

УДК 532.5

## КОЛЕБАНИЯ МАССИВНОЙ ТВЕРДОЙ ПЛАСТИНКИ В ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

*Ефремов И. И.<sup>1</sup>, Иванисова О. В.<sup>2</sup>, Лукащук Е. П.<sup>3</sup>*

OSCILLATIONS OF A MASSIVE SOLID PLATE IN PONDERABLE FLUID

Efremov I. I., Ivanisova O. V., Lukashchik E. P.

The work offers a mathematical model of harmonic oscillations of a massive plate on the layer of ponderable fluid. The problem is reduced to an integral equation with regard to overpressure on a plate. On the basis of the numerical solution of the integral equation, the effect of the mass of an oscillating plate and the added mass of fluid on dynamic characteristics of the plate is defined. The dynamic characteristics of the massive solid plate are represented graphically for different parameters.

Интерес к исследованию колебаний твердых и упругих тел, взаимодействующих с весомой жидкостью, обусловлен как необходимостью совершенствования судов на подводных крыльях, так и проектами создания мелководных аэродромов, искусственных островов [1–5]. Значительную роль в поведении названных объектов может играть соотношение массы объекта и присоединенной массы жидкости. В данной работе предлагается математическая модель учета влияния относительной массы технической установки на ее динамические характеристики.

Рассматриваются колебания пластинки бесконечного размаха длины  $2a$  массы  $M$ , погруженной на глубину  $h$  в несжимаемую весомую жидкость. Безвихревые течения около колеблющейся пластинки описываются потенциалом  $\varphi(x, y, t)$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1)$$

на полуплоскости  $y < h$  кроме области  $G = \{y = 0, |x| \leq a\}$ , соответствующей пластинке.

Зависимость потенциала скорости от времени представляется в виде

$$\varphi(x, y, t) = \bar{\varphi}(x, y)e^{-i\omega t},$$

где  $\bar{\varphi}(x, y)$  комплексная амплитуда потенциала скорости.

Так как пластинка находится в бесконечно глубокой жидкости, то потенциал должен убывать по мере удаления от пластины, стремясь к нулю на бесконечности по глубине

$$|\bar{\varphi}(x, y)| \rightarrow 0, \text{ при } y \rightarrow -\infty. \quad (2)$$

Колебания пластинки вызывают волновые движения жидкости, при этом волны распространяются от пластинки на бесконечность как в положительном, так и отрицательном направлении оси  $Ox$ . В связи с этим потенциал скорости на бесконечности должен удовлетворять условиям излучения в виде

$$\bar{\varphi} = B_{\pm}e^{\pm i\sigma x}, \text{ при } x \rightarrow \pm\infty,$$

где  $\sigma > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ .

На краях пластинки должно выполняться условие непротекания

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = v_y = v_{y0} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad x, y \in G, \quad (3)$$

где  $v_{y0} = \bar{v}_{y0}(x)e^{-i\omega t}$ ,  $f = \bar{f}(x)e^{-i\omega t}$ ,  $\bar{v}_{y0}(x)$  — заданная комплексная амплитуда вертикальной возмущенной скорости точек пластинки,  $\bar{f}(x)$  — комплексная амплитуда вертикального перемещения точек пластинки под действием гидродинамических сил.

<sup>1</sup>Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета.

<sup>2</sup>Иванисова Ольга Владимировна, преподаватель кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета.

<sup>3</sup>Лукащук Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.

Рассмотрим движение центра масс пластинки при поступательной возмущенной скорости. Вертикальные перемещения центра масс пластины описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$M \frac{d^2 f_c}{dt^2} = P - Q, \quad (4)$$

где  $Q = Q_0 e^{-i\omega t}$  — заданное возмущение нагрузки на пластинку,  $P = \int_{-a}^a (p_- - p_+) dx$  — суммарная сила давления жидкости на пластинку.

Интеграл Коши-Лагранжа запишем в виде

$$p = p_\infty - \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \varphi \right) - \rho g \eta = \\ = p_\infty + i\rho(\omega + i\mu)\varphi - \rho g \eta,$$

где  $\eta = \bar{\eta}(x)e^{-i\omega t}$  — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня  $y = h$ ;  $\mu > 0$  — коэффициент диссипативных сил, который в окончательном решении должен стремиться к нулю.

На свободной поверхности необходимо выполнить условие постоянства давления  $p = p_\infty$  и условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega \eta \text{ при } y = h.$$

Объединяя эти два условия, получим условие на свободной поверхности

$$\nu \bar{\varphi} + i\varepsilon \bar{\varphi} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0, \text{ при } y = h, \quad (5)$$

где  $\nu = \frac{\omega^2}{g}$ ,  $\varepsilon = \frac{\mu\omega}{g}$ .

