УДК 517.95

О ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РОССБИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ[1]

Свидлов А. А.[2]

SECOND INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE ROSSBY EQUATION IN FINITE DOMAIN

Svidlov A. A.

A second initial-boundary problem for the Rossby equation in the finite domain is considered. Existence of the generalized solution of the problem is proved.

Keywords: Rossby equation, planetary waves, Sobolev-type equation.

Введение

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂Q, такая что вложение $H^1(Q) \subset L_2(Q)$ компактно (достаточным условием компактности этого вложения является выполнение условие конуса [1, гл. VI, п. 6.2]); $\bar{Q}$ — замыкание области Q;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2};$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right);$$

ν — внешняя нормаль к границе области Q;

$$L_2^c(Q) = \{u \in L_2(Q) : (u, 1)_{L_2(Q)} = 0\},$$

$$H_c(Q) = \{u \in H^1(Q) : (u, 1)_{L_2(Q)} = 0\},$$

$$C_c^2(\bar{Q}) = \{u \in C^2(\bar{Q}) : (u, 1)_{L_2}(Q) = 0\}$$

— подпространство функций из, соответственно, $L_2(Q)$, $H^1(Q)$, $C^2(Q)$; $H^k(Q) = W_2^k(Q)$, $k \in N_0$; $C^k([0, T], V)$ — множество k раз непрерывно дифференцириуемых функций, определенных на $[0, T]$, со значениями в банаховом пространстве V.

В геофизической гидродинамике изучаются различные типы волн в океане и атмосфере. Волны Россби (планетарные волны) — один из этих типов волн. Динамика планетарных волн приближенно описывается уравнением Россби [2]

$$\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Исследованию свойств решений начально-краевых задач для этого уравнения посвящены работы [3–5]. В работах [5, 6] дана постановка первой начально-краевой задачи для уравнения Россби и доказано существование единственного обобщенного решения этой задачи. В этой работе рассмотрена начально-краевая задача с условием второго рода на границе, другими словами вторая начально-краевая задача.

1. Постановка задачи

Рассмотрим вторую начально-краевую задачу для уравнения Россби:

$$\Delta u_t(\mathbf{x}, t) + u_{x_1}(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} \in Q, \quad T \geqslant t > 0,$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu} u(\mathbf{x}, t)\right|_{\partial Q} = 0, \tag{1.3}$$

где $u_0(\mathbf{x}) \in H^1(Q)$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта №2.1.1/3828 программы Минобрнауки «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)».

[2]Свидлов Александр Анатольевич, ведущий программист Интернет Центра Кубанского государственного университета; e-mail: svidlov@mail.ru.

Классическим решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию

$$u(\mathbf{x},t) \in C^1\big([0,T], C^2_c(\bar{Q})\big),$$

удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3).

Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию

$$u(\mathbf{x},t) \in C^1\big([0,T], H_{\mathrm{c}}(Q)\big),$$

удовлетворяющую условиям:

1) для любой функции $h(\mathbf{x}) \in H^1(Q)$ и для любого $t \in [0,T]$ справедливо интегральное тождество

$$\int_Q \big(\nabla u_t(\mathbf{x},t)\nabla h(\mathbf{x}) - \\ - u_{x_1}(\mathbf{x},t)h(\mathbf{x})\big)d\mathbf{x} = 0, \quad (1.4)$$

2) $u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x})$.

Справедливы следующие леммы, которые показывают взаимосвязь обобщенного и классического решения задачи (1.1)–(1.3).

Лемма 1. *Классическое решение является обобщенным.*

Лемма 2. *Обобщенное решение $u(\mathbf{x},t)$ является классическим, если*

$$u(\mathbf{x},t) \in C^1\big([0,T], C^2_c(\bar{Q})\big) \;\; и \;\; \frac{\partial}{\partial\nu}u_0(\mathbf{x})\bigg|_{\partial Q} = 0.$$

Не будем останавливаться на доказательстве этих лемм, так как оно практически полностью повторяет доказательство лемм 1, 2 из работы [6].

