М а т е м а т и к а

УДК 519.68: 681.51 512.573

БИМОРФИЗМЫ КОНФИГУРАЦИЙ АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЗНАНИЙ[1]

К. И. Костенко[2]

BIMORPHYSMS OF CONFIGURATIONS IN ABSTRACT KNOWLEDGE SPACES

Kostenko K. I.

Concepts of inclusion and morphysm of abstract knowledge spaces configurations (w-inclusions and w-morphysms) have been specified. The notion of configurations bimorphysm has been defined as a semantic operation on the knowledge systems. The properties of the direct sum and unification bimorphysms, which are considered to be a formal analogue of knowledge accumulation and coordination operations, have been explored.

Введение

Биморфизмы конфигураций являются распространением понятия морфизма на вычислимые отображения, представляющие семейство семантических операций над знаниями, задаваемых парами конфигураций абстрактных пространств знаний [1]. Изучение свойств биморфизмов имеет целью классификацию методов обработки знаний, исследование уточнений операций накопления, обобщения, унификации и извлечения знаний, связей между семантическими операциями и возможность их декомпозиции.

1. Основные определения

Пусть $\mathbf{M}$ — бесконечное нумерованное множество конфигураций, а $\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}_\alpha$) — все конечные двоичные слова, включая пустое слово Λ (слова, начинающиеся с $\alpha \in \mathbf{I}$). Если $\alpha \in \mathbf{I}$, то $|\alpha|$ обозначает длину α. Элементам $\mathbf{M}$ конструктивно сопоставляются их полные структурные представления (ПСП), имеющие вид нагруженных бинарных деревьев с вершинами из $\mathbf{I}$ [1]. Множества вершин и висячих вершин ПСП z обозначаются как $\mathbf{D}(z)$ и $\mathbf{O}(z)$. Если $z \in \mathbf{M}$ и $\alpha \in \mathbf{D}(z)$, то $[z]_\alpha$ обозначает разметку α, а $(z)_\alpha$ — конфигурацию, ПСП которой образует поддерево ПСП z с корнем в вершине α [1]. Сопоставляемые вершинам множеств $\mathbf{O}(z)$ и $\mathbf{D}(z)\backslash\mathbf{O}(z)$ значения — это соответственно номера атомарных знаний и семантических зависимостей фрагментов, из которых строится знание, представленное z. На множествах элементарных конфигураций и семантических связей определены разрешимые отношения порядка ρ_0 и ρ_1. Запись $\Delta(z)$, где $z \in \mathbf{M}$, обозначает множество конфигураций, ПСП которых получаются из ПСП z с помощью конечного числа применений операции инвертирования (замены семантических связей на обратные к ним и порядка следования потомков для вершин из $\mathbf{D}(z)\backslash\mathbf{O}(z)$ [1]).

Определение 1. Отображение ξ: $\mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется изотонным, если

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{I}(\alpha \subseteq \beta \to \xi(\alpha) \subseteq \xi(\beta)).$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-07-96800).

[2]Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий, начальник отдела разработки информационных систем Центра интернет Кубанского государственного университета.

Определение 2. Изотонное отображение ξ: $\mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется трассированием $z_1 \in \mathbf{M}$ в $z_2 \in \mathbf{M}$, если

$$\forall \alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1) \backslash \mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow \leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2) \backslash \mathbf{O}(z_2)),$$

$$\forall \alpha, \alpha\sigma\beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\} ((\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta)) \to \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma\beta)).$$

Если для α, $\alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)$, где $\sigma \in \{0,1\}$, имеет место равенство

$$|\xi(\alpha)| + 1 \geqslant |\xi(\alpha\sigma)(|\xi(\alpha)| + 1 \leqslant |\xi(\alpha\sigma)|),$$

то для этих вершин имеет место локальное сжатие (растяжение) z_1 в z_2. Трассирование ξ конфигурации z_1 в z_2 называется сжатием (растяжением), если

$$\forall \sigma \in \{0,1\} \forall \alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)(|\xi(\alpha)| + 1 \geqslant |\xi(\alpha\sigma)|)$$

$$(\forall \sigma \in \{0,1\} \forall \alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)(|\xi(\alpha)| + 1 \leqslant |\xi(\alpha\sigma)|)).$$