Решая краевую задачу (1)–(5) для потенциала скорости, введем неизвестную финитную функцию  $\gamma(x, t) = \bar{\gamma}(x)e^{-i\omega t}$  — вихревую интенсивность, связанную с перепадом давления вдоль пластинки соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_- - p_+}{\rho} \right) = -(i\omega - \mu) \times \\ \times \left( \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) = (-i\omega + \mu) \gamma,$$

где неизвестная  $\bar{\gamma}(x)$  ищется в классе функций, неограниченных на кромках пластинки с дополнительным условием бесциркуляционности обтекания

$$\int_{-a}^{+a} \bar{\gamma}(s) ds = 0,$$

что обеспечивает ограниченность давления на кромках.

В дальнейшем черта над комплексными амплитудами опущена, а в выражениях, содержащих временной экспоненциальный множитель  $e^{-i\omega t}$ , рассматривается только действительная часть.

Решение краевой задачи для потенциала скорости выше и ниже уровня  $y = 0$  обозначим соответственно  $\varphi_+(x, y)$  и  $\varphi_-(x, y)$ . При этом при  $y = 0$  должно выполняться условие непрерывности нормальных скоростей  $\frac{\partial \varphi_+}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_-}{\partial y}$ . Применяя преобразование Фурье

$$F[\varphi_\pm](\alpha, y) = \Phi_\pm(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\pm(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

к задаче (1), (2), (3), (5), получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_\pm}{\partial y^2} - \alpha^2 \Phi_\pm = 0, \\ \frac{\partial \Phi_+}{\partial y} - (\nu + i\varepsilon) \Phi_+ \Big|_{y=h} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial y} \Big|_{y=0} = V(\alpha), \\ \Phi_- \Big|_{y \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $V(\alpha) = F \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) \right](\alpha)$ .

Решая краевую задачу (6), получим соотношение

$$V(\alpha) = \\ = \frac{|\alpha| \Gamma(\alpha)}{2i\alpha} \left( 1 - \frac{|\alpha| + \nu + i\varepsilon}{|\alpha| - \nu - i\varepsilon} e^{-2|\alpha|h} \right), \quad (7)$$

где  $\Gamma(\alpha) = F[\gamma](\alpha) = \int_{-a}^{+a} \gamma(x) e^{i\alpha x} dx$ .

Используя теорию вычетов и теорему о свертке, приходим к интегральному уравнению

$$\int_{-a}^{+a} \gamma(s) k(x-s) ds = -v_y(x),$$

где

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4h^2} \right) - \\ - \nu \operatorname{sgn} x e^{-2\nu h} e^{i\nu|x|} + \nu \frac{\operatorname{sgn} x}{\pi} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-\beta|x|} \frac{\nu \cos 2\beta h + \beta \sin 2\beta h}{\nu^2 + \beta^2} d\beta.$$

Вводя безразмерные величины, т. е. полагая  $\tilde{\nu} = \nu a$ ,  $m = \frac{M}{\rho a^2}$ ,  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega a}$ ,  $\tilde{f} = \frac{f}{a}$ ,  $\tilde{h} = \frac{h}{a}$ ,  $\tilde{Q} = \frac{Q}{\rho \omega^2 a^3}$ , и принимая  $a = 1$ , получим:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}(s) \tilde{k}(x-s) ds = -\tilde{v}_{y0} + i\tilde{f}_c, \\ -m\tilde{f}_c = i \int_{-1}^1 s\tilde{\gamma}(s) ds - \tilde{Q}_0, \\ \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}(s) ds = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для численного решения системы (8) применяется метод дискретных вихрей [6]. Учитывая, что  $\tilde{\gamma}(x) = \gamma_1(x) + i\gamma_2(x)$ ,  $\tilde{k}(x) = k_1(x) + ik_2(x)$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \gamma_1(s_j) \left( k_1(x_i - s_j) - \frac{s_j}{m} \right) - \right. \\ \left. - \gamma_2(s_j) k_2(x_i - s_j) \right] = -\tilde{v}_{y0}(x_i), \\ \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \gamma_2(s_j) \left( k_1(x_i - s_j) - \frac{s_j}{m} \right) + \right. \\ \left. + \gamma_1(s_j) k_2(x_i - s_j) \right] = \frac{\tilde{Q}_0(x_i)}{m}, \\ \sum_{j=1}^N \gamma_1(s_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_2(s_j) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $x_i = -1 + \frac{4i-1}{2N-1}$ ,  $s_j = -1 + \frac{4j-3}{2N-1}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ .

Решив систему (9), найдем интенсивность вихрей  $\gamma_1(s_j)$  и  $\gamma_2(s_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , с помощью которых можно рассчитать коэффициент нормальной силы

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{P}{\rho \omega^2 a^3} = \frac{1}{\rho \omega^2 a^3} \int_{-a}^{+a} (p_- - p_+) dx = \\ &= i \int_{-1}^{+1} s \tilde{\gamma}(s) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай кинематического возбуждения  $v_{y0} = \omega a v_0$ ,  $Q_0 = 0$ . В этом случае вихревая интенсивность пропорциональна  $v_0$ .

Наличие действительной и мнимой составляющих  $c_n$

$$c_n = -i(c_{n1} + ic_{n2})v_0,$$

$$c_{n1} = - \int_{-1}^{+1} \xi \operatorname{Re}(\tilde{\gamma}(\xi)) d\xi,$$

$$c_{n2} = - \int_{-1}^{+1} \xi \operatorname{Im}(\tilde{\gamma}(\xi)) d\xi$$

означает, что гидродинамическое давление пропорционально как скорости  $v_0$ , так и ускорению  $-i\omega v_0$ .

При этом  $c_{n1}$  — коэффициент присоединенных масс, а  $c_{n2}$  — коэффициент демпфирования.

Изложенный метод решения поставленной задачи реализован с помощью математического пакета Mathcad при  $\tilde{v}_{y0} = -1$ ,  $\tilde{Q}_0 = 0$ ,  $N = 50$ . На рис. 1 представлены серии кривых коэффициента нормальной силы при погружении пластинки массой  $m = 5$  на глубину  $\tilde{h} = 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 1$ . Эти рисунки показывают немонотонный характер подъемной силы.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости коэффициента нормальной силы от приведенной частоты  $\tilde{\nu} = \frac{\omega^2 a}{g}$  при погружении пластинки на глубину  $\tilde{h} = 0, 2$ ,  $\tilde{h} = 1$  и массой  $m = 100, 20, 10, 5, 2, 1$ .

Для приближенного качественного анализа поведения колеблющейся пластинки применим асимптотический метод для малых  $h$  и  $\nu$  на основе приближенного соотношения

$$1 - \frac{|\alpha| + \nu}{|\alpha| - \nu} e^{-2h|\alpha|} \approx -\frac{2}{|\alpha|} (\nu - \alpha^2 h) \quad \text{при } h \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0.$$

Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (7) принимает вид

$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{i\alpha} (\nu - \alpha^2 h) \approx V(\alpha).$$

Обратное преобразование Фурье приводит к краевой задаче

$$\begin{cases} h \frac{d^2 \tilde{\Gamma}}{dx^2} + \tilde{\nu} \tilde{\Gamma} = \tilde{v}_{y0}(x) + \\ + \frac{1}{m} \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}(s) ds - \frac{i\tilde{Q}_0}{m}, \\ \tilde{\Gamma}(-1) = \tilde{\Gamma}(1) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\tilde{\Gamma}(x) = \int_{-1}^x \gamma(s) ds$ .