Покажем взаимосвязь обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) с обобщенным решением задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Обобщенным решением задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta\varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in Q, \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}\varphi(\mathbf{x})\bigg|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $\psi(\mathbf{x}) \in L_2(Q)$, называется функция $\varphi(\mathbf{x}) \in H^1(Q)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_Q \nabla\varphi(\mathbf{x})\nabla h(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\int_Q \psi(\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (1.6)$$

для всех $h(\mathbf{x}) \in H^1(Q)$.

Легко видеть, что интегральное тождество (1.4) выполняется тогда и только тогда, когда при любом $t \in [0,T]$ функция $u_t(\mathbf{x},t)$ является обобщенным решением задачи Неймана для уравнения Пуассона с правой частью, равной $-u_{x_1}(\mathbf{x},t)$.

Справедлива следующая известная теорема.

Теорема 1. *Обобщенное решение $\varphi(\mathbf{x}) \in H^1(Q)$ задачи Неймана для уравнения Пуассона (1.5) существует тогда и только тогда, когда функция $\psi(\mathbf{x}) \in L^c_2(Q)$. Причем, в пространстве $H_{\mathrm{c}}(Q)$ обобщенное решение $\varphi(\mathbf{x})$ единствено и удовлетворяет неравенству*

$$\|\varphi(\mathbf{x})\|_{H_{\mathrm{c}}(Q)} \leqslant C\,\|\psi(\mathbf{x})\|_{L_2(Q)},$$

где C — константа, зависящая лишь от области Q.

Из теоремы 1, следует, что обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) принадлежит пространству $C^1([0,T], D)$, где

$$D = \left\{ v(\mathbf{x}) \in H_c(Q) : \frac{\partial}{\partial x_1}v(\mathbf{x}) \in L^c_2(Q) \right\}.$$

Очевидно, D является подпространством пространства $H_c(Q)$.

Определим оператор

$$\Delta_2^{-1} : L^c_2(Q) \to H_c(Q)$$

следующим образом: $\Delta_2^{-1}\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$, если $\varphi(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи (1.5), принадлежащее $L^c_2(Q)$. В силу теоремы 1 оператор Δ_2^{-1} определен корректно.

Рассмотрим оператор A_2, определенный равенством

$$A_2 = -\Delta_2^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

с областью определения D.

Очевидно, что для любой функции $u(\mathbf{x},t) \in C^1([0,T], D)$ равенство

$$u_t(\mathbf{x},t) = A_2 u(\mathbf{x},t) \quad (1.7)$$

эквивалентно интегральному тождеству (1.4).

Таким образом, обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) является только функция $u(\mathbf{x},t) \in C^1([0,T], D)$, для которой:

1) выполняется равенство (1.7) для любого $t \in [0,T]$,

2) $u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x})$.

2. Существование и единственность обобщенного решения

Сформулируем теорему существования и единственности обобщенного решения.

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) существует тогда и только тогда, когда $u_0(\mathbf{x}) \in P$. Причем, решение единственно и имеет вид*

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp(tA_2)u_0(\mathbf{x}). \qquad (2.1)$$

В формулировке теоремы 2 пространство P — это пространство функций $v(\mathbf{x}) \in H_c(Q)$, таких что $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}), x_1^k\right)_{L_2(Q)} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство теоремы 2 проведем в три этапа.

1. *Пусть обобщенное решение $u(\mathbf{x}, t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует. Докажем, что*

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp(t\tilde{A}_2)u_0(\mathbf{x}), \qquad (2.2)$$

где $\tilde{A}_2 : H_c(Q) \to H_c(Q)$ линейный непрерывный оператор определенный ниже. Заметим, что из этого представления следует единственность решения.

Определим оператор $\tilde{\Delta}_2^{-1} : L_2(Q) \to H_c(Q)$ следующим образом:

$$\tilde{\Delta}_2^{-1}(y(\mathbf{x}) + c) = \Delta_2^{-1}y(\mathbf{x}),$$

где $y(\mathbf{x}) \in L_2^c(Q)$, c — произвольная константа. Линейный оператор $\tilde{\Delta}_2^{-1}$ определен на всем пространстве $L_2(Q)$, ограничен, и выпоняется равенство

$$\left\|\tilde{\Delta}_2^{-1}\right\| = \left\|\Delta_2^{-1}\right\|.$$

Оператор $\tilde{A}_2$ определим равенством

$$\tilde{A}_2 = -\tilde{\Delta}_2^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Область определения $\tilde{A}_2$ есть все пространство $H_c(Q)$. Очевидно, что оператор $\tilde{A}_2$ непрерывен и выполняется равенство $\tilde{A}_2 v(\mathbf{x}) = A_2 v(\mathbf{x})$ для всех $v(x) \in D$.