Покажем, что если ξ является трассированием z_1 в z_2 и $\alpha \in \mathbf{D}(z_1) \backslash \mathbf{O}(z_1)$, $\sigma \in \{0,1\}$, то справедливо включение $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma)$. Предположим противное: $\xi(\alpha) = \xi(\alpha\sigma)$. Тогда найдутся такие $\gamma_1 = \alpha\sigma\sigma\beta_1 \in \mathbf{O}(z_1)$ и $\gamma_2 = \alpha\sigma\overline{\sigma}\beta_2 \in \mathbf{O}(z_1)$, что $\xi(\alpha\sigma) \subset \xi(\gamma_1)$ и $\xi(\alpha\sigma) \subset \xi(\gamma_2)$. Поэтому $\xi(\alpha\sigma)\sigma \subseteq \xi(\gamma_1)$ и $\xi(\alpha\sigma)\overline{\sigma} \subseteq \xi(\gamma_2)$. Значит, должны выполняться включения $\xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\gamma_1)$ и $\xi(\alpha)\overline{\sigma} \subseteq \xi(\gamma_2)$. Поскольку $\xi(\alpha) \subset \xi(\gamma_2)$, то справедливо включение $\xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\gamma_2)$, которое приводит к противоречию. Следовательно, равенство $\xi(\alpha) = \xi(\alpha\sigma)$ неверно.

Доказанное свойство означает, что для трассирований конфигураций возможности локальных сжатий ограничены условием $|\xi(\alpha)| + 1 = |\xi(\alpha\sigma)|$, и всякое трассирование произвольной пары конфигураций является растяжением.

Локальные сжатия конфигураций, для которых справедливы соотношения $|\xi(\alpha)| + 1 > |\xi(\alpha\sigma)|$, возможны для специального класса отображений, называемых w-трассированиями.

Определение 3. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется w-трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2, если выполнены условия

$$\forall \alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1) \backslash \mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow \leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2) \backslash \mathbf{O}(z_2)), \quad (1.1)$$

$$\forall \alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\} ((\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma)) \to \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma)). \quad (1.2)$$

Определение 4. Конфигурация z_1 прослеживается (w-прослеживается) в конфигурации $z_2 (z_1 \leqslant z_2$ и $z_1 \leqslant_w z_2)$, если существует такое трассирование (w-трассирование) $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, z_1 в z_2, что

$$\forall \alpha \in \mathbf{O}(z_1) \big((z_1)_\alpha \ \rho_0 \ (z_2)_{\xi(\alpha)} \big),$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{D}(z_1) \backslash \mathbf{O}(z_1) \big([z_1]_\alpha \ \rho_1 \ [z_2]_{\xi(\alpha)} \big).$$

Определение 5. Конфигурация z_1 вложена (w-вложена) в конфигурацию z_2 ($z_1 \subseteq z_2$ и $z_1 \subseteq_w z_2$), если существуют конфигурации $z^1 \in \Delta(z_1)$, $z^2 \in \Delta(z_2)$, для которых $z^1 \leqslant z^2$ ($z^1 \leqslant_w z^2$).

Существуют конфигурации, для которых $z_1 \subseteq_w z_2$, и при этом не выполняется включение $z_1 \subseteq z_2$.

Определение 6. Вычислимое отображение μ: $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ называется морфизмом (w-морфизмом), если

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M} \big(z_1 \subseteq z_2 \to \mu(z_1) \subseteq \mu(z_2) \big),$$

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(z_1 \subseteq_w z_2 \to \mu(z_1) \subseteq_w \mu(z_2))).$$

Множество всех морфизмов (w-морфизмов) конфигураций обозначается как $\mathbf{Mor}$ ($\mathbf{Mor}^\omega$).

