

УДК 519.7:544.6+22.18:24.57

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ В КАНАЛЕ ОБЕССОЛИВАНИЯ ЭЛЕКТРОДИАЛИЗАТОРА С УЧЕТОМ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ¹

Узденова А. М.², Коваленко А. В.³, Никоненко В. В.⁴, Уртеннов М. Х.⁵

MATHEMATICAL MODELING ELECTROCONVECTION IN THE CHANNEL DESALINATION ELECTRODIALYSIS PLANT TAKING INTO ACCOUNT FORCED CONVECTION

Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Urtenov M. Kh.

The mathematical model of influence electroconvection on transportation of ions of salt in the channel desalination electro dialysis plant taking into account forced convection in article. The basic laws of process electroconvection are revealed.

Keywords: mathematical modelling, electroconvection, electro dialysis plant, electromembrane systems, channel desalination.

Введение

Изучение электроконвекции важно для лучшего понимания механизмов сверхпределного тока и интенсификации массопереноса в электродиализных аппаратах (ЭДА) [1, 2], а также для управления потоками жидкостей в электрокинетических микро- и наностройствах [3–5].

Электрокинетические явления в ЭДА обусловлены существованием на границе раствор/мембрана двойного электрического слоя.

При сверхпределных токах область пространственного заряда расширяется и выходит далеко за пределы равновесного двойного электрического слоя, занимая макроскопическую область, существенно меньшую, но уже сопоставимую с толщиной диффузионного слоя [6, 7]. Внешнее электрическое поле не только индуцирует неравновесный пространственный электрический заряд, но и вызывает движение (скольжение) жидкости относительно неподвижной поверхности.

Этот конвективный перенос называют электроосмосом второго рода (электроконвекцией). Плотность и толщина слоя индуцированного заряда быстро увеличиваются с ростом плотности тока, создавая скорости, превышающие скорости электроосмоса первого рода на порядок и более. Теория электроосмоса второго рода развита в работах И. Рубинштейна, Б. Зальцмана [6, 8–12] и др. В этих работах электроконвекция в диффузионном слое моделируется в условиях отсутствия вынужденной конвекции, решаются уравнения Навье–Стокса совместно с уравнениями Нернста–Планка и условием электронейтральности. Для учета воздействия внешнего электрического поля на расширенный пространственный заряд, индуцируемый в обедненном растворе на границе с одной из мембран, используется специальное граничное условие (условие скольжения), выведенное ими.

Таким образом, в работах Рубинштейна и Зальцмана при математическом моделировании электроконвекции накладываются неко-

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (П596) и РФФИ (10-01-00194).

²Узденова Аминат Магомедовна, аспирантка кафедры математического анализа Карачаево-Черкесского государственного университета им. У. Д. Алиева; e-mail: uzd_am@mail.ru.

³Коваленко Анна Владимировна, канд. экон. наук, доцент кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: savanna-05@mail.ru.

⁴Никоненко Виктор Васильевич, д-р хим. наук, профессор кафедры физической химии Кубанского государственного университета; e-mail: v_nikonenko@mail.ru.

⁵Уртеннов Махамет Хусеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: urtenovmax@mail.ru.

торые ограничения: отсутствует вынужденная конвекция, уравнение Пуассона используется лишь для одномерного случая, а в двумерном случае вместо него используется условие электронейтральности в сочетании с условием скольжения на межфазной границе. Кроме того, электроконвекция моделируется лишь для диффузионного слоя, что не позволяет исследовать изменение толщины диффузионного слоя в зависимости от длины аппарата, величины падения потенциала и т.д. В данной статье, являющейся продолжением работ [13], предлагается моделирование и исследование электроконвекции в камере обессоливания (КО) электродиализного аппарата без указанных выше ограничений.

1. Постановка задачи

Чтобы оценить влияние электроконвекции на процессы в КО ЭДА, рассмотрим двумерную задачу нестационарного переноса бинарного электролита в КО ЭДА, заключенной между гомогенными катионообменной и анионообменной мембранами.

Пусть H и L — соответственно, ширина и длина КО, V_0 — начальная (линейная) скорость прокачивания раствора, $x = 0$ соответствует условной межфазной границе катионообменной мембраны/раствор, $x = H$ — условной межфазной границе анионообменной мембраны/раствор, $y = 0$ — входу, а $y = L$ — выходу из камеры обессоливания.

Для моделирования электроконвекции в условиях, будем использовать связанную систему электродиффузионных уравнений [14] и уравнений Навье–Стокса [15] в приближении Буссинеска, с учетом пространственной силы. Векторная запись этой системы для бинарного электролита, в случае отсутствия химических реакций, имеет вид

$$j_i = \frac{F}{RT} z_i D_i C_i E - D_i \text{grad } C_i + C_i V, \quad (1.1)$$

$$i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\text{div } j_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_0 \Delta \varphi = F (z_1 C_1 + z_2 C_2), \quad (1.3)$$

$$I = F (z_1 j_1 + z_2 j_2), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta V + \frac{1}{\rho_0} f, \quad (1.5)$$

$$\text{div}(V) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь ∇ — градиент, Δ — оператор Лапласа, V — скорость течения раствора электролита, ρ_0 — характерная плотность раствора, P — давление, C_1, C_2 — концентрации катионов и анионов в растворе, соответственно, z_1, z_2 — зарядовые числа катионов и анионов, D_1, D_2 — коэффициенты диффузии катионов и анионов, φ — потенциал электрического поля, ε_0 — диэлектрическая проницаемость электролита, $f = \varepsilon_0 \Delta \varphi \nabla \varphi$ — плотность силы электрического поля, F — постоянная Фарадея, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, t — время, ν — коэффициенты кинематической вязкости. При этом P, V, φ, C_1, C_2 — неизвестные функции, зависящие от времени t и координат x, y . В системе уравнений (1.1)–(1.6) уравнения (1.1)–(1.4) описывают электрохимические поля, а уравнения Навье–Стокса (1.5), (1.6) — движение раствора под действием пространственной электрической силы в приближении Буссинеска. Электромембранные системы используются, как правило, в двух разных режимах работы: потенциостатическом режиме, когда постоянным поддерживается падение потенциала в цепи и гальваностатическом режиме, когда постоянным поддерживается ток в цепи.

В этой работе рассматривается потенциостатический режим, которому соответствует условие

$$\varphi(H, y, t) - \varphi(0, y, t) = d_\varphi = \text{const}, \quad (1.7)$$

означающее, что величина падения потенциала в КО ЭДА постоянна.

2. Математическая постановка задачи

После ряда преобразований уравнения (1.1)–(1.6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V &= \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta V + \frac{1}{\rho_0} \varepsilon_0 \Delta \varphi \nabla \varphi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{div}(V) = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial t} = -\text{div} \left(-\frac{F}{RT} z_1 D_1 C_1 \nabla \varphi - \right. \\ \left. - D_1 \nabla C_1 + C_1 V \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(-\frac{F}{RT} z_2 D_2 C_2 \nabla \varphi - D_2 \nabla C_2 + C_2 V \right), \quad (2.4)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{F}{\varepsilon_0} (z_1 C_1 + z_2 C_2). \quad (2.5)$$

Наряду с условием (1.7) будем использовать следующие граничные условия:

1) На поверхности катионообменной мембраны $x = 0$, $y \in [0, L]$, $t \geq 0$ будем считать граничную концентрацию катионов равной фиксированному заряду внутри мембраны

$$C_1(0, y, t) = C_{km}. \quad (2.6)$$

Кроме того, предположим, что катионообменная мембрана является идеально селективной, т. е. непроницаемой для анионов

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{F}{RT} z_2 C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.7)$$

Для скорости используем условие прилипания

$$V_x(0, y, t) = 0, \quad V_y(0, y, t) = 0. \quad (2.8)$$

2) На поверхности анионообменной мембраны $x = H$, $y \in [0, L]$, $t \geq 0$ будем считать граничную концентрацию анионов равной фиксированному заряду внутри мембраны:

$$C_2(H, y, t) = C_{am}. \quad (2.9)$$

Кроме того, предположим анионообменную мембрану идеально селективной, т. е. непроницаемой для катионов:

$$\left(\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{F}{RT} z_1 C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (H, y, t) = 0. \quad (2.10)$$

Для скорости используем условие прилипания:

$$V_x(H, y, t) = 0, \quad V_y(H, y, t) = 0. \quad (2.11)$$

3) На входе в рассматриваемую область $y = 0$, $x \in [0, H]$, $t \geq 0$ будем считать, что концентрация постоянна, потенциал распределен линейно, а скорость течения раствора имеет форму параболы Пуазейля:

$$\begin{aligned} C_i(x, 0, t) &= C_0, \quad i = 1, 2, \\ \varphi(x, 0, t) &= d_\varphi \left(1 - \frac{x}{H} \right), \\ V_x(x, 0, t) &= 0, \\ V_y(x, 0, t) &= V_0 6 \frac{x}{H} \left(1 - \frac{x}{H} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

4) На выходе из рассматриваемой области $y = L$, $x \in [0, H]$, $t \geq 0$ будем использовать «мягкие» условия для концентрации и потенциала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_i(x, L, t)}{\partial y} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial \varphi(x, L, t)}{\partial y} &= 0, \\ V_x(x, L, t) &= 0, \\ V_y(x, L, t) &= V_0 6 \frac{x}{H} \left(1 - \frac{x}{H} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

5) Примем согласованные с граничными условиями начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{aligned} C_i(x, y, 0) &= C_0, \quad i = 1, 2, \\ \varphi(x, y, 0) &= d_\varphi \left(1 - \frac{x}{H} \right), \\ V_x(x, y, 0) &= 0, \\ V_y(x, y, 0) &= V_0 6 \frac{x}{H} \left(1 - \frac{x}{H} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Были проведены численные эксперименты для раствора NaCl в широком спектре таких параметров, как начальная концентрация, скорость прокачивания раствора, межмембранное расстояние, длина канала, скачок электрического потенциала и определены основные закономерности распределения электрохимических (концентрации, напряженности электрического поля, и т. д.) и гидродинамических полей. Ниже представлены некоторые результаты численных экспериментов при следующих входных параметрах: ширина канала обессоливания $H = 1$ мм, длина канала $L = 8$ мм, начальная скорость прокачивания раствора меняется от $V_0 = 10^{-5}$ м/с до $V_0 = 10^{-3}$ м/с, начальная концентрация раствора $C_0 = 10$ моль/м³, температура раствора $T = 293$ К, начальная плотность раствора $\rho_0 = 1002,5$ кг/м³, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1006 \cdot 10^{-9}$ м²/с, коэффициент диффузии катиона и аниона, соответственно, $D_1 = 1,33 \cdot 10^{-9}$ м²/с, $D_2 = 2,05 \cdot 10^{-9}$ м²/с, разность потенциалов электрического поля в канале меняется от $d_\varphi = -0,5$ В до $d_\varphi = -0,1$ В.

3. Основные закономерности процесса электроконвекции

Рассмотрим закономерности изменения электрохимических и гидродинамических

полей при увеличении абсолютной величины d_φ .

3.1. Изменение полей концентраций и потенциала

Профили концентраций катионов и анионов в области у входа в канал имеют плато, ширина которого уменьшается с удалением от входа. Далее по каналу диффузионные слои смыкаются и профили концентраций принимают форму параболы по ширине канала, за исключением узких областей смежных с мембранами.