Из этого следует, что обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет равенству

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \tilde{A}_2 u(\mathbf{x}, t). \qquad (2.3)$$

Равенство (2.3) вместе с условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \qquad (2.4)$$

можно рассматривать как задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве $H_c(Q)$. Её решение имеет вид (2.2) [7, гл.VII, §31, п.31.1].

Таким образом, если обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) существует, то оно единственно и представляется формулой (2.2). Доказательство утверждения пункта 1 завершено.

2. *Докажем, что если $u_0(\mathbf{x}) \in P$, то обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) существует и представимо формулой (2.1).*
Для этого понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ обобщенное решение задачи Неймана (1.5) с правой частью $\psi(\mathbf{x})$, тогда справедливо равенство*

$$k\left(\varphi_{x_1}(\mathbf{x}), x_1^{k-1}\right)_{L_2(Q)} = = -\left(\psi(\mathbf{x}), x_1^k\right)_{L_2(Q)} \qquad (2.5)$$

для любого натурального k. Из (2.5) следует, что для любой функции $v(\mathbf{x}) \in D$ выполняется равенство

$$k\left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 v(\mathbf{x}), x_1^{k-1}\right)_{L_2(Q)} = = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}), x_1^k\right)_{L_2(Q)}. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Выберем в интегральном тождестве (1.6) функцию $h(\mathbf{x}) = x_1^k$, получим (2.5). Взяв в (2.5) $\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x}) = A_2 v(\mathbf{x})$, получим (2.6). Лемма доказана. □

Лемма 4. $A_2 P \subset P$.

Доказательство. Так как $P \subset D$, то оператор A_2 определен на множестве P. Пусть $v(\mathbf{x}) \in P$, докажем, что $A_2 v(\mathbf{x}) \in P$. Из $v(\mathbf{x}) \in P$ следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}), x_1^k\right)_{L_2(Q)} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \qquad (2.7)$$

Из формулы (2.6) теперь следует, что $A_2 v(\mathbf{x}) \in P$. Доказательство завершено. □

Доказательство утверждения пункта 2. Пусть $u_0(\mathbf{x})$ принадлежит P. Согласно леммы 4, равенство (1.7) является дифференциальным уравнением в банаховом пространстве P. Задача Коши для дифференциального уравнения (1.7) с начальным условием (2.4) имеет единственное решение в пространстве $C^1([0,T],P)$. Причем, это решение $u(\mathbf{x},t)$ имеет вид (2.1). Отметим, что $C^1([0,T],P)$ является подпространством пространства $C^1([0,T],D)$. Легко видеть, что функция $u(\mathbf{x},t)$ есть обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3). Доказательство утверждения пункта 2 завершено.

3. *Докажем, что если $u_0(\mathbf{x}) \notin P$, то обобщенное решение задачи (1.1) – (1.3) не существует.*
Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть $v(\mathbf{x}) \in H_c(Q)$. Если*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}v(\mathbf{x}), x_1^k\right)_{L_2(Q)} = 0,\ k=\overline{0,N},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}v(\mathbf{x}), x_1^{N+1}\right)_{L_2(Q)} \neq 0,$$

то $A_2^k v(\mathbf{x}) \in D$, $k=\overline{0,N}$, и $A_2^{N+1}v(\mathbf{x}) \notin D$.
Доказательство леммы 5 опирается на лемму 3 и определение оператора A_2.