Определение 7. Вычислимое отображение μ: $\mathbf{M}^2 \to \mathbf{M}$ называется биморфизмом (w-биморфизмом), если

$$\forall z_0 \in \mathbf{M}(\mu(z_0, z) \in \mathbf{Mor} \ \& \ \mu(z, z_0) \in \mathbf{Mor})$$

$$(\forall z_0 \in \mathbf{M}(\mu(z_0, z) \in \mathbf{Mor}^\omega \ \& \ \mu(z, z_0) \in \mathbf{Mor}^\omega).$$

2. Прямые суммы конфигураций

Определение 8. Отображение $\mu : \mathbf{M}^2 \to \mathbf{M}$ называется суммой (прямой суммой) конфигураций, если

$$\exists \, n \in \mathbf{N} \forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}((\mu(z_1, z_2))_0 = z_1) \ \& \ \& \ (\mu(z_1, z_2))_1 = z_2) \ \& \ [(\mu(z_1, z_2)]_\Lambda = n).$$

Для записи операции прямой суммы используется выражение $z_0 \oplus_n z_1$, где n — фиксированное значение компоненты Λ. Если же $n = 0$, то символ n может опускаться и запись суммы принимает вид $z_0 \oplus z_1$.

Всякая операция прямой суммы конфигураций является биморфизмом (w-биморфизмом). Действительно, пусть z_0, z_1, z_2 — произвольные конфигурации из $\mathbf{M}$ и $z_1 \subseteq z_2$ ($z_1 \subseteq_w z_2$). В этом случае справедливы включения

$$z_0 \oplus_n z_1 \subseteq z_0 \oplus_n z_2 \text{ и } z_1 \oplus_n z_0 \subseteq z_2 \oplus_n z_0$$

$$(z_0 \oplus_n z_1 \subseteq_w z_0 \oplus_n z_2 \text{ и } z_1 \oplus_n z_0 \subseteq_w z_2 \oplus_n z_0).$$

Если для любых z_1, $z_2 \in \mathbf{M}$ семантическая связь между z_1 и z_2 с номером n является симметричной, то $z_1 \oplus_n z_2 \subseteq z_2 \oplus_n z_1$ и $z_1 \oplus_n z_2 \subseteq_w z_2 \oplus_n z_1$.

Семантическая связь с номером $n = 0$ симметричная для любых конфигураций. Поэтому

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(z_1 \oplus z_2 \subseteq z_2 \oplus z_1 \text{ и } z_1 \oplus z_2 \subseteq_w z_2 \oplus z_1).$$

Определение 9. Отображение $\mu : \mathbf{M}^2 \to \mathbf{M}$ называется β-вставкой, где $\beta \in \mathbf{I}$, если

$$\begin{gathered}\forall z_0, z_1 \in \mathbf{M}((\mu(z_0, z_1) = z) \to \\ \to (\mathbf{D}(z) = ((\mathbf{D}(z_0) \backslash (\mathbf{I}_{\beta 0} \cup \mathbf{I}_{\beta 1})) \cup \\ \cup \{\beta 0 \gamma | \gamma \in \mathbf{D}(z_0) \cap \mathbf{I}_\beta\} \cup \{\beta 1 \gamma | \gamma \in \mathbf{D}(z_1)\})) \text{ и} \\ \forall z_0, z_1 \in \\ \in \mathbf{M}\Bigg(\mu(z_0, z_1) = z \leftrightarrow \forall \xi \in \mathbf{D}(z)([z]_\xi = \\ = \begin{cases} [z_1]_\xi, \xi \not\subset \beta, \\ 0, \xi = \beta, \\ [z_1]_\eta, \xi = \beta 1 \eta, \\ [z_0]_{\beta\delta}, \xi = \beta 0 \delta \end{cases})\Bigg).\end{gathered}$$

Для обозначения β-вставки используется запись $z_0 \ {}_\beta\!\oplus\ z_1$.

Отображение β-вставки порождает морфизм (w-морфизм) для всякого фиксированного значения первого аргумента. Если $\beta = \Lambda$, то операция β-вставки порождает морфизм (w-морфизм) для каждого фиксированного значения второго аргумента. Если $\beta \neq \Lambda$, то для некоторых значений второго аргумента операция β-вставки может не образовывать морфизм (w-морфизм).

