УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ФАКТОРИЗАЦИЕЙ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ[1]

Бабешко В. А.[2], Евдокимова О. В.[3] Бабешко О. М.[4], Евдокимов С. М.[5]

SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS CONNECTED WITH MATRIX-FUNCTIONS FACTORIZATION

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Evdokimov S. M.

The work resulted in the construction of factorization formulas of a rather large class of meromorphic matrix-functions frequently met in applications and mixed problems of continuum mechanics including those in the theory of integral and differential equations.

The usage of factorization formulas of meromorphic matrix-functions is demonstrated in terms of a number of examples.

В работе построены формулы факторизации достаточно широкого класса мероморфных матриц-функций, часто встречающихся в приложениях в смешанных задачах механики сплошных сред, в том числе в теории интегральных и дифференциальных уравнений.

Ряд смешанных задач механики деформируемого твердого тела, а также краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению интегральных или функциональных уравнений, требующих факторизации матриц-функций [1–6]. В то же время отсутствие точных формул факторизации произвольных матриц-функций, в отличие от функций, является значительным препятствием при решении краевых задач, поставленных для вектор-функций. Известно, что точная факторизация выполняется для достаточно ограниченного класса матриц-функций — треугольных, функционально-коммутативных, рациональных, имеющих специальное представление [7–10]. Разработан ряд методов приближенной факторизации матриц-функций, который позволяет строить приближенные решения соответствующих уравнений. Как правило, эти методы эффективны в случаях матриц-функций малого порядка — второго или третьего.

В то же время имеются обстоятельства, вызывающие необходимость построения точной факторизации матриц-функций. Например, это требуется в задачах устойчивости, когда важно детально отслеживать поведение параметров краевых задач и их влияние на поведение решения. Кроме этого, усложнение постановок задач механики сплошной среды, требующих учета одновременного воздействия физических полей различной природы на объекты сплошной среды, приводит к росту порядка систем интегральных или функциональных уравнений. В результате возникает необходимость факторизации матриц-функций большого порядка, что выполнить приближенно с высокой точностью сложно.

Потребность в получении подобных формул продиктована еще одним обстоятель-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-08-00671, 06-01-08017), РФФИ р_юг (06-01-00802, 06-01-00803, 06-01-00804, 06-01-00805, 06-01-00806, 06-01-96636, 06-01-96637, 06-01-96634, 06-01-96635), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

[4]Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

[5]Евдокимов Сергей Михайлович, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора Интернет-центра Кубанского государственного университета.

ством: развиваемые в настоящее время методы факторизации решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, исследование многомерных интегральных уравнений теории «вирусов» вибропрочности, приводят к необходимости факторизации матриц-функций, элементами которых являются аналитические функции многих комплексных переменных [4–6]. Численные методы при исследовании таких задач в неограниченных областях не являются эффективными.

Приведенные в статье результаты, относящиеся к факторизации мероморфных матриц-функций, возникающих в ряде задач механики сплошной среды, в определенной мере решают эту проблему, давая возможность исследовать новые типы задач и более глубоко изучавшиеся.

В связи с тем, что задачи, требующие факторизации матриц-функций, приведены в упомянутых выше и других многочисленных обзорах, в работе основное внимание уделено новым формулам факторизации и примерам, демонстрирующим их применение.

1. Рассматриваются матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$, элементы которых являются мероморфными функциями n комплексных переменных α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ [12]. Известно, что левосторонняя факторизация мероморфной матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ по параметру α_n относительно замкнутой кривой Γ, разграничивающей области λ_+; λ_-, сводится к факторизации отдельно некоторой целой функции (общего знаменателя всех элементов-мероморфных функций) и к факторизации матрицы-функции, элементами которой являются целые функции [7–10]. Для последней требуется построить представление в виде произведения двух матриц-функций

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n)\mathbf{K}_-(\alpha_n). \tag{1}$$

