

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-3-33-39

УЧЕТ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ
ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА ПОВЕРХНОСТИ
ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ

Беляк О. А., Суворова Т. В.

ACCOUNTING FOR THE FRICTION IN THE CONTACT AREA WITH OSCILLATION
OF A RIGID PUNCH ON SURFACE A SEMI-INFINITE MEDIUM

O. A. Belyak, T. V. Suvorova

Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: o_bels@mail.ru

Abstract. The dynamic contact problem of oscillation of a rigid punch on a semi-infinite viscoelastic base is considered, moreover, friction in the contact area is taken into account. The base is provided with a microstructure which is determined in the framework of the micromechanics model. The problem is considered in a flat formulation for a steady-state oscillation regime. The base is modeled by a viscoelastic half-space. A rigid punch oscillates on the day surface of the elastic half-space. Normal and tangential stresses in the contact area are related by the Amonton-Coulomb law. Displacements satisfy the Lamé equations. The connection of displacements and stresses is given by the generalized Hooke's law. The solution of this boundary value problem is constructed using the Fourier transform, which is applied to the Lamé equations and boundary conditions. The base microstructure was taken into account in the framework of the micromechanics model. Mechanical characteristics corresponding to an equivalent elastic medium have been determined. The boundary-value problem is reduced to an integral equation of the first kind with a difference kernel. The numerical discretization of the integral equation is based on the collocation method. As a regularizer of the main part of the kernel, a function is used to isolate the logarithmic singularity, which coincides with it at infinity and has no singularities in the complex plane. As a result of discretization, the solution reduces to a finite system of equations with a quasi-diagonal matrix. The numerical analysis of the solution of the dynamic contact problem allowed us to draw the following conclusions. The change in contact stresses depending on the coefficient of friction in the contact region substantially depends on the oscillation frequency of the stamp. A significant effect on contact stresses is exerted by the coefficient of friction and the mechanical characteristics of the base material.

Keywords: dynamic contact problem, friction and oscillation in contact domain.

Введение

При создании новых композиционных материалов антифрикционного назначения актуальной и практически не исследованной является задача изучения влияния динамических эффектов, возникающих в трибосистеме при наличии осцилляции. В настоящей работе рассматривается динамическая контактная задача о колебаниях жесткого штампа на полугораниченном вязкоупругом основании, обладающем микроструктурой, при учете трения в области контакта. Микроструктура ос-

нования учтена в рамках модели микромеханики. Краевая задача с помощью преобразования Фурье сведена к интегральному уравнению первого рода, численная дискретизация которого осуществлена на основе метода коллокаций. Отметим, что контактные динамические задачи для упругих слоистых оснований исследованы в работах [1–3], контактные задачи в квазистатической постановке о движении системы штампов по упругим и вязкоупругим основаниям изучались в работах [4, 5], по гетерогенным пористоупругим основаниям — в работах [6–8].

Беляк Ольга Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: o_bels@mail.ru.

Суворова Татьяна Виссарионовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: suvorova_tv111@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-08-00260-а).

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую область $\Omega_1 : -\infty < x_1 < \infty, x_2 \geq 0$, занятую вязкоупругой средой. На лицевой поверхности упругого полупространства осциллирует жесткий штамп, к которому приложена сила $\mathbf{P} = \{0, Pe^{-i\omega t}\}$. Полагаем, что в области контакта $|x_1| \leq a$ нормальные и касательные напряжения связаны законом Амонтона–Кулона, $\sigma_{12} = k_{tr}\sigma_{22}$, где k_{tr} — коэффициент трения. Перемещения $\mathbf{u} = \{u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t)\}$ удовлетворяют уравнениям Ламе, связь перемещений и напряжений дается обобщенным законом Гука.

Будем рассматривать установившийся закон колебаний, при этом отделим временной множитель, в дальнейшем будем вести изложение для безразмерных амплитудных значений соответствующих функций. При этом линейные размеры отнесены к полуширине штампа, а напряжения — к модулю сдвига среды.

Граничные условия задачи в случае плоского штампа имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(x_1, 0) &= 0, \\ \sigma_{22}(x_1, 0) &= 0; \quad |x_1| > 1, \\ \sigma_{12}(x_1, 0) &= k_{tr}\sigma_{22}(x_1, 0), \\ u_2(x_1, 0) &= \delta, \quad |x_1| \leq 1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где δ — осадка штампа.

Следуя идеям постановок задач трибологии, описанных в работе [1], будем разыскивать контактные давления и горизонтальные смещения под штампом при граничных условиях (1.1).

2. Построение решения интегрального уравнения методом коллокаций

Решение настоящей краевой задачи строится в рамках интегрального подхода [2] с помощью преобразования Фурье, которое применяется к уравнениям Ламе и граничным условиям. Микроструктура основания была учтена в рамках модели микромеханики, вследствие которой были определены механические характеристики, соответствующие эквивалентной упругой среде. После построения матрицы Грина для упругого полупространства [2] и удовлетворения граничных условий (1.1), приходим к интегральному

уравнению с разностным ядром

$$\int_{-1}^1 k(x_1 - \xi)q(\xi)d\xi = \delta, \quad (2.1)$$

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = q(x_1), \quad |x_1| \leq 1.$$

Ядро интегрального уравнения (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} k(x_1 - \xi) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (k_{tr}K_{21}(\alpha) + K_{22}(\alpha)) \times \\ &\quad \times e^{i(x_1 - \xi)\alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функции $K_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, 2$ — элементы матрицы Грина для упругого основания, их вид и расположение контура интегрирования Γ приведены в работе [2]. Элементы матрицы Грина являются мероморфными функциями в комплексной плоскости и на бесконечности $K_{21}(\alpha)$, $K_{22}(\alpha)$ имеют поведение

$$\begin{aligned} K_{22}(\alpha) &\rightarrow \frac{c_0}{|\alpha|}, \quad K_{21}(\alpha) \rightarrow \frac{c_1}{\alpha}, \\ &\alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аналитические и аналитико-численные методы решения интегральных уравнений с разностным ядром развиты в работах школы академика Бабешко В.А. [1–3]. В настоящей работе для решения интегрального уравнения (2.1) применим метод коллокаций. В качестве регуляризатора основной части ядра (2.2) для выделения логарифмической особенности используем функцию $c_0/\sqrt{\alpha^2 + R^2}$, совпадающую с функцией $K_{22}(\alpha)$ на бесконечности и не имеющую особенностей в комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} k(x_1 - \xi) &= I_1(x_1 - \xi) + \\ &\quad + K_0(R|x_1 - \xi|)/\pi, \\ I_1(x_1 - \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{K}(\alpha)e^{i(x_1 - \xi)\alpha} d\alpha, \quad (2.4) \\ \tilde{K}(\alpha) &= k_{tr}K_{21}(\alpha) + K_{22}(\alpha) - \\ &\quad - c_0/\sqrt{\alpha^2 + R^2}. \end{aligned}$$

При дальнейших аналитических преобразованиях использовалось значение интеграла [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + R^2)^{-1/2} e^{i y \alpha} d\alpha = 2K_0(R|y|),$$

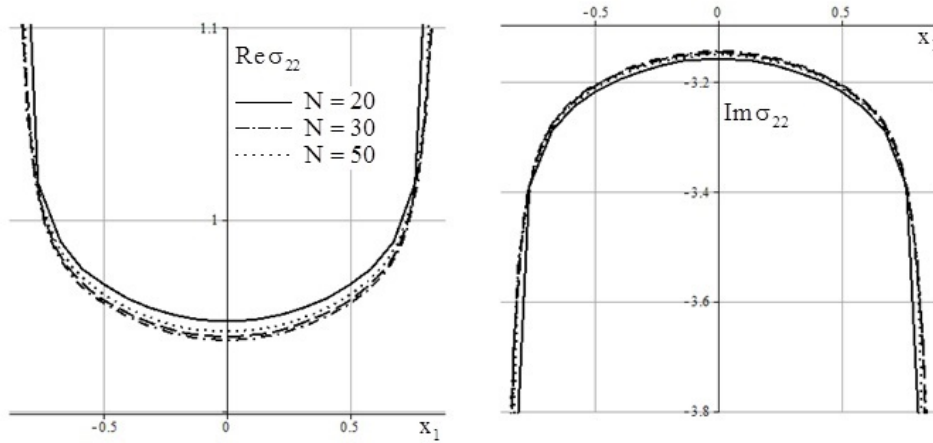


Рис. 1. Нормальные контактные напряжения для различных значений точек коллокаций $N = 30$, $N = 40$, $N = 50$

где $K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка [10].

Интеграл $I_1(x_1 - \xi)$ в представлении (2.4) быстро сходится, при этом значение параметра R можно выбрать достаточно большим. Дискретизация области контакта проводится равномерно распределенными точками коллокаций x_{1i}, ξ_i с шагом $h = (2 - 2\varepsilon)/N$ на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon \ll 1$. На каждом участке полагаем $q(x_1)|_{x_{1i} < x_1 < x_{1i+1}} = q(x_{1i}) = q_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. В результате решение сводится к конечной системе линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^N r_{mn} q_n = \delta/h; \quad m, n = 1, 2, \dots, N,$$

$$r_{mn} = I_1(x_{1m} - \xi_n) + c_1(\operatorname{erf}(z_2) - \operatorname{erf}(z_1)), \quad m \neq n,$$

$$c_1 = c_0 \operatorname{sign}(x_{1m} - \xi_n)/h, \quad (2.5)$$

$$z_1 = \sqrt{(x_{1m} - \xi_n)R};$$

$$z_2 = \sqrt{(x_{1m+1} - \xi_n)R},$$

$$r_{nn} = I_1(x_{1n} - \xi_n) + 2c_0 \operatorname{erf}(\sqrt{hR/2})/h,$$

где $\operatorname{erf}(z)$ — интеграл вероятности [11]. Горизонтальные смещения под штампом опреде-

ляются соотношением (2.6)

$$u_1(x_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N q_n s_n;$$

$$s_n = \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \int_{\Gamma} \tilde{K}_2(\alpha) e^{i(x_1 - \xi)\alpha} d\alpha d\xi, \quad (2.6)$$

$$\tilde{K}_2(\alpha) = k_{tr} K_{11}(\alpha) + K_{12}(\alpha).$$

3. Результаты численного анализа

Расчеты проводились для механических характеристик двухфазного композиционного материала с матрицей из ароматического полиамида фенилона ФС-2 с нанонаполнителем в виде алюмомагниевого шпинели [12, 13]. Микроструктура композиционного материала была учтена в рамках модели микромеханики [14, 15], при этом рассчитанные эффективные модули композита подтверждены экспериментально [13]. При расчетах принято: $E = 6,1283$ ГПа, $\nu = 0,34$, $\rho = 1330$ кг/м³, $\delta/a = 1$, $\omega = 50$ Гц. Вязкость полимера учитывалась в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения, вследствие чего присутствует малая комплексная составляющая в модуле Юнга.

Численный анализ показал, что элементы матрицы системы (2.5) имеют максимальное значение на главной диагонали и быстро убывают по мере удаления от нее. В процессе решения контролировалась точность удовлетворения граничных условий. При численной реализации наблюдается устойчивость и

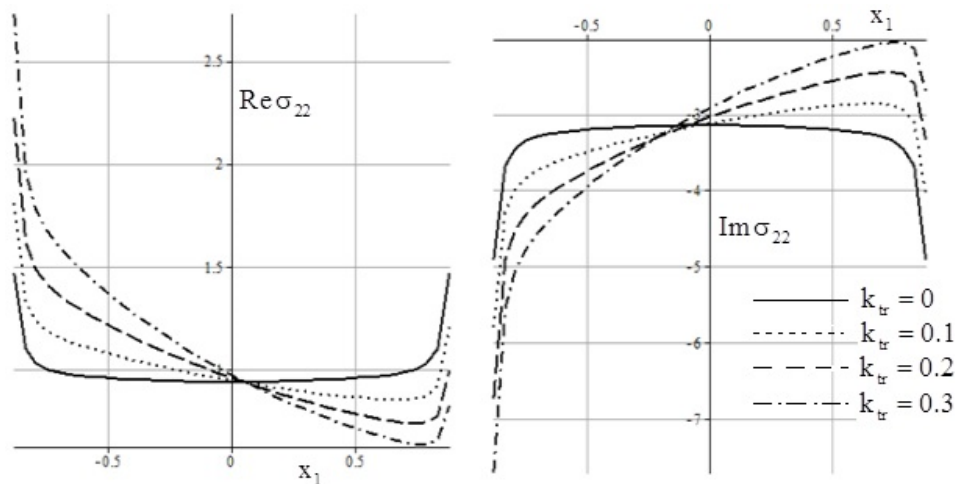


Рис. 2. Нормальные контактные напряжения для различных значений коэффициента трения $k_{tr} = 0, k_{tr} = 0,1, k_{tr} = 0,2, k_{tr} = 0,3$

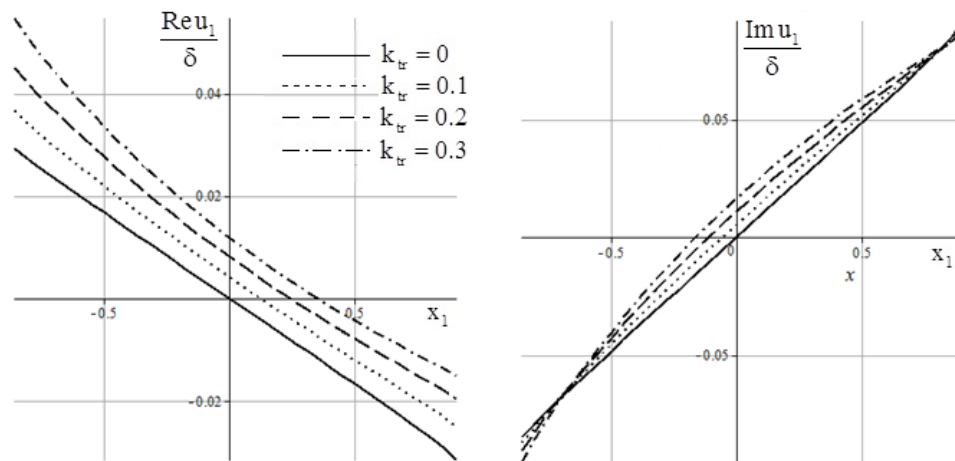


Рис. 3. Горизонтальные смещения под штампом для различных значений коэффициента трения $k_{tr} = 0, k_{tr} = 0,1, k_{tr} = 0,2, k_{tr} = 0,3$

быстрая сходимость предложенного алгоритма, что иллюстрирует рис. 1, на котором приведены графики действительной и мнимой части нормальных контактных напряжений при различном количестве точек коллокаций N и коэффициенте трения $k_{tr} = 0$.

При изучении нормальных и касательных контактных напряжений особое внимание было уделено анализу влияния коэффициента трения. На рис. 2 и рис. 3 представлены графики действительной и мнимой части нормальных контактных напряжений и горизонтальных смещений под штампом в зависимости от коэффициента трения. Сплошная линия соответствует вибрации штампа без трения. Пунктирная, штриховая и штрихпунктирная линия соответствуют коэффици-

ентам трения 0,1, 0,2, 0,3 соответственно. Анализ результатов численных экспериментов позволил установить, что при возрастании коэффициента трения изменяется характер распределения напряжений, резко увеличивается несимметричность распределения напряжений под штампом.

Надо отметить, что асимметричность контактных напряжений характерна и для статических контактных задач при учете сил трения [4, 5].

На рис. 3 приведены действительные и мнимые части горизонтальных смещений, отнесенных к осадке штампа. С увеличением коэффициента трения при частоте колебаний $\omega = 50$ Гц точка x_0 , в которой перемещения обращаются в ноль $u_1(x_0) = 0$, смещается в

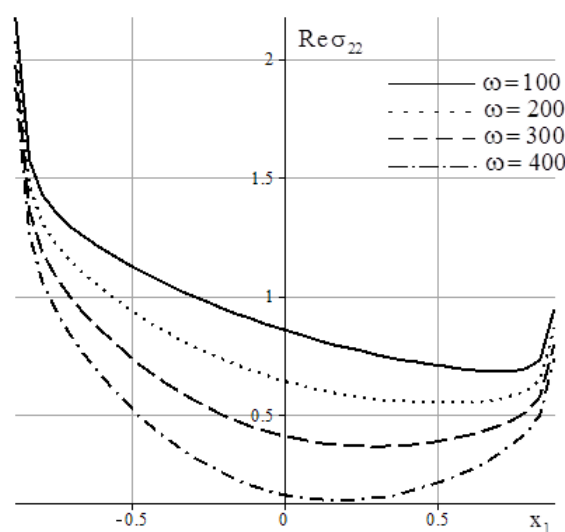


Рис. 4. Действительные части нормальных напряжений в зависимости от частоты колебаний штампа

области контакта, а сами горизонтальные перемещения под штампом увеличиваются по модулю.

Распределение нормальных и касательных напряжений изменяется с ростом частоты, что иллюстрирует рис. 4. Сплошная линия соответствует частоте колебаний $\omega = 100$ Гц, пунктирная, штриховая, штрих-пунктирная соответствуют частотам $\omega = 200$ Гц, $\omega = 300$ Гц и $\omega = 400$ Гц соответственно. Для малых частот эпюра контактных давлений имеет более пологий вид. Характер изменения контактных напряжений в зависимости от коэффициента трения в области контакта существенным образом зависит от частоты колебаний штампа.

Надо отметить, что предложенный метод построения решения контактной динамической задачи и найденные качественные характеристики касательных перемещений могут быть использованы при решении задач трибологии для случая переменного коэффициента трения в области контакта, при задании нормальных и касательных смещений под штампом [1].

Выводы

Проведенный численный анализ решения настоящей динамической контактной задачи показал, что изменение контактных напряжений в зависимости от коэффициента трения в области контакта существенным образом зависит от частоты колебаний штампа, так-

же значительное влияние на контактные напряжения оказывает коэффициент трения и механические характеристики материала основания.

Литература

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения // Докл. академии наук. 2018. Т. 480. № 5. С. 537–541. DOI: 10.7868/S0869565218050067
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 480 с.
5. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И. Трение эластомеров. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. 204 с.
6. Беляк О.А., Суворова Т.В. Влияние микроструктуры основания на силы трения при движении плоского штампа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2018. № 3. С. 25–31.
7. Беляк О.А., Суворова Т.В., Усошин С.А. Волновое поле, генерируемое в слоистом пористоупругом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 1. С. 53–61.

8. Беляк О.А., Суворова Т.В., Усошина Е.А. Математическое моделирование задачи о динамическом воздействии массивного объекта на неоднородное гетерогенное основание // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 1. С. 93–99.
9. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
11. Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
12. Иваночкин П.Г., Суворова Т.В., Данильченко С.А., Новиков Е.С., Беляк О.А. Комплексное исследование полимерных композитов с матрицей на основе фенилона C-2 // Вестник РГУПС. 2018. № 4. С. 54–62.
13. Беляк О.А. Математические модели для определения механических свойств флюидосодержащих композитов // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Ан. докл. Уфа, 2019. С. 247.
14. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
15. Giraud A., Huynh Q.V., Hoxha D., Kondo D. Effective poroelastic properties of transversely isotropic rock-like composites with arbitrarily oriented ellipsoidal inclusions// Mechanics of Materials. 2007. Vol. 39. P. 1006–1024. DOI: 10.1016/j.mechmat.2007.05.005
5. Goryacheva, I.G. Makhovskaya, Yu.Yu., Morozov, A.V., Stepanov, F.I. *Treniye elastomerov* [Friction of elastomers]. Institute of Computer Research Publ., Moscow, Izhevsk, 2017. (In Russian)
6. Belyak, O.A., Suvorova, T.V. Vliyaniye mikrostruktury osnovaniya na sily treniya pri dvizhenii ploskogo shtampa [The influence of the base microstructure on the friction forces during the movement of a flat punch]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2018, no. 3, pp. 25–31. (In Russian)
7. Belyak, O.A., Suvorova, T.V., Usoshin, S.A. Volnovoye pole, generiruyemoye v sloistom poristoupругom poluprostranstve dvizhushcheysoy ostsilliruyushchey nagruzkoй [The wave field generated in a layered porous-elastic half-space by a moving oscillating load]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2008, no. 1, pp. 53–61. (In Russian)
8. Belyak, O.A., Suvorova, T.V., Usoshina, E.A. Matematicheskoye modelirovaniye zadachi o dinamicheskom vozdeystvii massivnogo obyektа na neodnorodnoye geterogennoye osnovaniye [Mathematical modeling of the dynamic impact of a massive object on a heterogeneous heterogeneous foundation]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no 1, pp. 93–99. (In Russian)

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Blochnyye elementy v kontaktnykh zadachakh s peremennym koeffitsiyentom treniya [Block elements in contact problems with a variable friction coefficient]. *Dokl. akademii nauk* [Doklady Physics], 2018, vol. 63, no. 6, pp. 239–243. DOI: 10.7868/S0869565218050067 (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, J.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of heterogeneous linearly elastic media]. Nauka Publ., Moscow, 1989. (In Russian)
3. Kalinchuk, V.V., Belyankova, T.I. *Dinamicheskiye kontaktnyye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh tel* [Dynamic contact tasks for prestressed bodies]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2002. (In Russian)
4. Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya* [The mechanics of frictional interaction]. Moscow: Nauka Publ., 2001. (In Russian)
9. Brychkov, Yu.A., Prudnikov, A.P. *Integralnyye preobrazovaniya obobshchennykh funktsiy* [Integral transformations of generalized functions]. Nauka Publ., Moscow, 1977. (In Russian)
10. Bateman, G., Erdelyi, A. *Higher transcendental functions*, vol. I–III. McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
11. Janke E., Emde F., Lesch F. *Spetsialnyye funktsii* [Special functions]. Nauka Publ., Moscow, 1964. (In Russian)
12. Ivanochkin, P.G., Suvorova, T.V., Danilchenko, S.A., Novikov, E.S., Belyak, O.A. Kompleksnoye issledovaniye polimernykh kompozitov s matritsey na osnove fenilona C-2 [A comprehensive study of polymer composites with a matrix based on phenylone C-2]. *Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya* [Bulletin of RGUPS], 2018, no. 4, pp. 54–62. (In Russian)
13. Belyak O.A. Matematicheskie modeli dlya opredeleniya mekhanicheskikh svoystv flyuidosoderzhashchikh kompozitov [Mathematical

- models for determining the mechanical properties of fluid-containing composites]. In: *XII Vserossiyskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: Analiticheskiy doklad* [XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics: An analytical report]. Ufa, 2019, pp. 247. (In Russian)
14. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. Wiley, New York, 1979.
15. Giraud A., Huynh Q.V., Hoxha D., Kondo D. Effective poroelastic properties of transversely isotropic rock-like composites with arbitrarily oriented ellipsoidal inclusions. *Mechanics of Materials*, 2007, vol. 39, pp. 1006–1024. DOI: 10.1016/j.mechmat.2007.05.005

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2019

© Беляк О. А., Суворова Т. В., 2019

Статья поступила 19 сентября 2019 г.