

УДК 539.3

**К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ФАКТОРИЗАЦИЕЙ  
МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>***Бабешко В. А.<sup>2</sup>, Евдокимова О. В.<sup>3</sup> Бабешко О. М.<sup>4</sup>, Евдокимов С. М.<sup>5</sup>***SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS CONNECTED WITH MATRIX-FUNCTIONS  
FACTORIZATION**

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Evdokimov S. M.

The work resulted in the construction of factorization formulas of a rather large class of meromorphic matrix-functions frequently met in applications and mixed problems of continuum mechanics including those in the theory of integral and differential equations.

The usage of factorization formulas of meromorphic matrix-functions is demonstrated in terms of a number of examples.

В работе построены формулы факторизации достаточно широкого класса мероморфных матриц-функций, часто встречающихся в приложениях в смешанных задачах механики сплошных сред, в том числе в теории интегральных и дифференциальных уравнений.

Ряд смешанных задач механики деформируемого твердого тела, а также краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению интегральных или функциональных уравнений, требующих факторизации матриц-функций [1–6]. В то же время отсутствие точных формул факторизации произвольных матриц-функций, в отличие от функций, является значительным препятствием при решении краевых задач, поставленных для вектор-функций. Известно, что точная факторизация выполняется для достаточно ограниченного класса матриц-функций — треугольных, функционально-коммутативных, рациональных, имеющих специальное представление [7–10]. Разработан ряд методов приближенной факторизации матриц-функций, ко-

торый позволяет строить приближенные решения соответствующих уравнений. Как правило, эти методы эффективны в случаях матриц-функций малого порядка — второго или третьего.

В то же время имеются обстоятельства, вызывающие необходимость построения точной факторизации матриц-функций. Например, это требуется в задачах устойчивости, когда важно детально отслеживать поведение параметров краевых задач и их влияние на поведение решения. Кроме этого, усложнение постановок задач механики сплошной среды, требующих учета одновременного воздействия физических полей различной природы на объекты сплошной среды, приводит к росту порядка систем интегральных или функциональных уравнений. В результате возникает необходимость факторизации матриц-функций большого порядка, что выполнить приближенно с высокой точностью сложно.

Потребность в получении подобных формул продиктована еще одним обстоятель-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-08-00671, 06-01-08017), РФФИ р\_юг (06-01-00802, 06-01-00803, 06-01-00804, 06-01-00805, 06-01-00806, 06-01-96636, 06-01-96637, 06-01-96634, 06-01-96635), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭМПИУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

<sup>2</sup>Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

<sup>3</sup>Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

<sup>4</sup>Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

<sup>5</sup>Евдокимов Сергей Михайлович, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора Интернет-центра Кубанского государственного университета.

ством: развиваемые в настоящее время методы факторизации решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, исследование многомерных интегральных уравнений теории «вирусов» вибропрочности, приводят к необходимости факторизации матриц-функций, элементами которых являются аналитические функции многих комплексных переменных [4–6]. Численные методы при исследовании таких задач в неограниченных областях не являются эффективными.

Приведенные в статье результаты, относящиеся к факторизации мероморфных матриц-функций, возникающих в ряде задач механики сплошной среды, в определенной мере решают эту проблему, давая возможность исследовать новые типы задач и более глубоко изучившиеся.

В связи с тем, что задачи, требующие факторизации матриц-функций, приведены в упомянутых выше и других многочисленных обзорах, в работе основное внимание уделено новым формулам факторизации и примерам, демонстрирующим их применение.