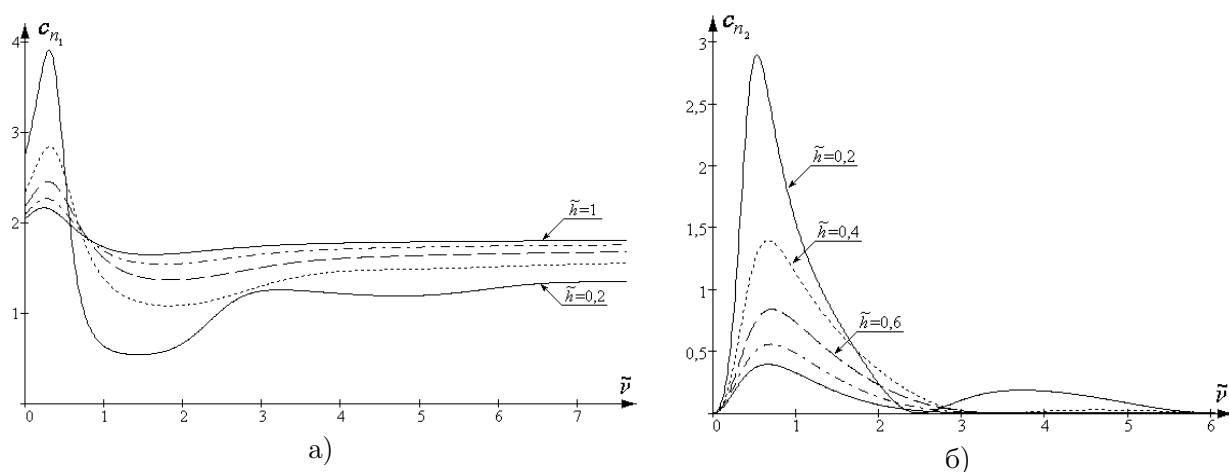


Рис. 1. Зависимость коэффициента нормальной силы от приведенной частоты при  $m = 5$  и разных значениях  $\tilde{h}$

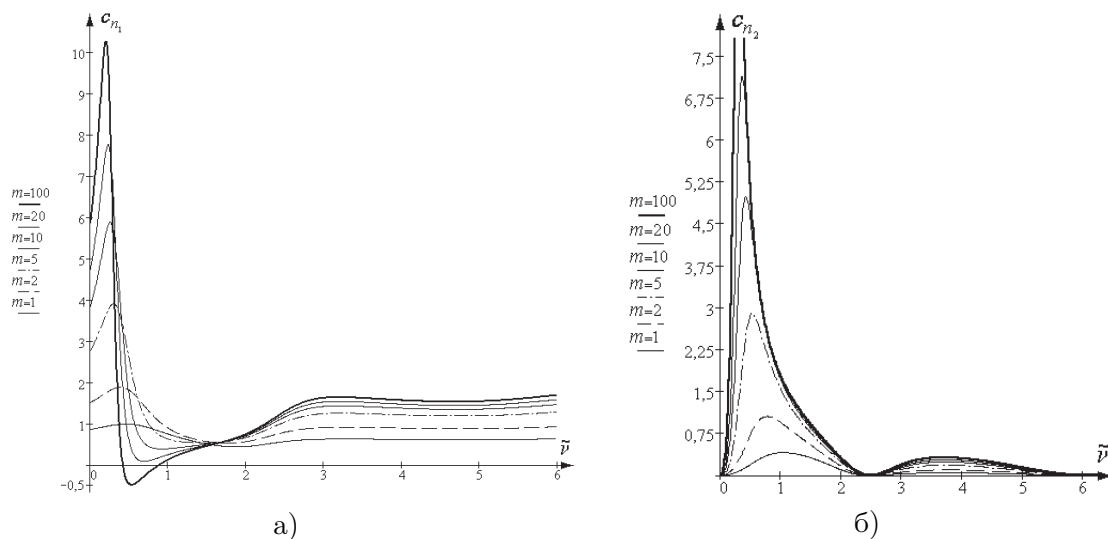


Рис. 2. Зависимость коэффициента присоединенных масс (а) и демпфирования (б) от приведенной частоты при  $\tilde{h} = 0,2$  и разных значениях  $m$

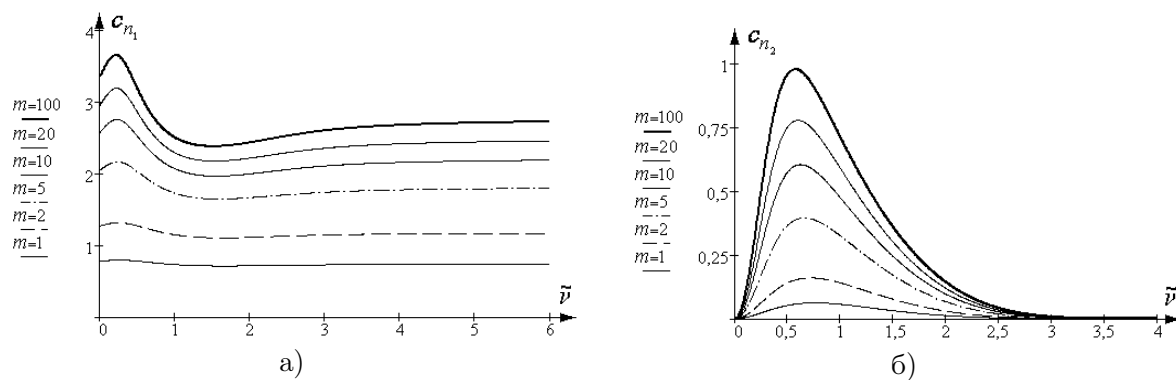


Рис. 3. Зависимость коэффициента нормальной силы от приведенной частоты при  $\tilde{h} = 1$  и разных значениях  $m$

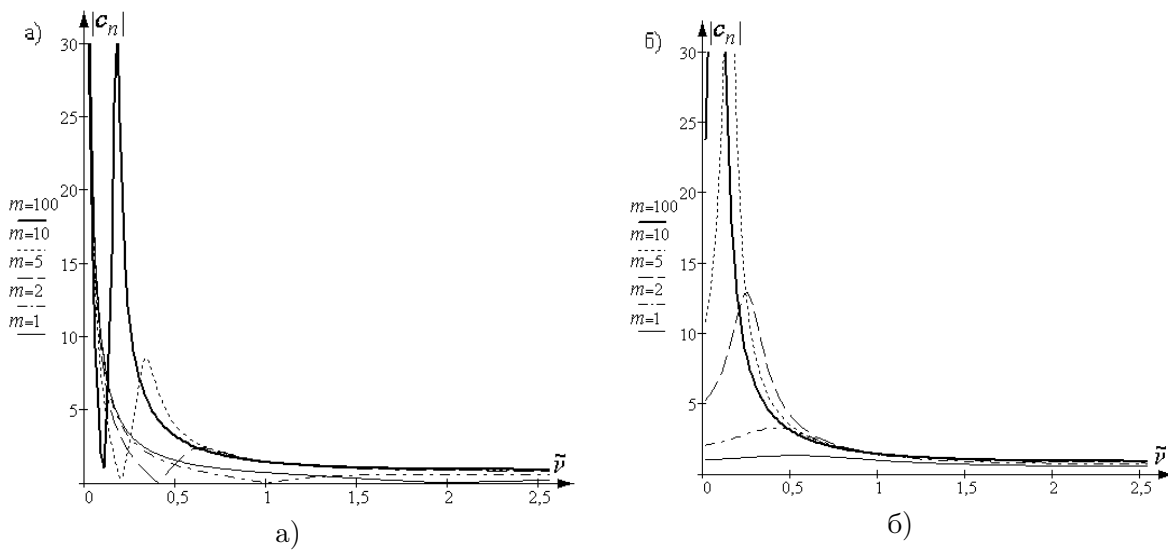


Рис. 4. Зависимость амплитуды коэффициента нормальной силы от приведенной частоты при разных значениях  $m$

Решая краевую задачу (10), найдем коэффициент нормальной силы

$$c_{n1} \approx \frac{2 \left( \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{h}} - \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{h}} \right) m}{\tilde{\nu} m \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{h}} + 2 \left( \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{h}} - \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{h}} \right)}.$$

Предельное значение коэффициента нормальной силы (присоединенных масс) по асимптотике  $c_{n1} \rightarrow \frac{2m}{3hm+2}$  при  $\tilde{\nu} \rightarrow 0$ . Как видно из графика, асимптотика дает качественно правильную зависимость коэффициента  $c_{n1}$  от  $\tilde{h}$  и  $m$ , хотя численные значения занижены. В другом предельном случае  $h \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\nu} \rightarrow \infty$   $c_{n1} \rightarrow \frac{m\pi}{2m+\pi}$ .

Рассмотрим далее случай плавающей пластинки. В этом случае в уравнении движения центра масс появляется дополнительное слагаемое — гидростатическая сила, соответствующая осадке центра масс

$$-\omega^2 M f_c = P - Q - \rho g f_c 2a.$$

Необходимость учета влияния гидростатической силы центра масс вызвана тем, что на плавающую пластинку сверху действует атмосферное давление  $p_\infty$ , поэтому избыточное противодавление сверху отсутствует, в то время как снизу действует сила Архимеда.

Учет влияния архимедовой силы существен лишь при малых  $\nu$  и малых относитель-

ных массах  $m$ . На рис. 4 представлены сравнительные графики зависимости амплитуды  $c_n$  с учетом (рис. 4а) и без учета (рис. 4б) архимедовой силы для различных  $m$ .

Предложенная математическая модель колебаний твердой пластинки может быть обобщена для учета влияния упругих деформаций пластины под действием гидродинамического давления.

### Литература

1. Коробкин А. А. Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластинки на волнах // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 90–96.
2. Стурова И. В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 87–94.
3. Хабазпашева Т. И. Плоская задача об упругой плавающей пластине // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 166–169.
4. Ткачева Л. А. Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 131–149.
5. Ефремов И. И., Иванисова О. В. Колебания пластинки под свободной поверхностью весомой жидкости // Труды XII Междунар. симп. МДОЗМФ, 2005. С. 140–144.
6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.