Определение 10. Отображение μ: $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ называется β-удалением, если

$$\begin{gathered}\forall z \in \mathbf{M}((\mu(z) = z_0) \to \\ \to (\mathbf{D}(z_0) = (\mathbf{D}(z) \backslash \mathbf{I}_\beta) \cup \{\beta\gamma | \beta 0 \gamma \in \mathbf{D}(z)\})) \\ \text{и } \forall z \in \mathbf{M}\Bigg(\mu(z) = z_0 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{D}(z_0)([z_0]_\alpha = \begin{cases} [z_0]_\alpha, \alpha \notin \mathrm{I}_\beta, \\ [z_0]_{\beta 0 \eta}, \alpha = \beta\eta \end{cases})\Bigg).\end{gathered}$$

Операции прямой суммы образуют семейство преобразований представлений знаний, конечные комбинации которых позволяют конструировать произвольные конфигурации из элементарных конфигураций. Если $z \in \mathbf{M}$ является неэлементарной, $[z]_\Lambda = n$, а $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ — представления конфигураций $(z)_0$ и $(z)_1$ в виде комбинаций прямых сумм элементарных конфигураций, то z представляется суммой $\mathbf{T}_1 \oplus_n \mathbf{T}_2$.

Теорема 1. Если $z_1' \in \Delta(z_1)$, $z_2' \in \Delta(z_2)$ и $z_1' \leqslant z_2'$, то справедливо

$$\forall z_2'' \in \Delta(z_2) \exists z_1'' \in \Delta(z_1)(z_1'' \leqslant z_2'').$$

Доказательство.

Пусть ξ': $\mathbf{I} \to \mathbf{I}$ — трассирование конфигурации z_1' в z_2', для которого

$$z_1' \leqslant z_2' \text{ и } z_2'' \in \Delta(z_2)$$

и ξ_2'' является инверсией z_2' в z_2'' [1]. Определим инверсию ξ_1'' конфигурации z_1' в конфигурацию z_1'' с помощью следующих правил:

$\xi_1''(\Lambda) = \Lambda$,

$$\forall \alpha \in I, \sigma \in \{0,1\}\Bigg(\xi_1''(\alpha\sigma) = \\ = \begin{cases} \xi_1''(\alpha)\overline{\sigma}, \text{ если } \exists \beta \in \mathrm{I}((\xi'(\alpha\sigma) = \\ \quad = \xi'(\alpha)\sigma\beta) \vee (\xi'(\alpha\overline{\sigma}) = \\ \quad = \xi'(\alpha)\overline{\sigma}\beta)) \ \& \ \xi_2''(\xi'(\alpha)\sigma) = \\ \quad = \xi_2''(\xi'(\alpha))\overline{\sigma}, \\ \xi_1''(\alpha)\sigma, \text{ иначе} \end{cases} \Bigg). \quad (2.1)$$

Определим отображение $\xi'' = \xi_2''\xi'(\xi_1'')^{-1}$ и покажем, что ξ'' является трассированием z_1'' в z_2'', для которого выполняются условия прослеживания z_1'' в z_2''.

а. Докажем, что ξ'' является трассированием z_1'' в z_2''.

Отображения $(\xi_1'')^{-1}$, ξ_2'' и ξ' являются трассированиями z_1'' в z_1', z_2' в z_2'' и z_1' в z_2' соответственно. Следовательно, справедливы эквивалентности

$$\forall\alpha \in \mathbf{D}(z_1'')(\alpha \in \mathbf{D}(z_1'')\backslash\mathbf{O}(z_1'') \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_1')\backslash\mathbf{O}(z_1') \Leftrightarrow \Leftrightarrow \xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2')\backslash\mathbf{O}(z_2') \Leftrightarrow \Leftrightarrow \xi_2''\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2'')\backslash\mathbf{O}(z_2'')),$$

что означает выполнимость условия (1.1).