1. Рассматриваются матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha)$ , элементы которых являются мероморфными функциями  $n$  комплексных переменных  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  [12]. Известно, что левосторонняя факторизация мероморфной матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha)$  по параметру  $\alpha_n$  относительно замкнутой кривой  $\Gamma$ , разграничивающей области  $\lambda_+$ ;  $\lambda_-$ , сводится к факторизации отдельно некоторой целой функции (общего знаменателя всех элементов мероморфных функций) и к факторизации матрицы-функции, элементами которой являются целые функции [7–10]. Для последней требуется построить представление в виде произведения двух матриц-функций

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n)\mathbf{K}_-(\alpha_n). \quad (1)$$

Формула (1) понимается следующим образом: матрица-функция  $n$  комплексных переменных  $\mathbf{K}(\alpha)$  рассматривается как функция переменного  $\alpha_n$ . Остальные комплексные переменные  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  должны находиться на вещественной оси и быть фиксированными. В дальнейшем, если иное не будет оговорено, предполагается именно такой выбор этих параметров. Он продиктован необходимостью дальнейшего исследования возникающих интегральных уравнений, рассмотренных в [4]. Присутствующая в формуле (1) матрица-функция  $\mathbf{K}_+(\alpha_n)$  должна иметь регулярные в односвязной области  $\lambda_+$  элементы и отличный от нуля определитель [7–10]. Матрица-

функция  $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$  обязана обладать такими же свойствами в дополнении  $\lambda_+$  до всей плоскости комплексного переменного  $\alpha_n$ , т. е. в  $\lambda_-$ . В результате факторизации первоначальной матрицы-функции с элементами, являющимися мероморфными функциями, как доказано в [7], получаются матрицы-функции с элементами, являющимися мероморфными функциями, от которых требуется также, чтобы их элементы обладали бы определенным поведением на бесконечности в своих областях регулярности [7–10].

Следуя вышесказанному, будем считать, что элементы  $\mathbf{K}_{mp}(\alpha)$ , ( $m, p = 1, 2, \dots, N$ ) матрицы-функции являются в общем случае целыми функциями переменных  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Предполагается, что целые функции обращаются в нуль на аналитических множествах многих комплексных переменных [12]. Представления этих аналитических множеств формально можно записать в разрешенном относительно параметра  $\alpha_n$  виде

$$\alpha_{ns} = \alpha_{ns}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = \alpha_{ns}(\alpha'), \\ s = 1, 2, \dots$$

Эти представления в дальнейшем называем нулями целых функций, которые в терминах одного комплексного переменного определяют ее порядок и тип. Считаем, ради простоты, порядок первым, а тип — не выше  $\sigma$  [12]. Определитель  $\Delta(\alpha)$  матрицы-функции, очевидно, также целая функция того же порядка, а типа — не выше  $N\sigma$ .

Для применения предлагаемых в настоящей работе формул факторизации необходимо знание в нужном объеме, диктуемом целями задачи, нулей определителя, которые будем обозначать следующим образом:

$$z_{sk}^\pm = \alpha_{sk}^\pm(\alpha')\pi s + \bar{d}(1), \quad (2)$$

$$s \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad M \leq N.$$

Здесь  $z_{sk}^+$  — нули определителя из области  $\lambda_+$ ,  $z_{sk}^-$  — из области  $\lambda_-$ . В частности, количество нулей может оказаться ограниченным, если матрица полиномиальная. Асимптотика нулей (2) свидетельствует о том, что принят во внимание порядок целых функций, что, в принципе, не обязательно.

$\alpha_{sk}^\pm(\alpha')$  — непрерывные, ограниченные на вещественной оси функции переменных  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ .

2. Введем в рассмотрение абсолютно сходящиеся во всей комплексной плоскости кано-

нические произведения следующего вида [12]

$$\Phi_{p\pm}(\alpha_n) = \gamma_p(\alpha_n) \prod_{s=1}^{s_p} \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_{\mp}^{sp}}\right) e^{\frac{\alpha_n}{z_{\mp}^{sp}}}, \quad (3)$$

$$p = 1, 2, \dots, M, \quad s_p \leq \infty.$$

В том случае, если матрицы-функции полиномиальные, произведения будут конечными. Будем считать, что справедливо представление

$$K(\alpha_n) = \det K(\alpha_n) = \prod_{p=1}^N \Phi_{p+}(\alpha_n) \Phi_{p-}(\alpha_n),$$