Формула (1) понимается следующим образом: матрица-функция n комплексных переменных $\mathbf{K}(\alpha)$ рассматривается как функция переменного α_n. Остальные комплексные переменные α_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ должны находиться на вещественной оси и быть фиксированными. В дальнейшем, если иное не будет оговорено, предполагается именно такой выбор этих параметров. Он продиктован необходимостью дальнейшего исследования возникающих интегральных уравнений, рассмотренных в [4]. Присутствующая в формуле (1) матрица-функция $\mathbf{K}_+(\alpha_n)$ должна иметь регулярные в односвязной области λ_+ элементы и отличный от нуля определитель [7–10]. Матрица-функция $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$ обязана обладать такими же свойствами в дополнении λ_+ до всей плоскости комплексного переменного α_n, т. е. в λ_-. В результате факторизации первоначальной матрицы-функции с элементами, являющимися мероморфными функциями, как доказано в [7], получаются матрицы-функции с элементами, являющимися мероморфными функциями, от которых требуется также, чтобы их элементы обладали бы определенным поведением на бесконечности в своих областях регулярности [7–10].

Следуя вышесказанному, будем считать, что элементы $\mathbf{K}_{mp}(\alpha)$, $(m, p = 1, 2, \ldots, N)$ матрицы-функции являются в общем случае целыми функциями переменных α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что целые функции обращаются в нуль на аналитических множествах многих комплексных переменных [12]. Представления этих аналитических множеств формально можно записать в разрешенном относительно параметра α_n виде

$$\alpha_{ns} = \alpha_{ns}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \alpha_{ns}(\alpha'),$$

$$s = 1, 2, \ldots.$$

Эти представления в дальнейшем называем нулями целых функций, которые в терминах одного комплексного переменного определяют ее порядок и тип. Считаем, ради простоты, порядок первым, а тип — не выше σ [12]. Определитель $\Delta(\alpha)$ матрицы-функции, очевидно, также целая функция того же порядка, а типа — не выше $N\sigma$.

Для применения предлагаемых в настоящей работе формул факторизации необходимо знание в нужном объеме, диктуемом целями задачи, нулей определителя, которые будем обозначать следующим образом:

$$z_{sk}^{\pm} = \alpha_{sk}^{\pm}(\alpha')\pi s + \overline{\overline{o}}(1), \tag{2}$$

$$s \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, M, \quad M \leqslant N.$$

Здесь z_{sk}^{+} — нули определителя из области λ_+, z_{sk}^{-} — из области λ_-. В частности, количество нулей может оказаться ограниченным, если матрица полиномиальная. Асимптотика нулей (2) свидетельствует о том, что принят во внимание порядок целых функций, что, в принципе, не обязательно.

$\alpha_{sk}^{\pm}(\alpha')$ — непрерывные, ограниченные на вещественной оси функции переменных $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

2. Введем в рассмотрение абсолютно сходящиеся во всей комплексной плоскости кано-

нические произведения следующего вида [12]

$$\Phi_{p\pm}(\alpha_n) = \gamma_p(\alpha_n) \prod_{s=1}^{S_p} \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_{sp}^{\mp}}\right) e^{\frac{\alpha_n}{z_{sp}^{\mp}}}, \qquad (3)$$

$$p = 1, 2, \ldots, M, \quad s_p \leqslant \infty.$$

В том случае, если матрицы-функции полиномиальные, произведения будут конечными. Будем считать, что справедливо представление

$$K(\alpha_n) = \det K(\alpha_n) = \prod_{p=1}^{N} \Phi_{p+}(\alpha_n)\Phi_{p-}(\alpha_n),$$