Покажем истинность предиката

$$\forall\alpha, \alpha\sigma\beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}((\xi''(\alpha) \subset \xi''(\alpha\sigma\beta)) \to \to (\xi''(\alpha)\sigma \subseteq \xi''(\alpha\sigma\beta))).$$

Пусть $\xi''(\alpha) \subset \xi''(\alpha\sigma\beta)$, где $\alpha, \alpha\sigma\beta \in \mathbf{D}(z)$, а $\sigma \in \{0,1\}$. Инверсия ξ_1'': $\mathbf{I} \to \mathbf{I}$ сохраняет длину слов из $\mathbf{D}(z_1'')$, из чего следует включение

$$(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \subset (\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma\beta).$$

Поскольку инверсия ξ_2'' также сохраняет длину слов из $\mathbf{D}(z_2')$, то

$$\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \subset \xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma\beta).$$

Для инверсии $(\xi_1'')^{-1}$ справедливо утверждение

$$(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma) = \gamma\sigma \vee (\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma) = \gamma\overline{\sigma}.$$

Если $(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma) = \gamma\sigma$, то значение $\xi_1''(\gamma\sigma)$ определяет второе соотношение правила (2.1). Поэтому

$$\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha)\sigma \subseteq \xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma\beta) \text{ и } \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha)\sigma) = \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha))\sigma.$$

Следовательно,

$$\xi''(\alpha)\sigma = \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha))\sigma \subseteq \subseteq \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma\beta)) = \xi''(\alpha\sigma\beta).$$

Если $(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma) = \gamma\overline{\sigma}$, то значение $\xi_1''(\gamma\sigma)$ определяется первым соотношением правила (2.1). Поэтому

$$(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha)\overline{\sigma} \subseteq \xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma\beta))\& \&(\xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha)\overline{\sigma}) = \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha))\sigma).$$

Из этого следует, что

$$\xi''(\alpha\sigma) = \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha))\sigma \subseteq \subseteq \xi_2''(\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha\sigma\beta)) = \xi''(\alpha\sigma\beta).$$

Последнее означает, что ξ'' является трассированием z_1'' в z_2''.

b. Докажем, что для отображения ξ'' выполнены условия прослеживания z_1'' в z_2''.

Пусть вершине $\alpha \in \mathbf{D}(z_1'')\backslash\mathbf{O}(z_1'')(\alpha \in \mathbf{O}(z_1''))$ ПСП конфигурации z_1'' сопоставлена семантическая связь r_1 (элементарная конфигурация c_1), а вершине $\xi''(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2'')\backslash\mathbf{O}(z_2'')$ ПСП z_2'' соответствует связь r_2 (элементарная конфигурация c_2).

Тогда вершине $(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_1')\backslash\mathbf{O}(z_1')$ соответствует r_1 или r_1^{-1} (вершине $(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_1')$ соответствует элементарная конфигурация c_2). Поскольку ξ' это трассирование z_1' в z_2', то

$$\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2')\backslash\mathbf{O}(z_2') \quad (\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_2')).$$

Пусть τ_1 и τ_2 — семантические связи (элементарные конфигурации), соответствующие вершинам $(\xi_1'')^{-1}(\alpha)$ в z_1' и $\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha)$ в z_2'.

Поскольку для трассирования ξ' выполнены условия прослеживания $z_1' \leqslant z_2'$, то справедливо соотношение

$$\tau_1 \ \rho_1 \ \tau_2 \ (\tau_1 \ \rho_0 \ \tau_2).$$

Инверсия ξ_2'' переводит $\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2')\backslash\mathbf{O}(z_2')$ в $\xi_2''\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2'')\backslash\mathbf{O}(z_2'')$, которой соответствует семантическая связь r_2, совпадающая или обратная к связи τ_2, сопоставленной вершине $\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha)$ ПСП z_2'. По определению ξ_1'' первая или вторая ситуация имеет место тогда и только тогда, когда r_1 совпадает или является обратной к связи, сопоставленной вершине $(\xi_1'')^{-1}(\alpha)$ ПСП z_1'. Поэтому справедливо отношение $r_1 \ \rho_1 \ r_2$.

Инверсия ξ_2'' переводит $\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_2')$ в $\xi_2''\xi'(\xi_1'')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_2'')$, которой соответствует элементарная конфигурация τ_2. Следовательно, $c_1 = \tau_1$ и $c_2 = \tau_2$, что означает справедливость отношения $c_1 \ \rho_0 \ c_2$.

Теорема доказана.

Следствия

1. Если для $z_1' \in \Delta(z_1), z_2' \in \Delta(z_2)(z_1' \leqslant z_2')$, то

$$\forall z_1'' \in \Delta(z_1)\exists z_2'' \in \Delta(z_2)(z_1'' \leqslant z_2'').$$

2. Если для $z_1' \in \Delta(z_1), z_2' \in \Delta(z_2)(z_1' \leqslant_w z_2')$, то

$$\forall z_2'' \in \Delta(z_2) \exists z_1'' \in \Delta(z_1)(z_1'' \leqslant_w z_2'').$$

3. Если для $z_1' \in \Delta(z_1), z_2' \in \Delta(z_2)(z_1' \leqslant_w z_2')$, то

$$\forall z_1'' \in \Delta(z_1) \exists z_2'' \in \Delta(z_2)(z_1'' \leqslant_w z_2'').$$

Теорема 2. Если $z_1 \subseteq_w z$ и $z_2 \subseteq_w z$, где z — неэлементарная конфигурация, то $z_1 \oplus z_2 \subseteq_w z$.

Доказательство. Пусть $\xi_1 : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ и $\xi_2 : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ — трассирования $z_1' \in \Delta(z_1)$ в $z' \in \Delta(z)$ и $z_2' \in \Delta(z_2)$ в $z'' \in \Delta(z)$, для которых выполняются условия прослеживания $z_1' \leqslant_w z'$ и $z_2' \leqslant_w z''$. Обозначим инверсии конфигурации z в z' и z'', как ξ' и ξ''.

Возможен один из случаев:

1) $((\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda) \not\subset (\xi'')^{-1})\xi_2(\Lambda))\ \&$
$\&\ ((\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda) \not\subset (\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda))$;
2) $(\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda) = (\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda)$;
3) $(\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda) \subset (\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda)$;
4) $(\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda) \subset (\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda)$.

a. Условия первого случая означают, что для $\alpha = (\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda)$ и $\beta = (\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda)$ справедливы соотношения:

$$\mathbf{I}_\alpha \cap \mathbf{I}_\beta = \emptyset, \quad z_1 \subseteq_w (z)_\alpha \text{ и } z_2 \subseteq_w (z)_\beta.$$

Поэтому инверсии ξ' и ξ'' могут изменять порядок потомков только для вершин из $(\mathbf{I}_\alpha \cup \mathbf{I}_\beta) \cap \mathbf{D}(z)$. Пусть γ — самое длинное общее начало слов α и β. Тогда $\alpha = \gamma\sigma\omega$ или $\alpha = \gamma\overline{\sigma}\omega$, где $\sigma \in \{0, 1\}$.

Определим инверсию ξ_0 конфигурации z в конфигурацию z_0 с помощью следующих правил:

$\xi_0(\Lambda) = \Lambda$,

$$\forall \varepsilon\sigma \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}(\xi_0(\varepsilon\sigma) =$$
$$= \begin{cases} \varepsilon\sigma, \varepsilon = \gamma \ \& \ \alpha = \gamma 0\omega, \\ \varepsilon\overline{\sigma}, \varepsilon = \gamma \ \& \ \alpha = \gamma 1\omega, \\ \xi_0(\gamma\delta)\pi, \varepsilon\sigma = \gamma\delta\pi \ \& \\ \quad \& \ \delta \in \{0,1\} \ \& \\ \quad \& \ (\varepsilon\sigma \subseteq \alpha \vee \varepsilon\sigma \subseteq \beta), \\ \xi_0(\alpha)\pi, \varepsilon\sigma = \alpha\upsilon \ \& \\ \quad \& \ \xi'(\varepsilon\sigma) = \pi'\pi \ \& \ |\upsilon| = |\pi|, \\ \xi_0(\beta)\pi, \varepsilon\sigma = \beta\upsilon \ \& \\ \quad \& \ \xi''(\varepsilon\sigma) = \pi'\pi \ \& \ |\upsilon| = |\pi|, \\ \varepsilon\sigma, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Тогда $z_1 \oplus z_2 \subseteq_w z$, поскольку для $z_1 \oplus z_2$ существует трассирование ξ конфигурации $z_1' \oplus z_2'$ в $z_0 \in \Delta(z)$, задаваемое соотношениями

$$\xi(\varepsilon) = \begin{cases} \gamma, \varepsilon = \Lambda, \\ \xi_0(\alpha)\xi_1(\eta), \varepsilon = 0\eta, \\ \xi_0(\beta)\xi_2(\eta), \varepsilon = 1\eta, \end{cases}$$

для которого выполняется условие вложения $z_1 \oplus z_2 \subseteq_w z$.

b. Рассмотрим случай, когда $(\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda) = (\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda) = \alpha$. Согласно следствию 2 теоремы 1 существует такая конфигурация $z_2'' \in \Delta(z_2)$ и w-трассирования ξ_2' конфигурации z_2'' в z', что выполнены условия w-прослеживания z_2'' в z'.

Определим отображение ξ с помощью соотношений

$$\xi(\beta) = \begin{cases} \xi'(\alpha), \beta \in \{\Lambda, 0, 1\}, \\ \xi_1(\gamma), \beta = 0\gamma, \\ \xi_2'(\gamma), \beta = 1\gamma, \\ \beta, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что ξ является w-трассированием конфигурации $z_0 = (z_1' \oplus z_2'') \in \Delta(z_1 \oplus z_2)$ в z'.

Проверим справедливость условия (1.1). По определению ξ, если $\alpha = \sigma\beta \in \mathbf{D}(z_1' \oplus z_2'')$, где $\sigma \in \{0,1\}$, то имеет место один из случаев:

$$\xi(\alpha) = \xi_1(\beta) \text{ или } \xi(\alpha) = \xi_2'(\beta).$$

Если $\alpha = 0\beta(\alpha = 1\beta)$, то $\xi(\alpha) = \xi_1(\beta)$ $(\xi(\alpha) = \xi_2'(\beta))$. Поэтому

$$\alpha \in \mathbf{O}(z_1' \oplus z_2'') \leftrightarrow \xi_1(\beta) \in \mathbf{O}(z') \leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{O}(z')$$
$$(\alpha \in \mathbf{O}(z_1' \oplus z_2'') \leftrightarrow \xi_2'(\beta) \in \mathbf{O}(z') \leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{O}(z'))$$

и, следовательно, справедливо соотношение

$$\forall \alpha \in \mathbf{D}(z_1' \oplus z_2'')(\alpha \in \mathbf{D}(z_1' \oplus z_2'') \backslash \mathbf{O}(z_1' \oplus z_2'') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z') \backslash \mathbf{O}(z')).$$

Проверим условие (1.2). Пусть $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma)$, где $\alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_0)$ и $\sigma \in \{0,1\}$.

Возможен один из двух случаев:

1. $\xi(\alpha) = \xi_1(\alpha)\ \&\ \xi(\alpha\sigma) = \xi_1(\alpha\sigma)$, а значит, $\xi(\alpha)\sigma = \xi_1(\alpha)\sigma \subseteq \xi_1(\alpha\sigma) = \xi(\alpha\sigma)$.

2. $\xi(\alpha) = \xi_2'(\alpha)\ \&\ \xi(\alpha\sigma) = \xi_2'(\alpha\sigma)$, поэтому $\xi(\alpha)\sigma = \xi_2'(\alpha)\sigma \subseteq \xi_2'(\alpha\sigma) = \xi(\alpha\sigma)$.

Следовательно, ξ является w-трассированием.

Проверим, что для w-трассирования ξ выполняется условие прослеживания $(z_1' \oplus z_2'') \leqslant_w z'$. Пусть $\alpha = \Lambda$. Поскольку $[z_1' \oplus z_2'']_\Lambda$ является минимальной в отношении

ρ_1 семантической связью [1], то справедливо соотношение

$$[z_1' \oplus z_2'']_\Lambda \ \rho_1 \ [z']_{\xi(\alpha)}.$$

Пусть $\alpha = 0\beta$ ($\alpha = 1\beta$). Если $\alpha \in \mathbf{D}(z_1' \oplus z_2'')$, то $[z_1' \oplus z_2'']_\alpha = [z_1']_\beta$ и $\xi(\alpha) = \xi_1(\beta)([z_1' \oplus z_2'']_\alpha = [z_2'']_\beta$ и $\xi(\alpha) = \xi_2'(\beta))$.