$$K(\alpha_n) = K_+(\alpha_n) K_-(\alpha_n),$$

$$K_+(\alpha_n) = \prod_{p=1}^N \Phi_{p+}(\alpha_n),$$

$$K_-(\alpha) = \prod_{p=1}^N \Phi_{p-}(\alpha_n).$$

Здесь  $\gamma_p(\alpha_n)$  — целые функции, не имеющие нулей в конечной плоскости по параметру  $\alpha_n$  [12]. Матрицы-функции  $\mathbf{K}_m(\alpha)$  порядка  $N-1$ , получающиеся из матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha)$  вычеркиванием строки и столбца под номером  $m$ , имеют обратные  $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$ , если их определители  $D_m(\alpha)$  отличны от тождественного нуля (случай обращения определителя в тождественный ноль рассматривается в приведенном примере). Обратную матрицу-функцию  $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$  можно записать, используя алгебраические дополнения, в виде

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_n) = D_m^{-1}(\alpha_n) \|D_{ps}(m, \alpha_n)\|,$$

$$p \neq m, \quad s \neq m, \quad D_m(\alpha_n) = \det K_m(\alpha_n).$$

Предполагается, что

$$D_m(z_{sp}^+) \neq 0. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение набор функций вида

$$R_{pm}(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^N \frac{D_{ps}(m, u_n) K_{sm}(u_n) du_n}{D_m(u_n) \Phi_{m-}(u_n) (u_n - \alpha_n)}, \quad (5)$$

$$p = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, N, \quad \alpha_n \in \lambda_-.$$

Штрих означает, что слагаемое, отвечающее за  $p = s = m$ , пропускается.

Контур  $\Gamma$  выбирается так, что он обходит против часовой стрелки области, содержащие все нули функции  $\Phi_{m-}(u_n)$ , лежащие в  $\lambda_+$ , и исключает области, содержащие нули функции  $D_m(\alpha_n)$ . С учетом (4) это выполнимо. Обозначим через  $P_m(\alpha_n)$  матрицу-функцию порядка  $N$ , имеющую отличными от нуля только столбец  $m$  с элементами  $R_{pm}$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$ , и диагональные элементы, равные единице, все, кроме  $R_{mm} = \Phi_{m-}^{-1}$ .

Если интеграл расходится, то в качестве  $R_{mm}$  можно принять  $\Phi_{m-}^{-1} \Phi_{m+}^{-1}$ .

В этом случае приведенным произведением необходимо заменить функцию  $\Phi_{m-}^{-1}(u_n)$  в формуле (5) под знаком интеграла.

Условимся в следующем обозначении:

$$[\mathbf{K}(\alpha_n)]_m \mathbf{P}_m(\alpha_n) = \mathbf{K}(\alpha_n) \mathbf{P}_m(\alpha_n). \quad (6)$$

В этой формуле, используются элементы известной матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_n)$  для построения описанной выше матрицы-функции  $\mathbf{P}_m(\alpha_n)$ . После этого вычисляется произведение матриц, порождающее новую матрицу-функцию. Применяя эту операцию, представим матрицу-функцию  $\mathbf{K}(\alpha_n)$  в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = [\dots [\mathbf{K}]_1 \mathbf{P}_1]_2 \mathbf{P}_2]_3 \mathbf{P}_3]_L \mathbf{P}_L]_{L+1} \dots \dots]_N \mathbf{P}_N \mathbf{P}_N^{-1} \dots \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{P}_{L-1}^{-1} \mathbf{P}_{L-2}^{-1} \dots \mathbf{P}_1^{-1}.$$

Формула понимается следующим образом: матрица-функция  $\mathbf{K}(\alpha_n)$  индуцирует по формуле (5) матрицу-функцию  $\mathbf{P}_1$ , которая индуцирует  $\mathbf{P}_1^{-1}$ . Затем матрица-функция  $\mathbf{K}\mathbf{P}_1$  индуцирует  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_2^{-1}$  и т. д.