Доказательство утверждения пункта 3. Достаточно доказать, что если $u_0(\mathbf{x}) \notin P$, то функция $u(\mathbf{x},t) = \exp(t\tilde{A}_2)u_0(\mathbf{x}) \notin C^1([0,T],D)$.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u(\mathbf{x},t), 1\right)_{L_2(Q)} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}_2{}^k u_0(\mathbf{x}), 1\right)_{L_2(Q)},$$

где $t \in [0,T]$. Очевидно, что если $f(t)$ не тождественно равна 0 на отрезке $[0,T]$, то $u(\mathbf{x},t) \notin C^1([0,T],D)$. Так как $u_0(\mathbf{x}) \notin P$, то найдется такое число N, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(\mathbf{x}), x_1^k\right)_{L_2(Q)} = 0,\ k=\overline{0,N},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(\mathbf{x}), x_1^{N+1}\right)_{L_2(Q)} \neq 0.$$

Тогда по лемме 5 $A_2^k u_0(\mathbf{x}) \in D$, $k=\overline{0,N}$, и $A_2^{N+1}u_0(\mathbf{x}) \notin D$. Учитывая, что $A_2^k u_0(\mathbf{x}) = \tilde{A}_2^k u_0(\mathbf{x})$ при $k = \overline{0,N+1}$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_2^k u_0(\mathbf{x}), 1\right)_{L_2(Q)} = 0$ при $k=\overline{0,N}$, получим

$$f(t) = \frac{t^{N+1}}{(N+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_2^{N+1}u_0(\mathbf{x}), 1\right)_{L_2(Q)} + \\ + \sum_{k=N+2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}_2{}^k u_0(\mathbf{x}), 1\right)_{L_2(Q)}.$$

Из этого следует, что $f(t)$ не равна нулю в некоторой окрестности $t=0$. **Доказательство теоремы 2 закончено.**

Замечание. Пространство P, рассмотренное выше, можно определить следующим образом. Простраство P — это пространство функций $v(\mathbf{x}) \in H_c(Q)$, таких что

$$\int\limits_{Q\cap\{x_1=c\}} \frac{\partial}{\partial x_1}v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0,$$

почти для всех c, при которых плоскость $x_1 = c$ имеет непустое пересечение с Q. Доказательство эквивалентности определений не представляет сложности, поэтому приводить его здесь не будем.

Приведем примеры обобщенных решений в частных случаях.

1. Пусть $u_0(\mathbf{x}) \in H_c(Q)$ не зависит от переменной x_1. Тогда обобщенное решение $u(\mathbf{x},t)$ существует и выполняется равенство $u(\mathbf{x},t) = u_0(\mathbf{x})$ при любом $t \in [0,T]$. Отметим, что при этом $u_0(\mathbf{x}) \in P$. Функция $u(\mathbf{x},t)$ не является классическим решением задачи (1.1)–(1.3), так как для неё не выполнено равенство (1.3).

2. Рассмотим задачу (1.1)–(1.3) в области $Q = [0,1]\times[0,1]$. Пусть

$$u_0(\mathbf{x}) = \cos 2\pi x_2(\cos 4\pi x_1 - 4\cos \pi x_1),$$

тогда классическое и, следовательно, обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$u(\mathbf{x},t) = \\ = \cos 2\pi x_2\left(\cos\frac{t}{5\pi}(\cos 4\pi x_1 - 4\cos \pi x_1) - \right. \\ \left. - \sin\frac{t}{5\pi}(\sin 4\pi x_1 - 4\sin \pi x_1)\right). \quad (2.8)$$

В том, что $u(\mathbf{x},t)$ заданная формулой (2.8) является классическим решением легко убедится проверкой.

Автор выражает глубокую признательность Дроботенко М. И. и Бирюку А. Э. за полезные обсуждения.

Литература

1. *Adams R.A.* Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. P. 286.
2. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 335.
3. *Успенский С. В., Демиденко Г. В.* О поведении при $t \to \infty$ решений некоторых задач гидродинамики // ДАН СССР. 1985. Т. 280. №5. С. 1072–1075.
4. *Тикиляйнен А. А.* Об одной задаче, связанной с теорией планетарных волн // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28. №4. С. 534–548.
5. *Лежнёв В. Г.* Асимптотические задачи линейной гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 1993. С. 92.
6. *Свидлов А. А.* О начально-краевой задаче для уравнения Россби в ограниченной области // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №3. С. 48–52.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. С. 448.

Ключевые слова: уравнение Россби, планетарные волны, уравнение типа Соболева.

Статья поступила 6 сентября 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар