УДК 531

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ[1]

Г. Ф. Копытов[2], ***Т. Г. Митрофанова***[3], ***В. Я. Эпп***[4]

INVERSE PROBLEM FOR A POINT CHARGE FIELD, ELECTRIC AND MAGNETIC DIPOLE MOMENTS

Kopytov G. F., Mitrofanova T. G., Epp V. Ya.

The work offers the solution of the inverse electrostatics problem. At some point in the space, the field is known, which is created by a pointed charge and electric and magnetic dipole moments integrated with the former. At this point the tensors of first-order derivatives from the intensity of electric and magnetic fields are known by the coordinates. The coordinates and values of the charge and dipole moments have been determined. The results obtained can be applied to nondestructive diagnostics of charge distribution in dielectric and low-conductivity substances, living organisms.

1. Формулировка задачи

Обратные задачи, несмотря на свою сложность, имеют важное теоретическое и прикладное значение. Под обратной задачей электродинамики понимается задача определения координат зарядов и их динамики по известному полю, которое они создают. Подавляющее большинство работ, посвященных решению обратных задач электродинамики, относятся к задачам радиолокации [1]. Частным случаем обратной задачи электродинамики в сформулированной выше форме является обратная задача излучения, которая состоит в том, что по известному полю излучения определяется динамика заряда, создающего это излучение. Задачи такого типа решались в работах [2–5]. Обратная задача для электростатического поля, созданного зарядом и дипольным электрическим моментом решена в работах [6–8]. В настоящей работе впервые решена обратная задача для статических электрического и магнитного полей.

Очевидно, что решение обратной задачи электродинамики в неоднородном пространстве существенно зависит от формы границ между средами, от области, в которой задано электромагнитное поле, и т.д.

Если известно электромагнитное поле произвольной системы зарядов и токов в некоторой точке однородного пространства и все производные поля в этой точке, то можно восстановить поле во всем пространстве, используя разложение в ряд Тейлора аналитических функций. Далее, уравнения Максвелла позволяют непосредственно вычислить плотности зарядов $\rho(\mathbf{r})$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ как функции координат

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — напряженности электрического и магнитного полей.

На практике можно измерить значение поля и нескольких первых производных с некоторой погрешностью. Это означает, что

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ–125–2003.2).

[2]Копытов Геннадий Филиппович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой радиофизики и радиоэкологии Кубанского государственного университета.

[3]Митрофанова Татьяна Геннадьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики Томского государственного педагогического университета.

[4]Эпп Владимир Яковлевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики, проректор по учебной работе Томского государственного педагогического университета.

можно восстановить распределение зарядов и токов с определенной погрешностью в ближайшей окрестности рассматриваемой точки. Но с точки зрения практических приложений гораздо больший интерес представляет такая постановка задачи, при которой известно поле вдали от зарядов и токов и требуется восстановить плотности этих зарядов и токов. Для того чтобы использовать описанный выше метод, требуется знание производных вплоть до очень высокого порядка с достаточно большой точностью. Существует, однако, другой подход, основанный на мультипольном разложении полей, позволяющий приближенно восстановить распределение зарядов и токов вдали от точки, в которой известно значение поля и его первых производных, если заряды и токи сосредоточены в области, размеры которой малы в сравнении с расстоянием между этой областью и наблюдателем.

Предположим, что известны напряженности стационарных электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и магнитного $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ полей в некоторой точке вдали от системы зарядов и токов, а также первые производные от этих векторов по координатам $\mathbf{E}_{ij} = \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)$ и $\mathbf{H}_{ij} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\right)$, $(i, j = 1, 2, 3)$.

Требуется найти величину заряда q системы, ее электрический $\mathbf{d}$ и магнитный $\mathbf{m}$ моменты. Для этого используем известные выражения для полей в дипольном приближении [9]

$$\mathbf{E} = -\frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{rd})\mathbf{r} - r^2\mathbf{d}}{r^5}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{rm})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.2}$$

Начало координат совпадает с положением наблюдателя, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор удаленной системы. Дифференцируя выражения (1.1)–(1.2) по координатам x_i, найдем

$$E_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \left[-\frac{q}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{rd})}{r^5}\right]\delta_{ij} + 3\frac{d_j x_i + d_i x_j}{r^5} + 3x_i x_j\left[\frac{q}{r^5} - 5\frac{(\mathbf{rd})}{r^7}\right], \tag{1.3}$$

$$H_{ij} = \frac{\partial H_i}{\partial x_j} = 3\frac{(\mathbf{rm})}{r^5}\delta_{ij} + 3\frac{m_j x_i + m_i x_j}{r^5} - 15 x_i x_j \frac{(\mathbf{rm})}{r^7}, \tag{1.4}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Из уравнений (1.3)–(1.4) видно, что трехмерные тензоры $\mathbf{E}_{ij}$ и $\mathbf{H}_{ij}$ являются симметричными. Это следует и из уравнений Максвелла для точки, в которой находится наблюдатель $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$. Действительно,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = (E_{23} - E_{32}; E_{31} - E_{13}; E_{12} - E_{21}),$$

откуда следует равенство $E_{ij} = E_{ji}$. Кроме того, из других уравнений Максвелла следует, что $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, т.е.

$$E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0. \tag{1.5}$$

$$H_{11} + H_{22} + H_{33} = 0. \tag{1.6}$$

Можно рассматривать выражения (1.1)–(1.4) как систему уравнений для q, $\mathbf{r}$, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{m}$ — всего 10 скалярных величин. Между тем, система уравнений (1.1)–(1.4) с учетом симметрии тензоров $\mathbf{E}_{ij}$ и $\mathbf{H}_{ij}$ и условий (1.5), (1.6) содержит 16 уравнений. Это позволяет сформулировать обратную задачу в более общем виде, а именно, считать, что электрическое и магнитное поля создаются разными системами зарядов и токов. Обозначим через $\mathbf{r}_q$ радиус-вектор удаленной системы зарядов с суммарным зарядом q и электрическим дипольным моментом $\mathbf{d}$, а через $\mathbf{r}_m$ — радиус-вектор системы токов с магнитным моментом $\mathbf{m}$. Тогда система уравнений (1.1)–(1.6) распадется на две независимые системы: (1.1), (1.3), (1.5), в которой $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_q$ и (1.2), (1.4), (1.6), в которой $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_m$. В результате решения этих систем можно получить $\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_m$, т.е., электрическое и магнитное поля создаются одной и той же системой зарядов и токов.

Заметим, что при вычислении поля на больших расстояниях от системы зарядов можно ограничиться первыми членами мультипольного разложения. Критерием точности такого представления является малый параметр, равный отношению размеров системы зарядов к расстоянию между системой и наблюдателем. При решении обратной задачи в изложенной формулировке находятся только координаты центра тяжести системы зарядов, но размеры этой системы остаются неизвестными. Для оценки точности полученного решения необходимо оценить размеры системы каким-то независимым способом. Например, решить обратную задачу для поля в других точках и определить разброс полученных решений. Можно также исследовать поле в окрестности наблюдателя с целью выяснить, имеет ли оно дипольный характер. Задачи такого типа в данной работе не рассматриваются. Чтобы исключить вопрос о точности полученного решения, будем считать, что имеем дело с точечным магнитным моментом или точечным зарядом, совмещенным с дипольным электрическим моментом.

2. Поле точечного заряда и электрического дипольного момента

Решим уравнения (1.1) и (1.3) относительно $\mathbf{r}$, $\mathbf{d}$ и q в следующей системе координат. Начало системы координат поместим в точку, где задано поле, ось x направим по вектору $\mathbf{E}$, а ось y — по направлению главной нормали $\mathbf{n}$ к силовой линии электрического поля [10]

$$\mathbf{n} = \frac{1}{kE}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s}.$$

Здесь k — кривизна силовой линии, ∂s — перемещение вдоль силовой линии. После несложных алгебраических преобразований получим

$$\mathbf{n} = \frac{1}{kE^4}\left\{\mathbf{D}\left(\mathbf{EE}\right) - \mathbf{E}\left(\mathbf{ED}\right)\right\},$$

где вектор $\mathbf{D} = (\mathbf{E}\nabla)\,\mathbf{E}$, а его компоненты $D_i = E_k E_{ik}$. Проекции вектора $\mathbf{n}$ на оси произвольной ортогональной системы координат

$$n_i = \frac{1}{kE^4}\left(E_k E_{ik} E_j E_j - E_i E_j E_k E_{jk}\right) = \\ = \frac{1}{kE^4} E_k E_j \left(E_j E_{ik} - E_i E_{jk}\right).$$

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{n} = \frac{1}{kE}\left\{0, E_{12}, 0\right\}, \quad E_{12} \geqslant 0.$$

Из уравнения (1.1) видно, что векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{r}$ лежат в одной плоскости, поэтому задача сводится к двумерной. При этом $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{d} = (d_x, d_y, 0)$, $E_{23} = 0$, что является следствием аксиальной симметрии поля относительно вектора $\mathbf{d}$. Таким образом, известно пять функций координат: E_x, E_y, E_{11}, E_{12}, E_{33}, которые позволяют найти пять неизвестных: q, d_x, d_y, x, y.

Уравнения (1.1) и (1.3) в плоскости (x, y) принимают вид

$$E = \frac{qx}{r^3} + \frac{3\left(\mathbf{rd}\right)x - r^2 d_x}{r^5}, \quad E = |\mathbf{E}|, \tag{2.1}$$

$$0 = \frac{qy}{r^3} + \frac{3\left(\mathbf{rd}\right)y - r^2 d_y}{r^5}, \tag{2.2}$$

$$E_{11} = \frac{q}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{rd})}{r^5} - 6\frac{d_x x}{r^5} - \\ - 3x^2\left[\frac{q}{r^5} - 5\frac{(\mathbf{rd})}{r^7}\right], \tag{2.3}$$

$$E_{12} = -3\frac{d_x y + d_y x}{r^5} - \\ - 3xy\left[\frac{q}{r^5} - 5\frac{(\mathbf{rd})}{r^7}\right], \tag{2.4}$$

$$E_{33} = \frac{q}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{rd})}{r^5}. \tag{2.5}$$

Решение полученной системы уравнений

$$q = \left(E_{33} + 3\frac{(\mathbf{rd})}{r^5}\right) r^3, \quad r \neq 0, \tag{2.6}$$

$$d_x = -r^3\left(E + E_{33}x\right), \quad d_y = -r^3 y E_{33}, \tag{2.7}$$

$$x = \frac{3E}{B}\left[F_3 \pm \frac{E_{12}\left(F_1 - F_2\right)}{S}\right], \tag{2.8}$$

$$y = \frac{3E}{B}\left[2E_{12} \pm \frac{2E_{12}^2 - F_1 F_3}{S}\right], \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$F_1 = E_{22} - E_{33}, \quad F_2 = E_{33} - E_{11},$$

$$F_3 = E_{11} - E_{22},$$

$$S = \sqrt{E_{12}^2 + F_1 F_2}, \quad B = 4E_{12}^2 + F_3^2.$$

С учетом соотношений (2.8), (2.9) из (2.7) определим

$$d_x = \mu E^{10} E_{12}\left(F_1^2 + \left(-E_{12} \pm S\right)^2 \mp 2F_1^2 S\right) \times \\ \times 27 F_1^3 R^{-1},$$

$$d_y = \pm 81 E^4 F_1^5 E_{33} R^{-1}.$$

$$R = S^4\left(F_1^2 + \left(-E_{12} \pm S\right)^2\right)^{5/2}$$

Наличие в формулах знака $\pm$ указывает на существование двух различных решений исходной системы (2.1)–(2.5). Физически это означает, что одно и то же поле с его производными в данной точке может быть создано двумя разными источниками, находящимися в разных точках пространства относительно наблюдателя.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $F_1 = 0$, тогда $F_2 = 3E_{33}$ и $F_3 = -3E_{33}$. Из уравнений (2.6)–(2.9) получим

$$x_1 = -\frac{18EE_{33}}{A}, \quad y_1 = \frac{12EE_{12}}{A},$$

$$d_x = \frac{6^3E^4\left(9E_{33}^2 - 4E_{12}^2\right)}{A^{5/2}},$$

$$d_y = -2\frac{6^4E^4E_{12}E_{33}}{A^{5/2}},$$

$$q = -4\frac{27E^3E_{33}}{A^{3/2}}.$$

Здесь $A = 4E_{12}^2 + 9E_{33}^2$.

Тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$ следует исключить, так как оно не удовлетворяет исходной системе уравнений (2.1)–(2.5): все компоненты тензора $\mathbf{E}_{ij}$ и вектора $\mathbf{E}$ обращаются в бесконечность.

2. В случае $F_2 = 0$ имеем два решения для координат частицы

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{3E}{E_{12}};$$

$$x_2 = \frac{18EE_{11}}{C}, \quad y_2 = -\frac{27EE_{11}^2}{E_{12}C};$$

$$C = 4E_{12}^2 + 9E_{11}^2.$$

Соответственно для дипольного момента и заряда

$$d_{x1} = -\frac{27E^4}{E_{12}^3}, \quad d_{y1} = -\frac{81E^4E_{11}}{E_{12}^4},$$

$$q_1 = -2\frac{27E^3E_{11}}{E_{12}^3},$$

$$d_{x2} = -\frac{3^6E^4E_{11}^3\left(4E_{12}^2 + 27E_{11}^2\right)}{E_{12}^3C^{5/2}},$$

$$d_{y2} = \frac{3^9E^4E_{11}^5|E_{11}|}{E_{12}^4C^5/2},$$

$$q_2 = -2\frac{3^5E^3E_{11}|E_{11}|\left(E_{12}^2 + 3E_{11}^2\right)}{E_{12}^3C^{3/2}}.$$

3. Если $F_3 = 0$, то $S = \sqrt{E_{12}^2 - 9E_{11}^2}$. Решение имеет вид

$$x = \pm\frac{9EE_{11}}{2E_{12}S}, \quad y = \frac{3E}{2E_{12}}\left(1 \pm \frac{E_{12}}{S}\right),$$

$$d_x = \frac{27E^4\left(E_{12} \pm S\right)^{3/2}}{2^{3/2}E_{12}^{5/2}S^4}\left(-E_{12}S \pm 9E_{11}^2\right),$$

$$d_y = \pm\frac{81E^4E_{11}}{2^{3/2}S^4}\left(1 \pm \frac{S}{E_{12}}\right)^{5/2},$$

$$q = \frac{27E^3E_{11}\left(E_{12} \pm S\right)^{1/2}\left(4E_{12} \pm S\right)}{2^{3/2}E_{12}^{3/2}S^3}.$$

3. Поле точечного магнитного момента

Чтобы найти координаты и магнитный момент частицы, создающей магнитное поле, решим систему уравнений (1.2), (1.4). Для этого направим ось x по вектору $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, а ось y по нормали к силовой линии магнитного поля. Повторяя рассуждения предыдущего раздела, получим систему уравнений:

$$H = \frac{3\left(\mathbf{rm}\right)x - r^2m_x}{r^5}, \tag{3.1}$$

$$0 = \frac{3\left(\mathbf{rm}\right)y - r^2m_y}{r^5}, \tag{3.2}$$

$$H_{11} = -3\frac{(\mathbf{rm})}{r^5} - 6\frac{m_xx}{r^5} + 15x^2\frac{(\mathbf{rm})}{r^7}, \tag{3.3}$$

$$H_{12} = -3\frac{m_xy + m_yx}{r^5} + 15\frac{(\mathbf{rm})}{r^7}, \tag{3.4}$$

$$H_{33} = -3\frac{(\mathbf{rm})}{r^5}. \tag{3.5}$$

Имеем 5 уравнений относительно 4 неизвестных. Следовательно, система уравнений (3.1)–(3.5) переопределена. Уравнение связи между компонентами тензора $\mathbf{H}_{ij}$ будет найдено позднее. Решением полученной системы уравнений в предположении, что $H_{33} \neq 0$, является

$$x = -\frac{3H\left(3H_{33} + H_{11}\right)}{2H_{33}^2},$$

$$y = -\frac{3HH_{12}\left(3H_{33} + H_{11}\right)}{2H_{33}^2\left(H_{11} + 5H_{33}\right)},$$

$$m_x = \frac{1}{3}\left(\frac{3H}{2H_{33}}\right)^4\left(7H_{33} + 3H_{11}\right) \times$$
$$\times\left(\frac{3H_{33} + H_{11}}{H_{33}}\right)^{3/2}, \tag{3.6}$$

$$m_y = H_{12}\left(\frac{3H}{2H_{33}}\right)^4 \frac{3H_{33}+H_{11}}{H_{11}+5H_{33}}\times \times\left(\frac{3H_{33}+H_{11}}{H_{33}}\right)^{3/2}.$$

Отметим, что

$$r^2 = \frac{9H^2\left(3H_{33}+H_{11}\right)}{4H_{33}^3}.$$

Рассмотрим случай $H_{33} = 0$. Из уравнения (3.5) сразу следует, что $(\mathbf{rm}) = 0$. Тогда система (3.1)–(3.5) упрощается

$$H = -\frac{m_x}{r^3}, \quad 0 = m_y,$$

$$H_{11} = -6\frac{m_x x}{r^5}, \quad H_{12} = -3\frac{m_x y}{r^5}$$

и решение получим в виде

$$x = \frac{6HH_{11}}{H_{11}^2+4H_{12}^2}, \quad y = \frac{12HH_{12}}{H_{11}^2+4H_{12}^2},$$

$$m_x = -H\frac{(6H)^3}{(H_{11}^2+4H_{12}^2)^{3/2}}, \quad m_y = 0.$$

Условие $(\mathbf{rm}) = 0$ дает $m_x x = 0$. Учитывая, что $m_x \neq 0$, $H \neq 0$, получаем $x = 0$ и $H_{11} = 0$.

Итак, если $H_{33} = 0$, имеем следующее частное решение

$$x = 0, \quad y = 3\frac{H}{H_{12}}, \quad m_x = -27\frac{H^4}{H_{12}^3}, \quad m_y = 0.$$

Из (3.6) следует уравнение связи между компонентами тензора $\mathbf{H}_{ij}$

$$\frac{H_{33}}{3H_{33}+H_{11}} = 1 + \frac{H_{12}^2}{\left(H_{11}+5H_{33}\right)^2}. \qquad (3.7)$$

Если данное условие не выполняется, нельзя утверждать, что поле создается только магнитным моментом.

В заключение заметим следующее. Несмотря на то, что обратная задача сформулирована для точечной заряженной частицы, обладающей дипольными электрическим и магнитным моментами, практические приложения найденного решения вряд ли возможны для нахождения координат элементарной частицы, тем более обладающей электрическим дипольным моментом. Полученный результат скорее может быть использован для восстановления макроскопического распределения электрических зарядов по полю, создаваемому этими зарядами на значительных расстояниях, когда применимо мультипольное разложение. В частности, для неразрушающей диагностики распределения зарядов в диэлектрических или слабо проводящих телах, живых организмах.

Литература

1. Proceedings of Inter. Conf. of Math. Methods in Electromagnetic Theory “MMET-98”, Kharkov, Ukraine, 1998. 328 c.
2. *Моисеев М. Б., Никитин М. М., Федосов Н. И.* Изменение вида поляризации ондуляторного излучения // Изв. вузов. Физика. 1978. № 3. С. 76–79.
3. *Бессонов Е. Г., Серов А. В.* О формировании спектров электромагнитного излучения заданной формы, испускаемого при пролете релятивистских заряженных частиц во внешних магнитных полях // Препринт № 62. М.: ФИАН СССР, 1982. 18 с.
4. *Багров В. Г., Никитин М. М., Федосов Н. И., Эпп В. Я.* Формирование электромагнитного излучения заданного спектрального состава и поляризации // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. XXVII. № 10. С. 1287–1291.
5. Synchrotron Radiation Theory and Its Development / Ed. by V. A. Bordovitsyn. Singapore: World Scientific, 1999. 452 p.
6. *Митрофанова Т. Г., Эпп В. Я.* К обратной задаче электростатики дипольного момента // Квантовая теория поля и гравитация QFTG–97: Труды II Международной конференции. Томск: Изд-во ТГПУ, 1997. С. 286–290.
7. *Epp V. Ya., Mitrofanova T. G.* Solution of Inverse problem for a charge combined with a point-lake dipole // Proceedings of Inter. Conf. of Math. Methods in Electromagnetic Theory “MMET-98” Kharkov, Ukraine, 1998. P. 167–168.
8. *Митрофанова Т. Г., Эпп В. Я.* Обратная задача для поля заряда и точечного дипольного момента // Изв. вузов. Физика. № 7. 1999. С. 3–7.
9. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 458 с.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.

Статья поступила 11 сентября 2004 г.
Кубанский государственный университет