ТЕОРЕМА. Матрица-функция  $\mathbf{K}(\alpha_n)$  допускает представление

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n) \mathbf{K}_-(\alpha_n),$$

где

$$\mathbf{K}_+(\alpha_n) = [\dots [\mathbf{K}]_1 \mathbf{P}_1]_2 \mathbf{P}_2]_3 \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_{L-1}]_L \mathbf{P}_L \equiv \equiv \mathbf{K}\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_L,$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha_n) = \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{P}_{L-1}^{-1} \dots \mathbf{P}_1^{-1}, \quad 1 \leq L.$$

Выбор параметра  $L$  диктуется требованиями задачи, приведшей к проблеме факторизации. Чем меньше  $L$ , тем в меньшем числе столбцов матрицы-функции  $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$  находятся множители, содержащие нули факторизованного определителя  $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$ . Получающиеся в результате факторизации матрицы-функции оказываются наиболее простыми. Недостатком является разница в поведении элементов отдельных столбцов матрицы-функции на бесконечности, которую следует устранять, если строится каноническая факторизация.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы остаются в силе для матриц-функций любого порядка, в том числе для некоторых бесконечных матриц-функций, а также при наличии у определителя нулей любой конечной кратности.

Например, настоящим методом можно построить факторизацию бесконечной матрицы-функции с элементами

$$k_{mn} = [(m+0, 5)P_m(\alpha) - nQ_n(\alpha)]^{-1},$$

$$m, n = 1, 2, \dots,$$

$$P_n(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-2}), \quad Q_n(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-2}),$$

$$|\alpha| \rightarrow \infty.$$

Здесь мероморфные функции  $P_n(\alpha)$ ,  $Q_n(\alpha)$  отличны от 1 только для  $n \leq n_0 < \infty$ .

2.1. В ряде случаев может возникать необходимость построения факторизации матриц-функций в другой форме, приведенной ниже.

Обозначим через  $\lambda_+$  область, содержащую все нули  $z_{s+}^v$ ,  $z_{s-}^v$  определителя  $K(\alpha_3^v) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^v)$  ( $\text{Im } z_{s+}^v > 0$ ,  $\text{Im } z_{s-}^v < 0$ ,  $s^\pm = 1, 2, \dots, G_\pm$ ), а через  $\lambda_-$  — ее дополнение до всей плоскости с разделяющей области границей  $\Gamma$ . Несколько позже положение контура будет уточнено.

Тогда, используя результаты работы [8], можем осуществить факторизацию матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^v)$  в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_3^v) = \mathbf{K}(\alpha_3^v, -)\mathbf{K}_r(\alpha_3^v). \quad (7)$$

Здесь матрица-функция  $\mathbf{K}(\alpha_3^v, -)$  регулярна в области  $\lambda_-$ , ее определитель не имеет в этой области нулей. Матрица-функция  $\mathbf{K}_r(\alpha_3^v)$  имеет в качестве элементов полиномы переменного  $\alpha_3^v$ , а ее определитель не зависит от этого параметра. Таким образом, все нули по параметру  $\alpha_3^v$  определителя матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^v)$  совпадают с нулями определителя матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^v, -)$ , находящимися в области  $\lambda_+$ .

Элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, -)$  представимы в интегральной форме.

Для их получения введем обозначения для матрицы-функции  $\mathbf{K}^*(\alpha_3^v)$ , сопряженной к матрице-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^v)$ , положив

$$\mathbf{K}^*(\alpha_3^v) = \|M_{pn}(\alpha_3^v)\|.$$

Выберем  $\mathbf{K}^*(\alpha_3^v, m)$  порядка  $P-1$ , получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером  $m$  у матрицы-функции  $\mathbf{K}^*(\alpha_3^v)$ , такую, что нули  $\xi_n^v$  ее определителя  $Q(\alpha_3^v) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^v, m)$  не совпадают с нулями  $z_{s+}^v$ ,  $z_{s-}^v$ .