$$K(\alpha_n) = K_+(\alpha_n)K_-(\alpha_n),$$

$$K_+(\alpha_n) = \prod_{p=1}^{N} \Phi_{p+}(\alpha_n),$$

$$K_-(\alpha) = \prod_{p=1}^{\mathrm{N}} \Phi_{p-}(\alpha_n).$$

Здесь $\gamma_p(\alpha_n)$ — целые функции, не имеющие нулей в конечной плоскости по параметру α_n [12]. Матрицы-функции $\mathbf{K}_m(\alpha)$ порядка $N-1$, получающиеся из матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ вычеркиванием строки и столбца под номером m, имеют обратные $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$, если их определители $D_m(\alpha)$ отличны от тождественного нуля (случай обращения определителя в тождественный ноль рассматривается в приведенном примере). Обратную матрицу-функцию $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$ можно записать, используя алгебраические дополнения, в виде

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_n) = D_m^{-1}(\alpha_n)\|D_{ps}(m, \alpha_n)\|,$$

$$p \neq m, \quad s \neq m, \quad D_m(\alpha_n) = \det K_m(\alpha_n).$$

Предполагается, что

$$D_m(z_{sp}^+) \neq 0. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение набор функций вида

$$R_{p_m}(\alpha_n) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} {\sum_{s=1}^{N}}' \frac{D_{ps}(m, u_n)K_{sm}(u_n)du_n}{D_m(u_n)\Phi_{m-}(u_n)(u_n - \alpha_n)}, \qquad (5)$$

$$p = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, N, \quad \alpha_n \in \lambda_-.$$

Штрих означает, что слагаемое, отвечающее за $p = s = m$, пропускается.

Контур Γ выбирается так, что он обходит против часовой стрелки области, содержащие все нули функции $\Phi_{m-}(u_n)$, лежащие в λ_+, и исключает области, содержащие нули функции $D_m(\alpha_n)$. С учетом (4) это выполнимо. Обозначим через $P_m(\alpha_n)$ матрицу-функцию порядка N, имеющую отличными от нуля только столбец m с элементами R_{pm}, $p = 1, 2, \ldots, N$, и диагональные элементы, равные единице, все, кроме $R_{mm} = \Phi_{m-}^{-1}$.

Если интеграл расходится, то в качестве R_{mm} можно принять $\Phi_{m-}^{-1}\Phi_{m+}^{-1}$.

В этом случае приведенным произведением необходимо заменить функцию $\Phi_{m-}^{-1}(u_n)$ в формуле (5) под знаком интеграла.

Условимся в следующем обозначении:

$$[\mathbf{K}(\alpha_n)]_m \, \mathbf{P}_m(\alpha_n) = \mathbf{K}(\alpha_n)\mathbf{P}_m(\alpha_n). \qquad (6)$$

В этой формуле, используются элементы известной матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_n)$ для построения описанной выше матрицы-функции $\mathbf{P}_m(\alpha_n)$. После этого вычисляется произведение матриц, порождающее новую матрицу-функцию. Применяя эту операцию, представим матрицу-функцию $\mathbf{K}(\alpha_n)$ в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = [\ldots[\mathbf{K}]_1\mathbf{P}_1]_2\mathbf{P}_2]_3\mathbf{P}_3]_L\mathbf{P}_L]_{L+1}\ldots \\ \ldots]_N\mathbf{P}_N\mathbf{P}_N^{-1}\ldots\mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{P}_{L-1}^{-1}\mathbf{P}_{L-2}^{-1}\ldots\mathbf{P}_1^{-1}.$$

Формула понимается следующим образом: матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_n)$ индуцирует по формуле (5) матрицу-функцию $\mathbf{P}_1$, которая индуцирует $\mathbf{P}_1^{-1}$. Затем матрица-функция $\mathbf{KP}_1$ индуцирует $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2^{-1}$ и т. д.

Теорема. Матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_n)$ допускает представление

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n)\mathbf{K}_-(\alpha_n),$$

где

$$\mathbf{K}_+(\alpha_n) = [\ldots[\mathbf{K}]_1\mathbf{P}_1]_2\mathbf{P}_2]_3\mathbf{P}_3\ldots\mathbf{P}_{L-1}]_L\mathbf{P}_L \equiv \\ \equiv \mathbf{KP}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_L,$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha_n) = \mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{P}_{L-1}^{-1}\ldots\mathbf{P}_1^{-1}, \quad 1 \leqslant L.$$

Выбор параметра L диктуется требованиями задачи, приведшей к проблеме факторизации. Чем меньше L, тем в меньшем числе столбцов матрицы-функции $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$ находятся множители, содержащие нули факторизованного определителя $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$. Получающиеся в результате факторизации матрицы-функции оказываются наиболее простыми. Недостатком является разница в поведении элементов отдельных столбцов матрицы-функции на бесконечности, которую следует устранять, если строится каноническая факторизация.

Замечание. Формулы остаются в силе для матриц-функций любого порядка, в том числе для некоторых бесконечных матриц-функций, а также при наличии у определителя нулей любой конечной кратности.

Например, настоящим методом можно построить факторизацию бесконечной матрицы-функции с элементами

$$k_{mn} = [(m+0,5)P_m(\alpha) - nQ_n(\alpha)]^{-1},$$

$$m, n = 1, 2, \ldots,$$

$$P_n(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-2}), \quad Q_n(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-2}),$$

$$|\alpha| \to \infty.$$

Здесь мероморфные функции $P_n(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$ отличны от 1 только для $n \leqslant n_0 < \infty$.

2.1. В ряде случаев может возникать необходимость построения факторизации матриц-функций в другой форме, приведенной ниже.

Обозначим через λ_+ область, содержащую все нули z^v_{s+}, z^v_{s-} определителя $K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ ($\operatorname{Im} z^v_{s+} > 0$, $\operatorname{Im} z^v_{s-} < 0$, $s^\pm = 1, 2, \ldots, G_\pm$), а через λ_- — ее дополнение до всей плоскости с разделяющей области границей Г. Несколько позже положение контура будет уточнено.

Тогда, используя результаты работы [8], можем осуществить факторизацию матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)\mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu). \tag{7}$$

Здесь матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)$ регулярна в области λ_-, ее определитель не имеет в этой области нулей. Матрица-функция $\mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu)$ имеет в качестве элементов полиномы переменного α_3^ν, а ее определитель не зависит от этого параметра. Таким образом, все нули по параметру α_3^ν определителя матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ совпадают с нулями определителя матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)$, находящимися в области λ_+.

Элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ представимы в интегральной форме.

Для их получения введем обозначения для матрицы-функции $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu)$, сопряженной к матрице-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$, положив

$$\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu) = \|M_{pn}(\alpha_3^\nu)\|.$$

Выберем $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)$ порядка $P-1$, получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером m у матрицы-функции $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu)$, такую, что нули ξ_n^ν ее определителя $Q(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, m)$ не совпадают с нулями z^v_{s+}, z^v_{s-}.

Обозначим элементы обратной матрицы-функции в виде

$$[\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)]^{-1} = \left\|Q^{-1}Q_{ps}\right\|.$$

Тогда элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$, имеющей вид

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha^v_{3,} -) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \ldots & S_{mm} & \ldots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

допускают интегральное представление в форме

$$S_{mp}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\mp} {\sum_{s=1}^{N}}' \frac{Q_{ps}(u_3)M_{sm}(u_3)du_3}{Q(u_3)K(u_3)(u_3 - \alpha_3^\nu)} - \\ - (\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2})\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)},$$

$$m \neq p,$$

$$\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q(\alpha_3^\nu)K(\alpha_3^\nu)} + \\ + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q'(\xi_n^\nu)K(\xi_n^\nu)(\xi_n^\nu - \alpha_3^\nu)}, \tag{9}$$

$$S_{mm}(\alpha_3^\nu) = K^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp,$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^\nu) = {\sum_{s=1}^{N}}' Q_{ps}(\alpha_3^\nu)M_{sm}(\alpha_3^\nu).$$

Здесь замкнутый контур Γ_+ занимает положение, при котором область λ_+ содержит только нули z^v_{s+}, z^v_{s-}, а область λ_- — только нули ξ_n^ν. Замкнутый контур Γ_- охватывает область, содержащую все нули z^v_{s+}, z^v_{s-}, ξ_n^ν.

Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ являются рациональными функциями, единственными особенностями которых являются нули z^v_{s+}, z^v_{s-}, причем член $K^{-1}(\alpha_3^\nu)$, их содержащий, явно выделен.

3. Роль различных выборов параметра L демонстрируется на приводимых ниже примерах.

Пример 1. Рассмотрим матрицу-функцию следующего вида:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & -4(\alpha - i) \\ 0 & 1 & 0 \\ 4(\alpha + i) & 0 & \alpha^2 - 16 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{K}(\alpha) = \alpha^4 + 16.$$

$$z_1^+ = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2^+ = 2e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$z_1^- = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2^- = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Определим в качестве λ_+ верхнюю комплексную полуплоскость, в качестве λ_- — нижнюю. Параметр L может принимать два значения: $L = 1$ и $L = 2$.

Случай L=1.

Положим $\Phi_- = (u - z_1^+)(u - z_2^+)$. Изучим определители алгебраических дополнений к диагональным элементам. Очевидно, определители, получающиеся в результате вычеркивания первых строки и столбца и аналогично последних, не имеют нулей, совпадающих с z_k^+, $k = 1, 2$.

Определитель, получающийся в результате вычеркивания вторых строки и столбца имеет нули, совпадающие с z_k^+, и не удовлетворяет условию (4).

Остановимся на случае $m = 1$. Тогда матрица-функция $\mathbf{K}_1(\alpha)$ имеет вид

$$\mathbf{K}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 16 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_1^{-1}(\alpha) = \frac{1}{D_1(\alpha)} \begin{pmatrix} \alpha^2 - 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \alpha^2 - 16.$$

Далее получим

$$\mathbf{P}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{P}_{21} & 1 & 0 \\ \mathbf{P}_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{11} = \Phi_-^{-1}(\alpha).$$

Воспользовавшись формулой (5), имеем

$$\mathbf{P}_{21} = 0,$$

$$\mathbf{P}_{31} = \frac{16(\alpha - i)}{z_1^+ - z_2^+} \left[\frac{z_1^+ + i}{(z_1^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)} - \frac{z_2^+ + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_2^+ - \alpha)} \right].$$

Матрица-функция $\mathbf{P}_1^{-1}(\alpha)$ принимает вид

$$\mathbf{K}_-(\alpha) = \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi_-(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Phi_-(\alpha)\mathbf{P}_{31}(\alpha) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_+(\alpha) = \mathbf{K}(\alpha)\mathbf{P}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^+ & 0 & -4(\alpha - i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^+ & 0 & \alpha^2 - 16 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11}^+(\alpha) = \frac{\alpha^2}{(\alpha - z_1^+)(\alpha - z_2^+)} - \frac{16(\alpha - i)}{z_1^+ - z_2^+} \left[\frac{z_1^+ + i}{(z_1^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)} - \frac{z_2^+ + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_2^+ - \alpha)} \right],$$

$$\mathbf{K}_{31}^+(\alpha) = \frac{4(\alpha + i)}{(\alpha - z_1^+)(\alpha - z_2^+)} + \frac{4(\alpha^2 - 16)}{z_1^+ - z_2^+} \left[\frac{z_1^{+2} + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)} - \frac{z_2^{+2} + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_2^+ - \alpha)} \right].$$

Учитывая, что $z_1^{+2} = 4i$, $z_2^{+2} = -4i$, легко убедиться в ограниченности элементов матриц-функций соответственно в λ_- и λ_+, причем их определители равны $\Phi_-(\alpha)$ и $\Phi_+(\alpha)$.

В то же время анализ коэффициентов элементов матриц-функций $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_-$, $\mathbf{K}_+$ показывает, что у них элементы растут на бесконечности во второй степени. Матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha)$ подобрана таким образом, что ее частные индексы и суммарный — нули, корни определителя симметричны относительно вещественной оси. В связи с этим следует ожидать, что каноническая факторизация таких матриц-функций с диагональными элементами, имеющими одинаковые пределы на бесконечности вещественной оси, должна делить степени диагональных элементов пополам. В случае $L = 1$ этого не происходит.

Как уже указывалось, $\mathbf{K}_-$ и $\mathbf{K}_+$ имеют множителями некоторые полиномиальные взаимно обратные матрицы-функции с постоянными определителями, исключив которые, можно получить каноническую факторизацию.

Приближение к канонической факторизации достигается, когда L подбирается в соответствии с наличием столбцов, имеющих рост и отвечающих этому условию соответствующим расцеплением функции Φ_-. Это демонстрирует следующий случай.

Случай L=2.

Примем

$$\Phi_{1-}(\alpha) = \left(\alpha - z_1^+\right), \quad \Phi_{2-}(\alpha) = \left(\alpha - z_2^+\right).$$

Тогда, как и выше, имеем те же $\mathbf{K}_1(\alpha)$, $\mathbf{K}_1^{-1}$, но $\mathbf{P}_1(\alpha)$ имеет значение, вычисленное по формуле (5) для Φ_{1-} вида

$$R_{11}(1, \alpha)(\alpha - z_1^+)^{-1} = \Phi_{1-}^{-1}(\alpha), \quad R_{21} = 0,$$

$$R_{31}(1,\alpha)=\frac{4(z_1^+ + i)}{(z_1^{+2}-16)(z_1^+ - \alpha)}.$$

Матрица-функция $\mathbf{KP}_1(\alpha)$ имеет элементы

$$\mathbf{K}_{11}(1;\alpha)=\frac{1}{\alpha-z_1^+}\left[\alpha^2+\frac{16(\alpha-i)(z_1^+ + i)}{z_1^{+2}-16}\right],$$

$$\mathbf{K}_{21}=0,$$

$$\mathbf{K}_{31}(1,\alpha)= \\ =\frac{4}{\alpha-z_1^+}\left[(\alpha+i)-\frac{(\alpha^2-16)(z_1^+ + i)}{z_1^{+2}-16}\right]$$

и неизменные остальные элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$. Нетрудно видеть, что эти функции ограничены в λ_+.

Используя теперь формулу (5), функцию $\Phi_{2-}(u)$, построим матрицу-функцию $\mathbf{P}_3(\alpha)$, элементами которой являются

$$R_{13}(3,\alpha)=-\frac{4(z_2^+ - i)}{z_2^+(z_2^+ - \alpha)},$$

$$R_{23}(3,\alpha)=0,\quad R_{33}(3,\alpha)=(\alpha-z_2^+)^{-1}.$$

Элементы матриц-функций

$$\mathbf{KP}_1(\alpha)\mathbf{P}_3(\alpha)=\mathbf{K}_+(\alpha)$$

имеют вид

$$\mathbf{K}_+(\alpha)=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{11}(1,\alpha) & 0 & \mathbf{T}_{11}\\ 0 & 1 & 0\\ \mathbf{K}_{31}(1,\alpha) & 0 & \mathbf{T}_{31}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{11}=\mathbf{K}_{11}(1,\alpha)R_{13}(3,\alpha)-\frac{4(\alpha-i)}{\alpha-z_2^+},$$

$$\mathbf{T}_{31}=\mathbf{K}_{31}(1,\alpha)R_{13}(3,\alpha)+\frac{\alpha^2-16}{\alpha-z_2^+},$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha)=\mathbf{P}_3^{-1}(\alpha)\mathbf{P}_1^{-1}(\alpha)= \\ =\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{11} & 0 & -R_{13}(3,\alpha)(\alpha-z_2^+)\\ 0 & 1 & 0\\ \mathbf{G}_{31} & 0 & (\alpha-z_2^+)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{11}=(\alpha-z_1^+)+ \\ +R_{13}(3,\alpha)R_{31}(1,\alpha)(\alpha-z_2^+)(\alpha-z_1^+),$$

$$\mathbf{G}_{31}=-R_{31}(1,\alpha)(\alpha-z_1^+)(\alpha-z_2^+).$$

Из последних соотношений легко видеть, что элементы матриц-функций $\mathbf{K}_+(\alpha)$ и $\mathbf{K}_-(\alpha)$ ограничены в своих областях регулярности и их элементы растут не быстрее первых степеней. Важно заметить, что матрица-функция $\mathbf{K}_-(\alpha)$ в качестве множителей столбцов содержит полиномы, на которые разлагается ее определитель. Это создает удобство при использовании таких матриц-функций в приложениях.

Присвоив верхней полуплоскости значения λ_-, а нижней λ_+, получим правую факторизацию в терминах полуплоскостей, используя эти же формулы.

Пример 2. Рассмотрим характерную матрицу-функцию, встречающуюся в смешанных задачах механики, физики, экологии в сплошных средах.

$$\mathbf{K}(\alpha)=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{11}(\alpha) & \mathbf{K}_{12}(\alpha)\\ \mathbf{K}_{21}(\alpha) & \mathbf{K}_{22}(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11}=\mathbf{P}_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\operatorname{ch}\gamma_1,$$

$$\mathbf{K}_{12}=\gamma_2^{-1}\mathbf{P}_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\operatorname{sh}\gamma_2,$$

$$\mathbf{K}_{21}=\gamma_1^{-1}\mathbf{P}_{21}(\alpha_1,\alpha_2)\operatorname{sh}\gamma_1,$$

$$\mathbf{K}_{22}=\mathbf{P}_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\operatorname{ch}\gamma_2,$$

$$\gamma_k=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\chi_k^2)^{1/2},$$

$$\Delta(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{22}\operatorname{ch}\gamma_1\operatorname{ch}\gamma_2- \\ -\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{21}\operatorname{sh}\gamma_1\operatorname{sh}\gamma_2.$$

$\mathbf{P}_{ik}(\alpha_1,\alpha_2)$ — полиномы переменных α_1,α_2.

Оставляя α_1 вещественным, одним из способов (численным, асимптотическим) находим распределение нулей $\alpha_{2k}=\alpha_2(k,\alpha_1)$ определителя $\Delta(\alpha_1,\alpha_2)$. Асимптотическое поведение нулей вида (2) легко строится переходом в уравнении $\Delta(\alpha_1,\alpha_2)=0$ к тригонометрическим функциям.

Определитель $\Delta(\alpha_1,\alpha_2)$ как целая функция α_2 при вещественных α_1 может иметь счетное количество нулей разной мощности в зависимости от порядка и типа, а именно: их мощность может быть эквивалентна мощности нулей произведения $\operatorname{ch}\gamma_1\operatorname{ch}\gamma_2$, мощности нулей лишь функции $\operatorname{ch}\gamma_1$, количество нулей может оказаться конечным, наконец, определитель может не иметь нулей по параметру α_2.

Каждый из этих случаев обладает своей спецификой и требует отдельного исследования. Ограничимся первым случаем как наиболее типичным. Определив области λ_+,λ_-, требуемые условиями задачи, для которой осуществляется факторизация, осуществим разделение нулей в зависимости от принадлежности к областям. При счетности нулей определителя Δ может оказаться, что область λ_+

содержит лишь конечное число нулей (например, при решении пространственных контактных задач, в теории вирусов вибропрочности) или счетное (в задачах для полупространств, полуплоскостей или полуосей).

Ограничимся случаем наличия счетного множества нулей определителя. Допустим, нули областей λ_+ и λ_- имеют одинаковую мощность, совпадающую с мощностью нулей функции $\operatorname{ch}\gamma_1$.

Расположив нули z_n^+, принадлежащие λ_+, в порядке роста модулей u, считая их однократными, разделим их на два класса — первый с нечетным порядковым номером z_{2m+1}^+, второй — с четным z_{2m}^+. Для каждого из этих классов построим два канонических произведения $\Phi_{p-}(\alpha_n)$.

Следуя случаю $L = 2$ (пример 1), предполагая, что среди нулей определителя нет нулей элементов $\mathbf{K}_{11}$ и $\mathbf{K}_{22}$, после несложных преобразований будем иметь

$$\mathbf{K}_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(1,\alpha) & \mathbf{O}_{11} \\ \mathbf{K}_{21}(1,\alpha) & \mathbf{O}_{21} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}_{11} = \mathbf{K}_{11}(1,\alpha)R_{12} + \Phi_{2-}^{-1}\mathbf{K}_{12}(\alpha),$$

$$\mathbf{O}_{21} = \mathbf{K}_{21}(1,\alpha)R_{12} + \Phi_{2-}^{-1}\mathbf{K}_{22}(\alpha),$$

$$\mathbf{K}_{11}(1,\alpha) = \mathbf{K}_{12}R_{21} + \Phi_{1-}^{-1}\mathbf{K}_{11},$$

$$\mathbf{K}_{21}(1,\alpha) = \mathbf{K}_{22}R_{21} + \Phi_{1-}^{-1}\mathbf{K}_{21},$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}_{21}(u)\,du}{\mathbf{K}_{22}(u)\Phi_{1-}(u)(u-\alpha)},$$

$$R_{12}(u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}_{12}(1,u)\,du}{\mathbf{K}_{11}(1,u)\Phi_{2-}(u)(u-\alpha)},$$

$$\alpha \in \lambda_-,$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi_{1-} + R_{12}R_{21}\,\Phi_{1-}\Phi_{2-} & -R_{12}\Phi_{2-} \\ -R_{21}\Phi_{1-}\Phi_{2-} & \Phi_{2-} \end{pmatrix}.$$

В случае $L = 1$ (пример 1), получим

$$\mathbf{K}_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(1,\alpha) & \mathbf{K}_{12}(\alpha) \\ \mathbf{K}_{21}(1,\alpha) & \mathbf{K}_{22}(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi_{1-} & 0 \\ -R_{21}\Phi_{1-}\Phi_{2-} & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}_{21}(u)\,du}{\mathbf{K}_{22}(u)\Phi_{1-}(u)\Phi_{2-}(u)(u)(u-\alpha)}.$$

Замечание. Формулы остаются в силе для матриц-функций любого порядка, в том числе бесконечного, а также при наличии у определителя матрицы-функции нулей любой кратности.

Литература

1. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Евдокимов С. М.* К решению краевых задач с применением факторизации матриц-функций // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 2. С. 5–7.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. Т. 410. № 2. 2006. С. 168–172.
3. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М:. Наука, 1984. 256 с.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. Т. 393. № 4. 2003. С. 473–477.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. Т. 392. № 6. 2003. С. 767–770.
6. *Бабешко О.М.* Об одном подходе в проблеме оценки загрязнения разнородных ландшафтов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2003. № 1. С. 10–15.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой, зависящие от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. Вып. 2. С. 3–72.
8. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Факторизация матриц-функций. Деп. ВИНИТИ. № 2410-84. Ч. 1. 250 с. Ч. 2. 212 с.
11. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М:. Наука, 1985. 464 с.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1985, 336 с.

Статья поступила 7 сентября 2006 г.
Кубанский государственный университет