При $d_\varphi = -0,1$ В (рис. 1а) концентрация катионов практически линейно убывает начиная от ядра потока в сторону мембран и только в окрестности катионообменной мембраны увеличивается и удовлетворяет граничному условию (2.6), при этом можно наблюдать практически линейное уменьшение концентрации анионов до нуля от ядра потока в сторону катионообменной мембраны (рис. 1б). Аналогичные закономерности, но менее выраженные, наблюдаются и в окрестности анионообменной мембраны, естественно с заменой анионов на катионы. Расчеты показывают, что поле электрического потенциала и линии тока жидкости практически не возмущены, течение является безвихревым. Такое поведение концентраций качественно соответствуют допредельному и предельному режимам.

При $d_\varphi = -0,3$ В (рис. 1в) значения концентрации катионов, оставаясь близкими к предыдущему случаю, уже уменьшаются почти до нуля. Заметим, что при этом графики анионов и потенциала электрического тока аналогичны предыдущему случаю (рис. 1г).

При $d_\varphi = -0,5$ В вблизи катионообменной мембраны образуется множество вихрей, которые занимают всю область диффузионного слоя, прилегающей к катионообменной мембране, графики катионов (рис. 1д) и анионов (рис. 1е), электрического потенциала имеют периодические искривления, связанные с периодической структурой течения раствора.

3.2. Изменение поля скоростей при увеличении скачка потенциала

Проведено исследование динамики возникновения вихревого движения раствора во времени при $d_\varphi = -0,5$ В, показывающее, что

вначале (приблизительно до 13 с) происходит накопление искривлений течения раствора, которое в некоторый момент приводит к возникновению нескольких вихрей на выходе.

Затем эти вихри увеличиваются в размерах, продолжая возмущать окружающий мембрану раствор. С течением времени область завихренности растет вдоль границы с мембраной в направлении от выхода к входу канала и при $t \approx 20$ занимает приблизительно $3/4$ длины канала. В дальнейшем размеры вихрей увеличиваются, затем течение раствора стабилизируется и при $t \approx 25$ с выходит на стационарный режим.

3.3. Изменение поля скоростей при увеличении скорости прокачки раствора

Рассмотрим закономерности изменения электрохимических и гидродинамических полей при увеличении величины линейной скорости вынужденного течения раствора.

При скоростях $V_0 = 10^{-2}$ м/с и $V_0 = 10^{-3}$ м/с линии тока жидкости во всем канале практически не искривлены, при $V_0 = 10^{-4}$ м/с вихревая область охватывает примерно 10% канала. При $V_0 = 10^{-5}$ м/с вихревая область охватывает примерно 30% канала, выходя далеко за пределы диффузионного слоя. Как указывалось выше, в [7–13] моделирование электроконвекции проводилось в диффузионном слое. Моделирование электроконвекции в канале в этом случае является более адекватным.

При возникновении электроконвекции течение в КО ЭДА становится несимметрично, поскольку электроконвекция возникает только у катионообменной мембраны. Очевидно, это связано с различием значений коэффициентов диффузии для катионов и анионов. В рассматриваемом случае для раствора NaCl они различаются почти в 2 раза. Если вместо раствора NaCl исследовать раствор KCl, получим практически симметричные течения около мембран, поскольку коэффициенты диффузии катионов и анионов в данном случае практически равны.

3.4. Зависимость средней плотности тока от времени

Средняя плотность тока при линейной скорости прокачивания раствора $V_0 = 10^{-4}$ м/с и разности потенциалов от

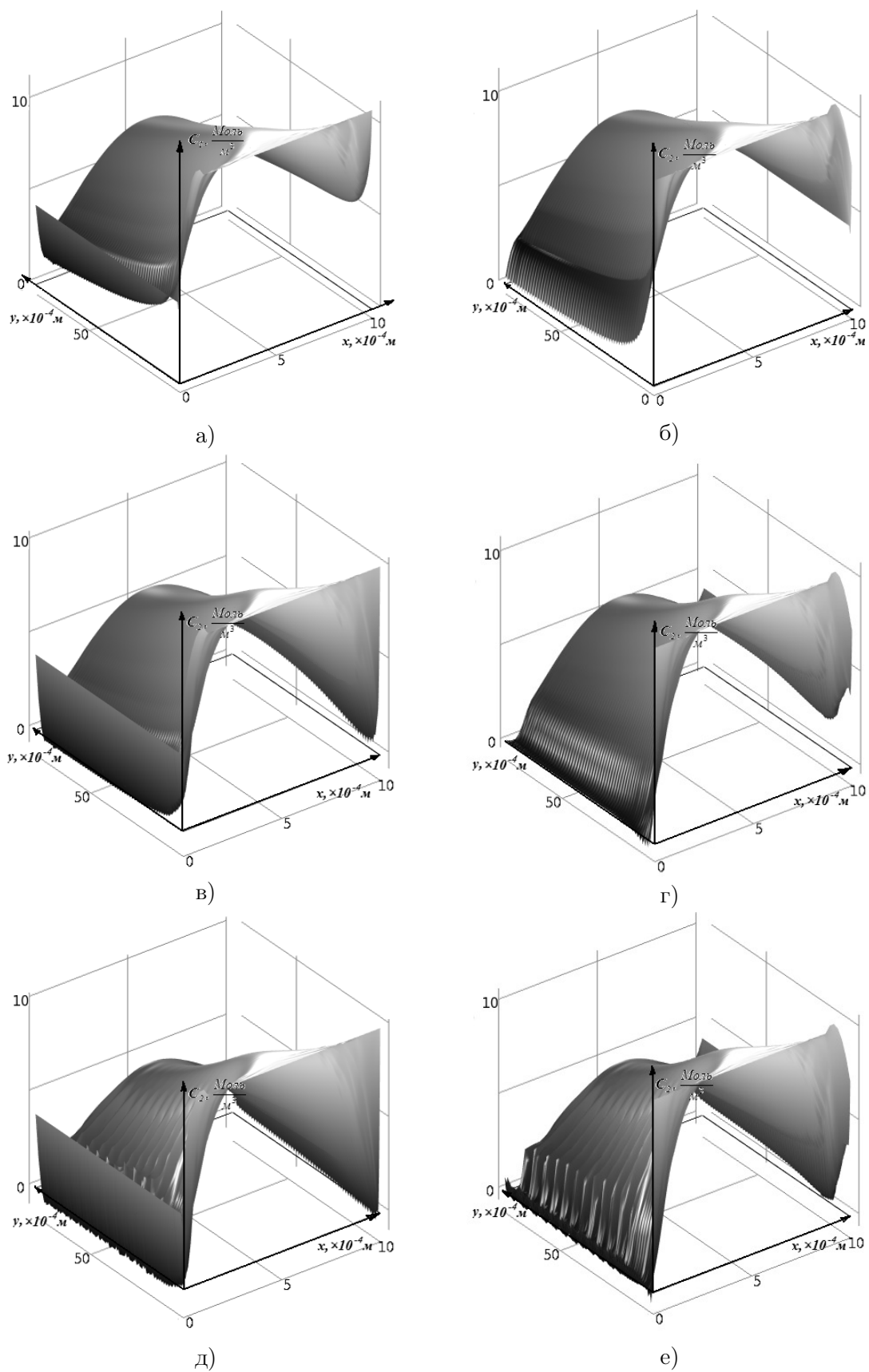


Рис. 1. Поля концентраций катионов в КО ЭДА, рассчитанные спустя 100 с с момента включения электрического тока при скорости прокачивания раствора $V_0 = 10^{-4}$ м/с и скачке потенциала: а) $d_\varphi = -0,1$ В, в) $d_\varphi = -0,3$ В, д) $d_\varphi = -0,5$ В, и поля концентрации анионов при б) $d_\varphi = -0,1$ В, г) $d_\varphi = -0,3$ В, е) $d_\varphi = -0,5$ В

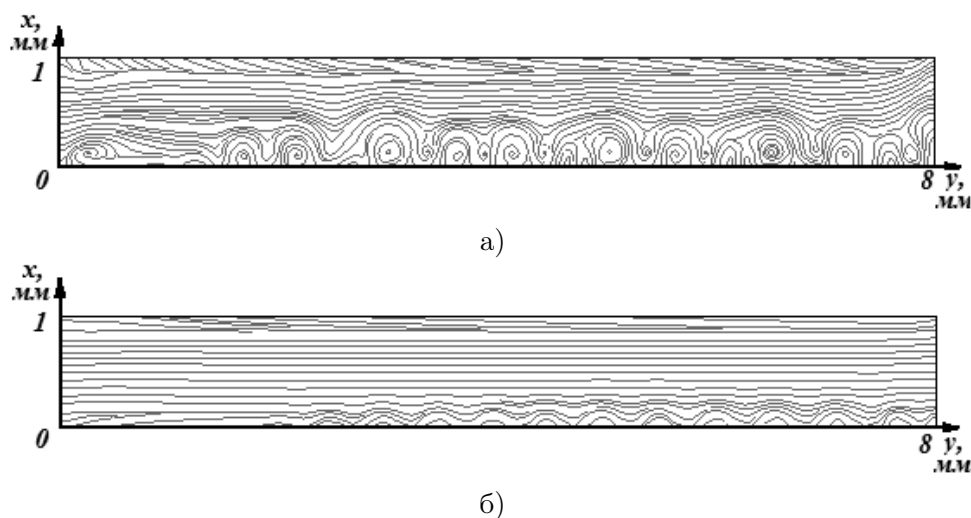


Рис. 2. Линии тока жидкости в рассматриваемой области при скачке потенциала $d\varphi = -0,5$ В и значениях скорости прокачивания раствора а) $V_0 = 10^{-5}$ м/с, б) $V_0 = 10^{-4}$ м/с

0,1 В и до 0,3 В монотонно убывает с течением времени (электроконвекция отсутствует), что обусловлено истощением концентрации ионов вследствие диффузии через мембраны. В некоторый момент устанавливается стационарное значение, когда наступает равновесие между поступлением свежего электролита и его истощением.

Однако с появлением электроконвективных вихрей зависимость средней плотности тока от времени усложняется.

При скачке в 0,4 В наблюдается небольшое увеличение тока начиная с 75 с, связанное с появлением электроконвекции.

При скачке потенциала в 0,5 В и более в канале наблюдается развитая область завихренности и средняя плотность тока колеблется, но при этом сохраняется тенденция к уменьшению средней плотности тока.

3.5. Изменение концентрации с течением времени

Рассмотрим изменение концентрации с течением времени в точках вдоль середины КО ЭДА с координатами 1 — (0,0005, 0); 2 — (0,0005, 0,001); 3 — (0,0005, 0,002); 4 — (0,0005, 0,003); 5 — (0,0005, 0,004); 6 — (0,0005, 0,005); 7 — (0,0005, 0,006); 8 — (0,0005, 0,007); 9 — (0,0005, 0,008) (все значения даны в метрах).

Из рис. 4 видно, что время установления стационарного значения концентраций катионов и анионов зависит от расположения вдоль оси Oy (длины канала). Чем дальше

точка от входа в канал, тем медленнее устанавливается постоянное значение. В точке 9 на выходе из канала величина концентрации колеблется, так как попадает в область влияния вихрей.

3.6. Зависимость толщины диффузионного слоя от разности потенциалов и скорости вынужденного течения

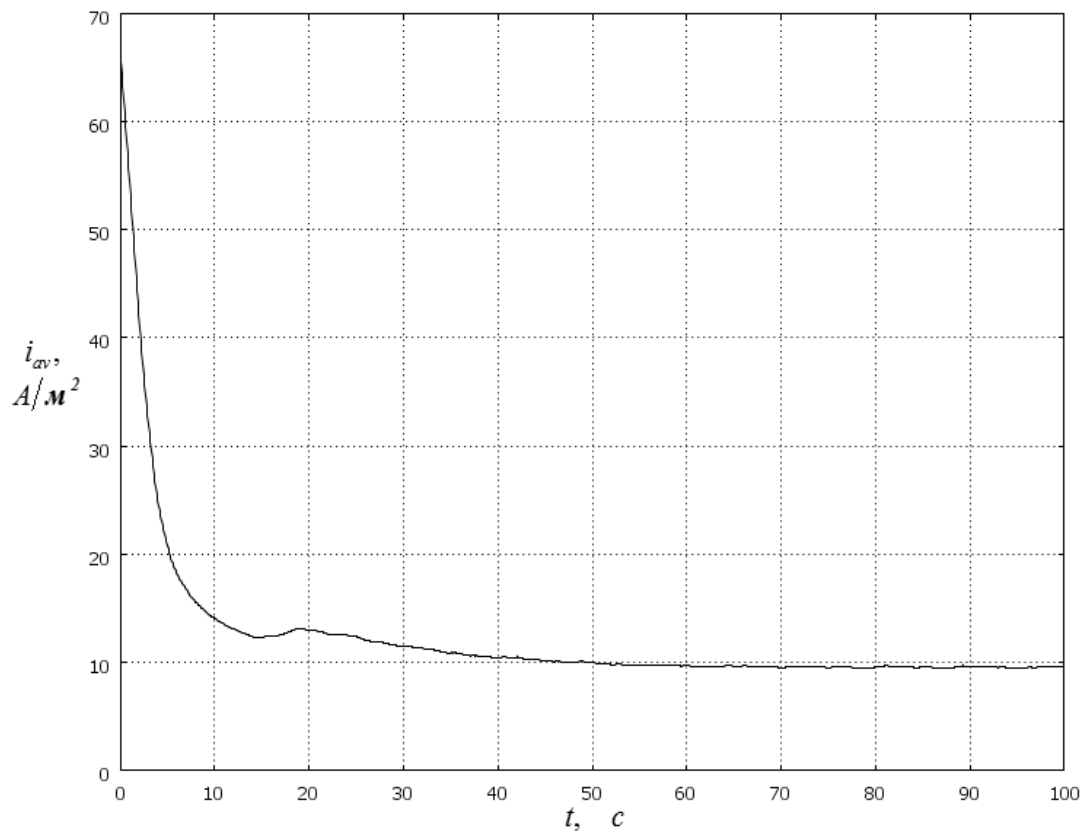
Существуют различные методы расчета толщины диффузионного слоя [16]. В целях автоматизации определения толщины диффузионного слоя в работе использовался следующий упрощенный метод — внешняя граница диффузионного слоя определялась по точке, в которой концентрация меняется на 1 % процент от своего начального значения.

Ниже представлены результаты проведенного исследования зависимости толщины диффузионного слоя от края мембраны при различных значениях скачка потенциала (рис. 5).

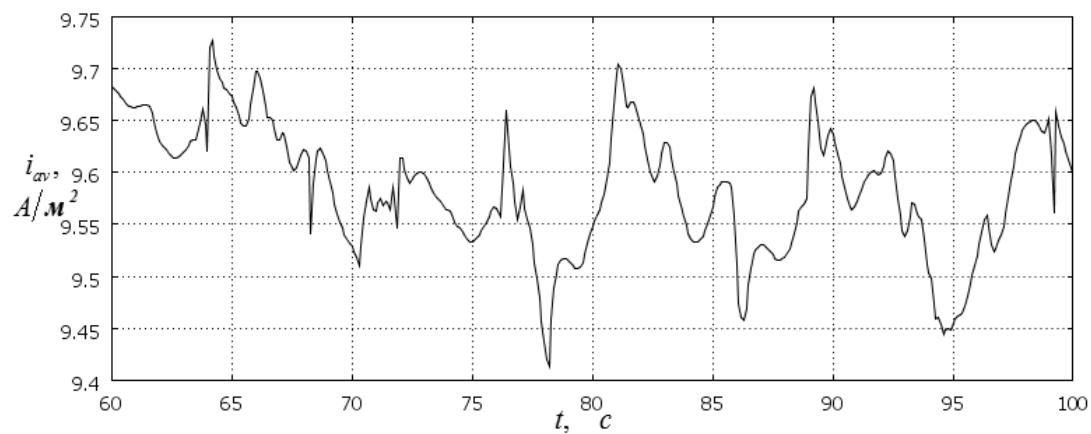
Толщина диффузионного слоя монотонно зависит от скорости вынужденного течения (рис. 6). Небольшой изгиб кривой при $V_0 = 10^{-3}$ м/с связан с тем, что для этой скорости при $d\varphi = -0,5$ начинается образование электроконвективных вихрей на расстоянии $2 \cdot 10^{-4}$ м от начала канала.

3.7. Вольтамперная характеристика

Для построения вольтамперной кривой примем за среднее значение плотности электрического тока следующую величину:

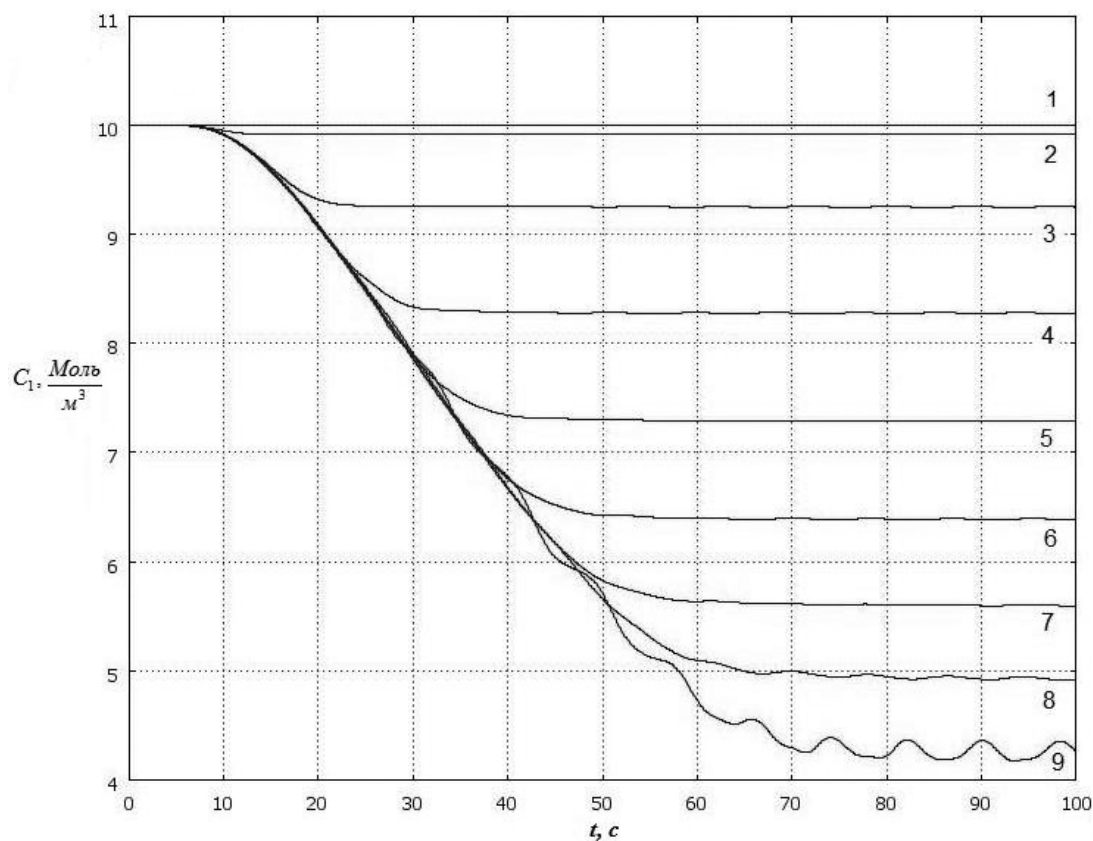


а)

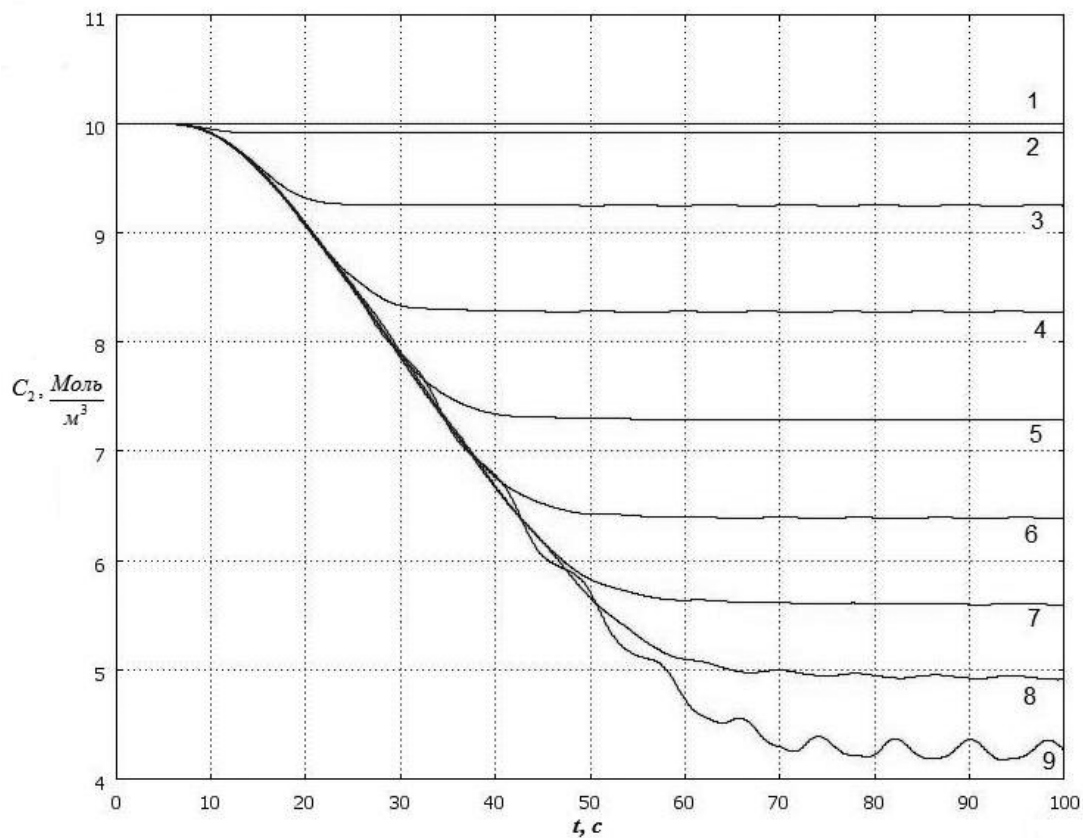


б)

Рис. 3. Изменение средней плотности тока с течением времени. Результаты при линейной скорости прокачивания раствора $V_0 = 10^{-4}$ м/с и разности потенциалов $d_\varphi = -0,5$ В; а) результаты для 100 секунд с момента включения тока, б) результаты с 60 по 100 секунд с момента включения тока



а)



б)

Рис. 4. Изменение концентрации катионов (а) и анионов (б) с течением времени в точках 1-9 при скорости прокачивания раствора $V_0 = 10^{-4}$ м/с и разности потенциалов $d\varphi = -0,5$ В

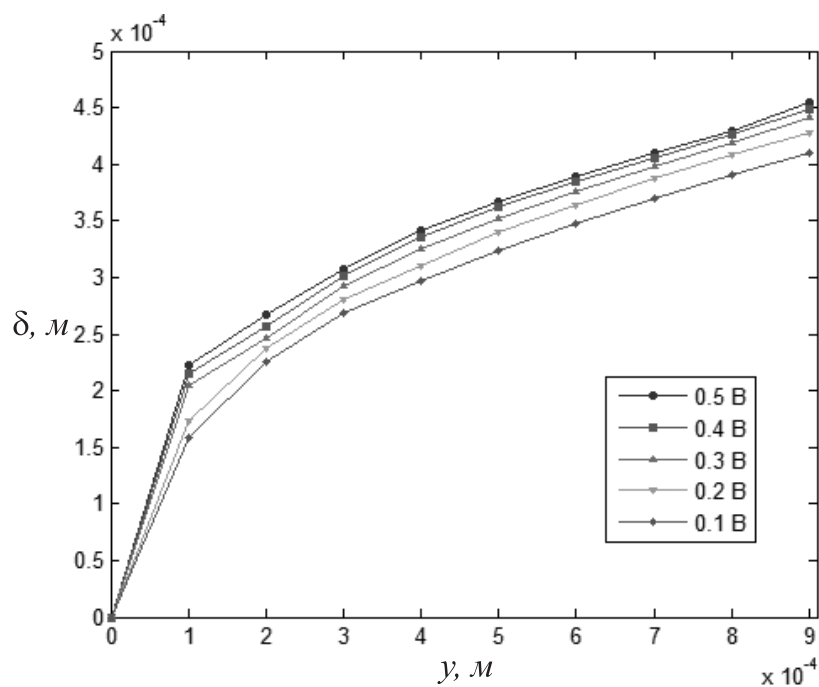


Рис. 5. Зависимость толщины диффузионного слоя δ от расстояния от края мембраны при различных значениях разности потенциалов ($-d_\varphi$), $t = 100$ с, $V_0 = 10^{-4}$ м/с

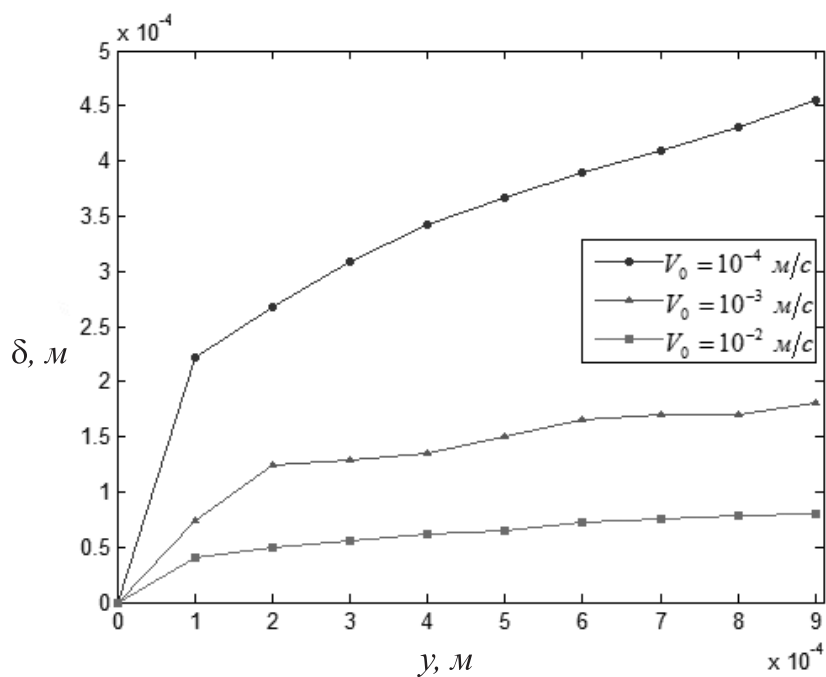


Рис. 6. Зависимость толщины диффузионного слоя δ от расстояния от края мембраны при скачке потенциалов $d_\varphi = -0,5$ В и различных значениях скорости вынужденного течения $V_0 = 10^{-4}$ м/с, $V_0 = 10^{-3}$ м/с, $V_0 = 10^{-2}$ м/с, $t = 100$ с

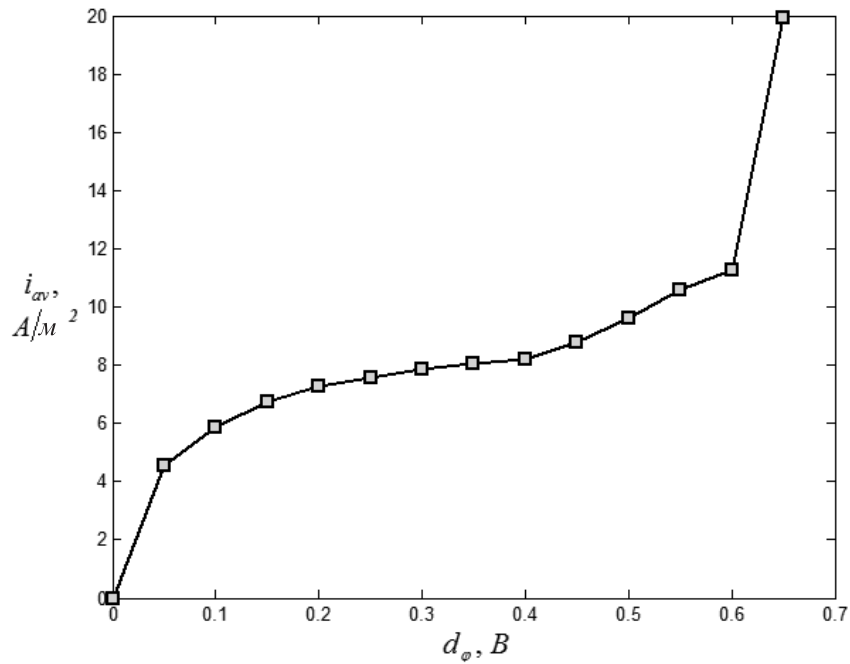


Рис. 7. Вольтамперная кривая, $t = 100c$, $V_0 = 10^{-4}$ м/с

$$i_{av} = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L i_x(x, y) dx dy. \quad (3.1)$$

Рассчитанная вольтамперная кривая имеет классический вид (рис. 7), а именно, на графике вольтамперной характеристики можно выделить три области: начальный участок (допределный режим — ток возрастает с ростом разности потенциалов), плато (пределный режим — рост разности потенциалов приводит к незначительному увеличению тока), сверхпределный режим (ток быстро возрастает с ростом напряжения). В данной модели сверхпределный режим объясняется появлением электроконвективного вихревого движения (рис. 2), поскольку электроконвективные вихри обеспечивают доставку раствора из ядра потока к границе мембрана/раствор, что приводит к дополнительному переносу ионов, т.е. к интенсификации массопереноса.

Сопоставление полученных результатов с результатами численных расчетов и экспериментов из работ [6, 8] показывает их совпадение на качественном уровне.

Заключение

Проведенные расчеты показывают, что скорость скольжения, рассчитанная по фор-

муле Рубинштейна и Зальцмана, намного меньше скорости вынужденного течения раствора, реально применяемого на практике, поэтому не оказывает существенного влияния на исследуемые процессы. Следовательно используемый ими подход не применим для моделирования электроконвекции при наличии вынужденной конвекции. Тем не менее, и при наличии вынужденной конвекции действие электрического поля на пространственный заряд, образующийся при сверхпределных токах в диффузионном слое, примыкающем к мембране, приводит к образованию парных периодических вихрей, по структуре схожих с вихревым течением, рассчитанным Рубинштейном и Зальцманом, т.е. к возникновению электроконвекции.

При наличии вынужденной конвекции электроконвекция характеризуется следующими свойствами:

- возникает в слое раствора при истощении концентрации катионов соли при предельной плотности тока при некотором соотношении между падением потенциала и скорости вынужденного течения. При увеличении скорости вынужденного течения электроконвекция возникает при больших падениях потенциала (по абсолютной величине), и, наоборот, при уменьшении скорости вынужденного течения электроконвекция возникает при меньшем падении потенциала;

– процесс возникновения, развития и стабилизация структуры вихревого движения происходит достаточно быстро;

– при возникновении электроконвекции течение в КО ЭДА становится несимметричным, поскольку электроконвекция возникает в первую очередь у катионообменной мембраны, что связано с различием значений коэффициентов диффузии катионов и анионов;

– несмотря на наличие вынужденного течения, электроконвекция обеспечивает доставку раствора из ядра потока к границе мембрана/раствор, что приводит к дополнительному переносу ионов, т.е. к интенсификации массопереноса;

– вольтамперная кривая имеет классический вид с начальным участком, плато, участком сверхпредельных значений плотности тока. Появление сверхпредельного режима в данной модели обусловлено возникновением и развитием электроконвективного вихревого движения.

Литература

1. *Mishchuk N.* Concentration polarization of interface and non-linear electrokinetic phenomena // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2010. Vol. 160. No. 1–2. P. 16–39.
2. *Nikonenko V., Pismenskaya N., Belova E., Sistat Ph., Larchet Ch., Pourcelly G.* Intensive current transfer in membrane systems: Modelling, mechanisms and application in electrodialysis // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2010. Vol. 160. P. 101–123.
3. *Kim S.-J., Ko S.-H., Kang K.H., Han J.* Direct Seawater Desalination by Ion Concentration Polarization // *Nature Nanotech.* 2010. Vol. 5. P. 297–301.
4. *Mishchuk N., Trond H., Tormod V., Janko A., Helmut K.* Micropump based on electroosmosis of the second kind // *Electrophoresis.* 2009. Vol. 30. P. 3499–3506.
5. *Tallarek U., Leinweber F., Nischang I.* Perspective on concentration polarization effects in electrochromatographic separations // *Electrophoresis.* 2005. Vol. 26. P. 391–404.
6. *Rubinshtein I.* Theory of concentration polarization effects in electrodialysis on counter-ion selectivity of ion-exchange membranes with differing counter-ion distribution coefficients // *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 1990. Vol. 86. No. 10. P. 1857–1861.
7. *Уртенев М. Х.* Краевые задачи для системы уравнений Нернста–Планка–Пуассона (факторизация, декомпозиция, модели, численный анализ). Краснодар: КубГУ, 1998. 140 с.
8. *Рубинштейн И., Зальцман Б., Прец И., Линдер К.* Экспериментальная проверка электроосмотического механизма формирования «запредельного» тока в системе с катионообменной электродиализной мембраной // *Электрохимия.* 2002. Т. 38, № 8. С. 956–967.
9. *Rubinshtein I., Maletzki F.* Electroconvection at an electrically inhomogeneous permselective membran surface // *J. Chem. Soc., Faraday Trans. II.* 1991. Vol. 87. No. 13. P. 2079–2087.
10. *Rubinstein I., Zaltzman B.* Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. No. 2. P. 2238–2251.
11. *Rubinstein I., Zaltzman B.* Electro-osmotic slip of the second kind and instability in concentration polarization at electrodialysis membranes // *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 2001. Vol. 11. P. 263–299.
12. *Rubinstein I., Zaltzman B.* Electro-osmotic slip and electroconvective instability // *J. Fluid Mech.* 2007. Vol. 579. P. 173–226.
13. *Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенев М. Х.* Моделирование электроконвекции в электромембранной системе при наличии вынужденной конвекции // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2011. № 1. С. 77–83.
14. *Ньюман Дж.* Электрохимические системы, М.: Мир, 1977. 463 с.
15. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика, М.: Мир, 1980. 616 с.
16. *Заболоцкий В. И., Никоненко В. В.* Перенос ионов в мембранах. М.: Наука, 1996. 392 с.

Ключевые слова: математическое моделирование, электроконвекция, электродиализный аппарат, электромембранные системы, камера обессоливания.

Статья поступила 23 августа 2011 г.

Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, г. Черкесск

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Узденова А. М., Коваленко А. В., Никоненко В. В., Уртенев М. Х., 2011