Обозначим элементы обратной матрицы-функции в виде

$$[\mathbf{K}^*(\alpha_3^v, m)]^{-1} = \|Q^{-1}Q_{ps}\|.$$

Тогда элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, -)$ , имеющей вид

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, -) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} & \dots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

допускают интегральное представление в форме

$$S_{mp}(\alpha_3^v) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\mp} \sum_{s=1}^N \frac{Q_{ps}(u_3)M_{sm}(u_3)du_3}{Q(u_3)K(u_3)(u_3 - \alpha_3^v)} - \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right) \frac{R_{mp}(\alpha_3^v)}{K(\alpha_3^v)},$$

$$m \neq p,$$

$$\frac{R_{mp}(\alpha_3^v)}{K(\alpha_3^v)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^v)}{Q(\alpha_3^v)K(\alpha_3^v)} + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^v)}{Q'(\xi_n^v)K(\xi_n^v)(\xi_n^v - \alpha_3^v)}, \quad (9)$$

$$S_{mm}(\alpha_3^v) = K^{-1}(\alpha_3^v), \quad \alpha_3^v \in \lambda_\mp,$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^v) = \sum_{s=1}^N Q_{ps}'(\alpha_3^v)M_{sm}(\alpha_3^v).$$

Здесь замкнутый контур  $\Gamma_+$  занимает положение, при котором область  $\lambda_+$  содержит только нули  $z_{s+}^v$ ,  $z_{s-}^v$ , а область  $\lambda_-$  — только нули  $\xi_n^v$ . Замкнутый контур  $\Gamma_-$  охватывает область, содержащую все нули  $z_{s+}^v$ ,  $z_{s-}^v$ ,  $\xi_n^v$ .

Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, -)$  являются рациональными функциями, единственными особенностями которых являются нули  $z_{s+}^v$ ,  $z_{s-}^v$ , причем член  $K^{-1}(\alpha_3^v)$ , их содержащий, явно выделен.

3. Роль различных выборов параметра  $L$  демонстрируется на приводимых ниже примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим матрицу-функцию следующего вида:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & -4(\alpha - i) \\ 0 & 1 & 0 \\ 4(\alpha + i) & 0 & \alpha^2 - 16 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\det \mathbf{K}(\alpha) &= \alpha^4 + 16. \\ z_1^+ &= 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2^+ = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \\ z_1^- &= 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2^- = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Определим в качестве  $\lambda_+$  верхнюю комплексную полуплоскость, в качестве  $\lambda_-$  — нижнюю. Параметр  $L$  может принимать два значения:  $L = 1$  и  $L = 2$ .

*Случай  $L=1$ .*

Положим  $\Phi_- = (u - z_1^+)(u - z_2^+)$ . Изучим определители алгебраических дополнений к диагональным элементам. Очевидно, определители, получающиеся в результате вычеркивания первых строки и столбца и аналогично последних, не имеют нулей, совпадающих с  $z_k^+$ ,  $k = 1, 2$ .

Определитель, получающийся в результате вычеркивания вторых строки и столбца имеет нули, совпадающие с  $z_k^+$ , и не удовлетворяет условию (4).

Остановимся на случае  $m = 1$ . Тогда матрица-функция  $\mathbf{K}_1(\alpha)$  имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 16 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_1^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{D_1(\alpha)} \begin{pmatrix} \alpha^2 - 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \alpha^2 - 16.\end{aligned}$$

Далее получим

$$\mathbf{P}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{P}_{21} & 1 & 0 \\ \mathbf{P}_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{11} = \Phi_-^{-1}(\alpha).$$

Воспользовавшись формулой (5), имеем

$$\mathbf{P}_{21} = 0,$$

$$\mathbf{P}_{31} = \frac{16(\alpha - i)}{z_1^+ - z_2^+} \left[ \frac{z_1^+ + i}{(z_1^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)} - \frac{z_2^+ + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_2^+ - \alpha)} \right].$$

Матрица-функция  $\mathbf{P}_1^{-1}(\alpha)$  принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_-(\alpha) &= \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi_-(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Phi_-(\alpha)\mathbf{P}_{31}(\alpha) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_+(\alpha) &= \mathbf{K}(\alpha)\mathbf{P}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^+ & 0 & -4(\alpha - i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^+ & 0 & \alpha^2 - 16 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11}^+(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - z_1^+)(\alpha - z_2^+)} - \\ &- \frac{16(\alpha - i)}{z_1^+ - z_2^+} \left[ \frac{z_1^+ + i}{(z_1^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_2^+ + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_2^+ - \alpha)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{31}^+(\alpha) &= \frac{4(\alpha + i)}{(\alpha - z_1^+)(\alpha - z_2^+)} + \\ &+ \frac{4(\alpha^2 - 16)}{z_1^+ - z_2^+} \left[ \frac{z_1^{+2} + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_2^{+2} + i}{(z_2^{+2} - 16)(z_2^+ - \alpha)} \right].\end{aligned}$$

