

$$k_{12}^-(h_1)=2\sigma_{11}\sigma_{21}\gamma_1\left(\gamma_1+\lambda^2\right)\times\\\times\left[\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)-1\right]-\\-2\left(\gamma_1^3+\lambda^2\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2\right)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1).$$

Элемент $k_{22}^-(h_1)$ получается из $k_{11}^-(h_1)$ путем циклической замены $\sigma_{11}\Leftrightarrow\sigma_{21}$.

В [12] методом, основанным на специальном представлении решения для одного слоя, построены элементы матриц-символов Грина пакета N слоев с жестко защемленной нижней гранью. При этом функции K_{ij}^N выражены через гиперболические тангенсы и котангенсы аргументов $(2\sigma_{mk}h_k)$, $m=1,2$, $k=1,2,\ldots,N$. Такая форма эффективна при вычислении значений $\mathbf{K}_N(\alpha,\beta,\omega)$, например, на контурах интегрирования δ_1, δ_2, так как не содержит растущих экспоненциальных составляющих. Однако при построении дисперсионных кривых более эффективным является представление K_{ij}^N в виде отношения целых функций, содержащих гиперболические синусы и косинусы указанных аргументов. Для произвольного количества слоев N получены рекуррентные формулы для вычисления элементов и определителя матрицы-символа Грина $\mathbf{K}_N(\alpha,\beta,\omega)$.

В случае $N=1$:

$$k_{11}^1(h_1) = -\frac{1}{4}\sigma_{21}\kappa_{21}^2\times$$
$$\times\Big[\sigma_{11}\sigma_{21}\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1) -$$
$$-\lambda^2\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)\Big],$$

$$\tilde{k}_{11}^1(h_1) = \frac{\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)}{\sigma_{21}},$$

$$k_{12}^1(h_1) = \frac{1}{2}\Big\{\sigma_{11}\sigma_{21}(\gamma_1+\lambda^2)\times$$
$$\times[\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)-1] -$$
$$-(\gamma_1\lambda^2+\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)\Big\}.$$

Аналогично предыдущему $k_{22}^1(h_1)$ получается при циклической замене $\sigma_{11}\Leftrightarrow\sigma_{21}$ в $k_{11}^1(h_1)$

$$\Delta_{21}(h_1) = \frac{1}{2}\sigma_{11}\sigma_{21}\left[\frac{1}{4}\kappa_{21}^4 - \left(\gamma_1+\lambda^2\right)^2 +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4}\kappa_{21}^4 + \left(\gamma_1+\lambda^2\right)^2\right)\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)\right] -$$
$$-\lambda^2\left(\gamma_1^2+\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2\right)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1),$$
$$\Delta_{11}(h_1) = \operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1).$$

Определитель равен

$$\det\mathbf{K}_1(h_1) = \prod_{m=1}^{2}\frac{D_{m1}(h_1)}{\Delta_{m1}(h_1)}.$$

Здесь

$$D_{21}(h_1) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\lambda^4+\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2\right)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1) -$$
$$-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_{11}\sigma_{21}\left[\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)-1\right],$$

$$D_{11}(h_1) = \tilde{k}_{11}^1(h_1),$$
$$\gamma_k = \lambda^2 - 0,5\kappa_{2k}^2, \quad \sigma_{2k}^2 = \lambda^2-\kappa_{2k}^2,$$
$$\sigma_{1k}^2 = \lambda^2 - \varepsilon_k\kappa_{2k}^2, \quad \lambda^2 = \alpha^2+\beta^2,$$
$$\kappa_{2k}^2 = \rho_k\omega^2/\mu_k, \quad \varepsilon_k = (1-2\nu_k)/(2-2\nu_k).$$

Для $N\geqslant 2$:

$$k_{1i}^N(h_1,h_2,\ldots,h_N) =$$
$$= k_{1i}^-(h_1)\,D_{2(N-1)}(h_2,h_3,\ldots,h_N) +$$
$$+ k_{1i}^1(h_1)\,\Delta_{2(N-1)}(h_2,h_3,\ldots,h_N) +$$
$$+ L_{i1}(h_1)\,k_{11}^{N-1}(h_2,h_3,\ldots,h_N) +$$
$$+ L_{i2}(h_1)\,k_{22}^{N-1}(h_2,h_3,\ldots,h_N) +$$
$$+ L_{i3}(h_1)\,k_{12}^{N-1}(h_2,h_3,\ldots,h_N), \quad (7)$$
$$i=1,2,$$

$$\tilde{k}_{11}^N = \tilde{k}_{11}^1(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2,h_3,\ldots,h_N) +$$
$$+\Delta_{11}(h_1)\,\tilde{k}_{11}^{N-1}(h_2,h_3,\ldots,h_N).$$

Элемент $k_{22}^N(h_1,h_2,\ldots,h_N)$ получается из $k_{11}^N(h_1,h_2,\ldots,h_N)$ путем циклической замены $\sigma_{1k}\Leftrightarrow\sigma_{2k}$ для всех $k=1,2,\ldots,N$.

В (7) приняты обозначения

$$L_{11}(h_1) = \frac{1}{4}\sigma_{11}\sigma_{21}\kappa_{21}^4\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1),$$

$$L_{12}(h_1) = \frac{1}{4}\sigma_{21}^2\kappa_{21}^4\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1),$$
$$L_{13}(h_1) = 2\lambda^2 L_{22}(h_1),$$

$$L_{22}(h_1) = -\frac{1}{2}\sigma_{21}\kappa_{21}^2\times$$
$$\times\Big[\sigma_{11}\sigma_{21}\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1) -$$
$$-\gamma_1\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)\Big],$$

$$L_{21}(h_1) = -\frac{1}{2}\sigma_{11}\kappa_{21}^2\times$$
$$\times\Big[\sigma_{11}\sigma_{21}\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1) -$$
$$-\gamma_1\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)\Big],$$

$$L_{23}(h_1) = \sigma_{11}\sigma_{21}\left(\gamma_1+\lambda^2\right)^2 -$$
$$-4\lambda^2\sigma_{11}\sigma_{21}\gamma_1\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1) +$$
$$+2\lambda^2\left(\gamma_1^2+\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2\right)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1).$$

Функция $L_{21}(h_1)$ при циклической замене $\sigma_{11} \Leftrightarrow \sigma_{21}$ совпадает с $L_{22}(h_1)$. Определитель матрицы-символа Грина представим в виде отношения целых функций

$$\det \mathbf{K}_N = \prod_{m=1}^{2} \frac{D_{mN}(h_1, h_2, \ldots, h_N)}{\Delta_{mN}(h_1, h_2, \ldots, h_N)},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{2N} = {} & \Delta_{20}(h_1) D_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + \Delta_{21}(h_1) \Delta_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + k_{11}^{-}(h_1) k_{22}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + k_{22}^{-}(h_1) k_{11}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + 2\lambda^2 k_{12}^{-}(h_1) k_{12}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N), \quad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1N} = {} & \Delta_{10}(h_1) D_{1(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + \Delta_{11}(h_1) \Delta_{1(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{2N} = {} & \Delta_{21}(h_1) D_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + D_{21}(h_1) \Delta_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + k_{11}^{1}(h_1) k_{22}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + k_{22}^{1}(h_1) k_{11}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + 2\lambda^2 k_{12}^{1}(h_1) k_{12}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{1N} = {} & \Delta_{11}(h_1) D_{1(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + D_{11}(h_1) \Delta_{1(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N).\end{aligned}$$

Имея соотношения (7)–(8), несложно записать элементы матрицы $\mathbf{G}_{N1}^{-1}$

$$\begin{aligned}g_{11}^{N1} = {} & k_{11}^{-}(h_1) D_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + \Delta_{21}(h_1) k_{11}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N), \quad (9)\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{11}^{N1} = \tilde{k}_{11}^{-}(h_1) D_{1(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N),$$

$$\begin{aligned}g_{12}^{N1} = {} & k_{12}^{-}(h_1) D_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + \Delta_{21}(h_1) k_{12}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{22}^{N1} = {} & k_{22}^{-}(h_1) D_{2(N-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_N) + \\ & + \Delta_{21}(h_1) k_{22}^{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N).\end{aligned}$$

Из (9) следует, что функция $g_{22}^{N1}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ так же, как и для пакета слоев без дефектов, получается из $g_{11}^{N1}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ циклической заменой $\sigma_{1k} \Leftrightarrow \sigma_{2k}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N$.

Определитель матрицы вычисляется по формуле

$$\det \mathbf{G}_{N1}^{-1}(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{m=1}^{2} \frac{\Delta_{m1}(h_1) D_{m(N-1)}(h_2, \ldots, h_N)}{\Delta_{mN}(h_1, \ldots, h_N)}. \quad (10)$$

В частности, для включения, расположенного на глубине $z = -2h_1$ в однородном слое толщины $H = 2(h_1 + h_2)$, имеем

$$\det \mathbf{G}_{21}^{-1}(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{m=1}^{2} \frac{\Delta_{m1}(h_1) D_{m1}(h_2)}{\Delta_{m1}(h_1 + h_2)}. \quad (11)$$

Форма записи соотношения (10) дает четкое представление о структуре корневого множества определителя СИУ для многослойной среды с включением. Оно является объединением корневого множества определителя матрицы-символа Грина пакета слоев толщины $2\sum_{k=2}^{N} h_k$, расположенного ниже включения, и полярного множества матрицы-символа Грина слоя толщины $2h_1$, лежащего выше включения.

3. Следующим этапом исследования является изучение свойств элементов и определителя матрицы-символа ядра $\mathbf{G}_{N1}^{-1}$, выбор на их основе метода и построение решения СИУ.

Установлено, что элементы матрицы $\mathbf{G}_{N1}^{-1} = \left\| G_{ij}^{N1} \right\|_{i,j=1}^{3}$ обладают следующими свойствами:

1) $G_{ij}^{N1}(\alpha, \beta)$ являются аналитическими функциями двух комплексных переменных, допускающими представление вида (6), причем $\Delta(\lambda) = \det \mathbf{G}_{N1}^{-1}(\alpha, \beta)$ является мероморфной функцией только параметра λ;

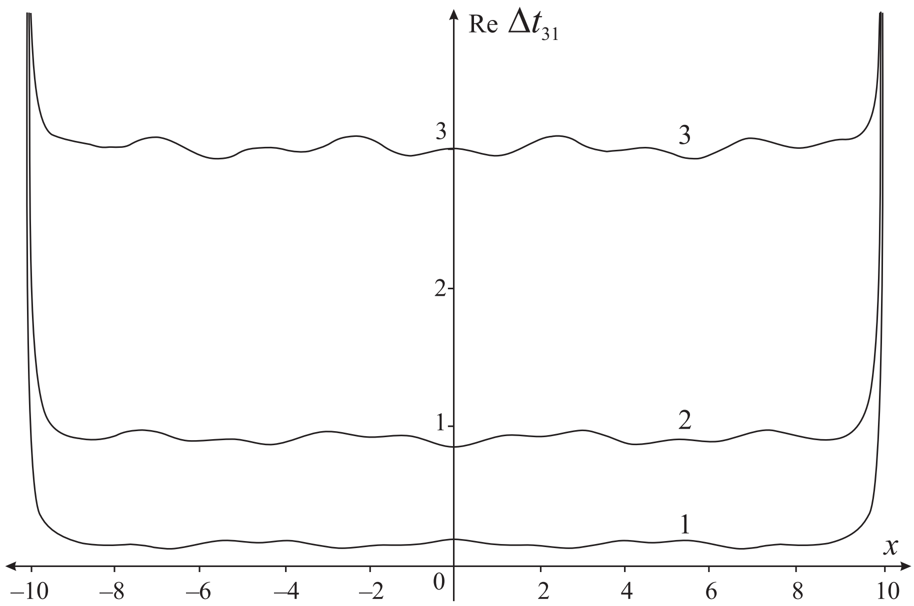
2) функции $g_{ij}^{N1}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ могут иметь конечное число вещественных нулей; остальные — комплексные с точкой сгущения на бесконечности; $\Delta(\lambda) \neq 0$ для $\alpha \in \delta_1$, $\beta \in \delta_2$;

3) функции $G_{i3}^{N1}(\alpha, \beta)$, $G_{3i}^{N1}(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2$ нечетные, остальные — четные. Элементы $G_{ij}^{N1}(\alpha, \beta)$ при $|\lambda| \to \infty$ обладают асимптотикой вида

$$G_{ij}^{N1}(\alpha, \beta) = \lambda^{-1} C_{ij}^{N1}(\varphi) \left[1 + O\left(\lambda^{-\varepsilon}\right)\right],$$

$$\varepsilon > 0,$$

$$\alpha = \lambda \cos\varphi, \quad \beta = \lambda \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$



Коэффициенты C_{ij}^{N1} асимптотического разложения зависят от физико-механических параметров только двух слоев, содержащих включение на своей границе, и совпадают с коэффициентами асимптотического разложения символа ядра СИУ для двухмодульного пространства с включением на стыке полупространств [13].

Перечисленные свойства позволяют использовать метод фиктивного поглощения [3, 12] для определения скачка вектора напряжений $\Delta\mathbf{t}_1(x, y)$ из СИУ (5).

4. По описанной в [12] схеме методом фиктивного поглощения построены скачки вектора напряжений на границах включения при различных значениях параметров задачи. На рисунке представлены реальные части вертикальной компоненты $\Delta t_{31}(x)$ скачка напряжений, соответствующие плоской постановке задачи для трехслойной среды, когда включение расположено между вторым и третьим слоями при следующих значениях параметров:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0,2, \quad \mu_3 = 1,$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_1 = 1,$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3,$$

общая толщина пакета $H = 1,5$, приведенная частота $\kappa_{21} = 5$.

Значениям $h_1 = 0,125$, $h_2 = 0,25$, $h_3 = 0,375$ соответствует кривая 1; $h_1 = h_2 = h_3 = 0,25$ — кривая 2; $h_1 = 0,375$, $h_2 = 0,25$, $h_3 = 0,125$ — кривая 3.

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №6. С. 1–4.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. №2. С. 1–5.
3. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. №4. С. 1–5.
5. *Бабешко В. А.* Динамика сред при наличии совокупности неоднородностей или дефектов и теория вирусов вибропрочности // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1998. №1. С. 24–26.
6. *Бабешко В. А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. №1. С. 55–58.
7. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. №3. С. 5–9.
8. *Бабешко В. А.* Тела с неоднородностями; случай совокупностей трещин // ДАН. 2000. Т. 373. №2. С. 191–193.
9. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупностей включений // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 21–23.
10. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.

11. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. №2. С. 3–10.
12. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
13. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Борисов Д. В., Мазин В. А.* Свойства элементов и определителей матриц-символов динамических задач для многослойных сред с включениями // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2005. №2. С. 40–43.

Статья поступила 20 декабря 2005 г.
Кубанский государственный университет