Учитывая, что  $z_1^{+2} = 4i$ ,  $z_2^{+2} = -4i$ , легко убедиться в ограниченности элементов матриц-функций соответственно в  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$ , причем их определители равны  $\Phi_-(\alpha)$  и  $\Phi_+(\alpha)$ .

В то же время анализ коэффициентов элементов матриц-функций  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_-$ ,  $\mathbf{K}_+$  показывает, что у них элементы растут на бесконечности во второй степени. Матрица-функция  $\mathbf{K}(\alpha)$  подобрана таким образом, что ее частные индексы и суммарный — нули, корни определителя симметричны относительно вещественной оси. В связи с этим следует ожидать, что каноническая факторизация таких матриц-функций с диагональными элементами, имеющими одинаковые пределы на бесконечности вещественной оси, должна делить степени диагональных элементов пополам. В случае  $L = 1$  этого не происходит.

Как уже указывалось,  $\mathbf{K}_-$  и  $\mathbf{K}_+$  имеют множителями некоторые полиномиальные взаимно обратные матрицы-функции с постоянными определителями, исключив которые, можно получить каноническую факторизацию.

Приближение к канонической факторизации достигается, когда  $L$  подбирается в соответствии с наличием столбцов, имеющих рост и отвечающих этому условию соответствующим расщеплением функции  $\Phi_-$ . Это демонстрирует следующий случай.

*Случай  $L=2$ .*

Примем

$$\Phi_{1-}(\alpha) = (\alpha - z_1^+), \quad \Phi_{2-}(\alpha) = (\alpha - z_2^+).$$

Тогда, как и выше, имеем те же  $\mathbf{K}_1(\alpha)$ ,  $\mathbf{K}_1^{-1}$ , но  $\mathbf{P}_1(\alpha)$  имеет значение, вычисленное по формуле (5) для  $\Phi_{1-}$  вида

$$R_{11}(1, \alpha)(\alpha - z_1^+)^{-1} = \Phi_{1-}^{-1}(\alpha), \quad R_{21} = 0,$$

$$R_{31}(1, \alpha) = \frac{4(z_1^+ + i)}{(z_1^{+2} - 16)(z_1^+ - \alpha)}.$$

Матрица-функция  $\mathbf{KP}_1(\alpha)$  имеет элементы

$$\mathbf{K}_{11}(1; \alpha) = \frac{1}{\alpha - z_1^+} \left[ \alpha^2 + \frac{16(\alpha - i)(z_1^+ + i)}{z_1^{+2} - 16} \right],$$

$$\mathbf{K}_{21} = 0,$$

$$\mathbf{K}_{31}(1, \alpha) = \frac{4}{\alpha - z_1^+} \left[ (\alpha + i) - \frac{(\alpha^2 - 16)(z_1^+ + i)}{z_1^{+2} - 16} \right]$$

и неизменные остальные элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha)$ . Нетрудно видеть, что эти функции ограничены в  $\lambda_+$ .

Используя теперь формулу (5), функцию  $\Phi_{2-}(u)$ , построим матрицу-функцию  $\mathbf{P}_3(\alpha)$ , элементами которой являются

$$R_{13}(3, \alpha) = -\frac{4(z_2^+ - i)}{z_2^+(z_2^+ - \alpha)},$$

$$R_{23}(3, \alpha) = 0, \quad R_{33}(3, \alpha) = (\alpha - z_2^+)^{-1}.$$

Элементы матриц-функций

$$\mathbf{KP}_1(\alpha)\mathbf{P}_3(\alpha) = \mathbf{K}_+(\alpha)$$

имеют вид

$$\mathbf{K}_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(1, \alpha) & 0 & \mathbf{T}_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{K}_{31}(1, \alpha) & 0 & \mathbf{T}_{31} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{11} = \mathbf{K}_{11}(1, \alpha)R_{13}(3, \alpha) - \frac{4(\alpha - i)}{\alpha - z_2^+},$$

$$\mathbf{T}_{31} = \mathbf{K}_{31}(1, \alpha)R_{13}(3, \alpha) + \frac{\alpha^2 - 16}{\alpha - z_2^+},$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha) = \mathbf{P}_3^{-1}(\alpha)\mathbf{P}_1^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & 0 & -R_{13}(3, \alpha)(\alpha - z_2^+) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{G}_{31} & 0 & (\alpha - z_2^+) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{11} = (\alpha - z_1^+) + R_{13}(3, \alpha)R_{31}(1, \alpha)(\alpha - z_2^+)(\alpha - z_1^+),$$

$$\mathbf{G}_{31} = -R_{31}(1, \alpha)(\alpha - z_1^+)(\alpha - z_2^+).$$

Из последних соотношений легко видеть, что элементы матриц-функций  $\mathbf{K}_+(\alpha)$  и

$\mathbf{K}_-(\alpha)$  ограничены в своих областях регулярности и их элементы растут не быстрее первых степеней. Важно заметить, что матрица-функция  $\mathbf{K}_-(\alpha)$  в качестве множителей столбцов содержит полиномы, на которые разлагается ее определитель. Это создает удобство при использовании таких матриц-функций в приложениях.

Присвоив верхней полуплоскости значения  $\lambda_-$ , а нижней  $\lambda_+$ , получим правую факторизацию в терминах полуплоскостей, используя эти же формулы.

**Пример 2.** Рассмотрим характерную матрицу-функцию, встречающуюся в смешанных задачах механики, физики, экологии в сплошных средах.

$$\mathbf{K}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(\alpha) & \mathbf{K}_{12}(\alpha) \\ \mathbf{K}_{21}(\alpha) & \mathbf{K}_{22}(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{P}_{11}(\alpha_1, \alpha_2) \operatorname{ch} \gamma_1,$$

$$\mathbf{K}_{12} = \gamma_2^{-1} \mathbf{P}_{12}(\alpha_1, \alpha_2) \operatorname{sh} \gamma_2,$$

$$\mathbf{K}_{21} = \gamma_1^{-1} \mathbf{P}_{21}(\alpha_1, \alpha_2) \operatorname{sh} \gamma_1,$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{P}_{22}(\alpha_1, \alpha_2) \operatorname{ch} \gamma_2,$$

$$\gamma_k = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \chi_k^2)^{1/2},$$

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{22} \operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 - \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{21} \operatorname{sh} \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2.$$

$\mathbf{P}_{ik}(\alpha_1, \alpha_2)$  — полиномы переменных  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Оставляя  $\alpha_1$  вещественным, одним из способов (численным, асимптотическим) находим распределение нулей  $\alpha_{2k} = \alpha_2(k, \alpha_1)$  определителя  $\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$ . Асимптотическое поведение нулей вида (2) легко строится переходом в уравнении  $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = 0$  к тригонометрическим функциям.

Определитель  $\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$  как целая функция  $\alpha_2$  при вещественных  $\alpha_1$  может иметь счетное количество нулей разной мощности в зависимости от порядка и типа, а именно: их мощность может быть эквивалентна мощности нулей произведения  $\operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2$ , мощности нулей лишь функции  $\operatorname{ch} \gamma_1$ , количество нулей может оказаться конечным, наконец, определитель может не иметь нулей по параметру  $\alpha_2$ .

Каждый из этих случаев обладает своей спецификой и требует отдельного исследования. Ограничимся первым случаем как наиболее типичным. Определив области  $\lambda_+$ ,  $\lambda_-$ , требуемые условиями задачи, для которой осуществляется факторизация, осуществим разделение нулей в зависимости от принадлежности к областям. При счетности нулей определителя  $\Delta$  может оказаться, что область  $\lambda_+$

содержит лишь конечное число нулей (например, при решении пространственных контактных задач, в теории вирусов вибропрочности) или счетное (в задачах для полупространств, полуплоскостей или полуосей).

Ограничимся случаем наличия счетного множества нулей определителя. Допустим, нули областей  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  имеют одинаковую мощность, совпадающую с мощностью нулей функции  $\text{ch } \gamma_1$ .

Расположив нули  $z_n^+$ , принадлежащие  $\lambda_+$ , в порядке роста модулей  $u$ , считая их однократными, разделим их на два класса — первый с нечетным порядковым номером  $z_{2m+1}^+$ , второй — с четным  $z_{2m}^+$ . Для каждого из этих классов построим два канонических произведения  $\Phi_{p-}(\alpha_n)$ .

Следуя случаю  $L = 2$  (пример 1), предполагая, что среди нулей определителя нет нулей элементов  $\mathbf{K}_{11}$  и  $\mathbf{K}_{22}$ , после несложных преобразований будем иметь

$$\mathbf{K}_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(1, \alpha) & \mathbf{O}_{11} \\ \mathbf{K}_{21}(1, \alpha) & \mathbf{O}_{21} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}_{11} = \mathbf{K}_{11}(1, \alpha)R_{12} + \Phi_{2-}^{-1}\mathbf{K}_{12}(\alpha),$$

$$\mathbf{O}_{21} = \mathbf{K}_{21}(1, \alpha)R_{12} + \Phi_{2-}^{-1}\mathbf{K}_{22}(\alpha),$$

$$\mathbf{K}_{11}(1, \alpha) = \mathbf{K}_{12}R_{21} + \Phi_{1-}^{-1}\mathbf{K}_{11},$$

$$\mathbf{K}_{21}(1, \alpha) = \mathbf{K}_{22}R_{21} + \Phi_{1-}^{-1}\mathbf{K}_{21},$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}_{21}(u) du}{\mathbf{K}_{22}(u)\Phi_{1-}(u)(u-\alpha)},$$

$$R_{12}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}_{12}(1, u) du}{\mathbf{K}_{11}(1, u)\Phi_{2-}(u)(u-\alpha)},$$

$$\alpha \in \lambda_-,$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi_{1-} + R_{12}R_{21} \Phi_{1-}\Phi_{2-} & -R_{12}\Phi_{2-} \\ -R_{21}\Phi_{1-}\Phi_{2-} & \Phi_{2-} \end{pmatrix}.$$

В случае  $L = 1$  (пример 1), получим

$$\mathbf{K}_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(1, \alpha) & \mathbf{K}_{12}(\alpha) \\ \mathbf{K}_{21}(1, \alpha) & \mathbf{K}_{22}(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi_{1-} & 0 \\ -R_{21}\Phi_{1-}\Phi_{2-} & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}_{21}(u) du}{\mathbf{K}_{22}(u)\Phi_{1-}(u)\Phi_{2-}(u)(u-\alpha)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы остаются в силе для матриц-функций любого порядка, в том числе бесконечного, а также при наличии у определителя матрицы-функции нулей любой кратности.

### Литература

1. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Евдокимов С. М. К решению краевых задач с применением факторизации матриц-функций // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 2. С. 5–7.
2. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. Т. 410. № 2. 2006. С. 168–172.
3. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. Т. 393. № 4. 2003. С. 473–477.
5. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. Т. 392. № 6. 2003. С. 767–770.
6. Бабешко О. М. Об одном подходе в проблеме оценки загрязнения разнородных ландшафтов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2003. № 1. С. 10–15.
7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой, зависящие от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. Вып. 2. С. 3–72.
8. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Литвинчук Г. С., Спитковский И. М. Факторизация матриц-функций. Деп. ВИНТИ. № 2410-84. Ч. 1. 250 с. Ч. 2. 212 с.
11. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985. 464 с.
12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1985, 336 с.

Статья поступила 7 сентября 2006 г.

Кубанский государственный университет

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В. Бабешко О. М., Евдокимов С. М., 2006