Отсюда следует справедливость утверждений

$$\alpha \in \mathbf{D}(z_1' \oplus z_2'') \backslash \mathbf{O}(z_1' \oplus z_2'') \to [z_1' \oplus z_2'']_\alpha \ \rho_1 \ [z']_{\xi(\alpha)},$$

$$\alpha \in \mathbf{O}(z_1' \oplus z_2'') \to [z_1' \oplus z_2'']_\alpha \ \rho_0 \ [z']_{\xi(\alpha)}.$$

c. Рассмотрим третий случай. Пусть для $\alpha = (\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda)$ и $\beta = (\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda)$ имеет место включение $\alpha \subset \beta$. Из следствия 2 теоремы 1 следует существование конфигурации z_2'' и w-трассирования ξ_2' конфигурации z_2'' в z', для которых выполнены условия w-прослеживания z_2'' в z'.

Обозначим как ξ_0 — элементарную инверсию [1], осуществляющую перестановку потомков вершины $\xi'(\alpha) \in \mathbf{D}(z')$. Определим отображение ξ''' с помощью соотношений

$$\xi''' = \begin{cases} \xi_0\xi', \xi'(\alpha)0 \subseteq \xi'(\beta), \\ \xi', \xi'(\alpha)1 \subseteq \xi'(\beta). \end{cases}$$

Отображение ξ''' является инверсией, преобразующей z в конфигурацию $z''' \in \Delta(z)$, которая либо совпадает с конфигурацией z', либо получается из z' с помощью элементарной инверсии ξ_0. Отображение ξ_2'', определяемое как $\xi_0\xi_2'$ (если $\xi'(\alpha)0 \subseteq \xi'(\beta)$) и как ξ_2' (если $\xi'(\alpha)1 \subseteq \xi'(\beta)$), является w-трассированием z_2'' в z''', для которого выполняются условия $w-$прослеживания $z_2'' \leqslant_w z'''$.

Поскольку $z''' \in \Delta(z)$, то согласно следствию 2 теоремы 1 найдутся такие $z_1'' \in \Delta(z_1)$ и w-трассирование ξ_1' конфигурации z_1'' в z''', для которых $\xi_1'(\Lambda) = \alpha$ и выполнено условие w-прослеживания $z_1'' \leqslant_w z'''$.

Определим отображение ξ

$$\xi(\tau) = \begin{cases} \xi'(\alpha), \tau = \Lambda, \\ \xi_1'(\omega), \tau = 0\omega, \\ \xi_0\xi_2'(\omega), \tau = 1\omega \text{ и } \xi'(\alpha)0 \subseteq \xi'(\beta), \\ \xi_2'(\omega), \tau = 1\omega \text{ и } \xi'(\alpha)1 \subseteq \xi'(\beta). \end{cases}$$

Покажем, что ξ является w-трассированием конфигурации $z_1'' \oplus z_2''$ в z''', для которого выполнены условия w-прослеживания $z_1'' \oplus z_2''$ в z'''.

Проверим выполнимость условий (1.1) и (1.2).

Если $\tau = \Lambda \in \mathbf{D}(z_1'' \oplus z_2'') \backslash \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'')$, то $\xi(\tau) = \alpha \in \mathbf{D}(z''') \backslash \mathbf{O}(z''')$.

Для $\tau = 0\omega$ справедливы утверждения

$$\tau \in \mathbf{D}(z_1'' \oplus z_2'') \backslash \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'')(\tau \in \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'')) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\tau) = \xi_1'(\omega) \in \mathbf{D}(z''') \backslash \mathbf{O}(z''')(\xi(\tau) \in \mathbf{O}(z''')).$$

Если $\tau = 1\omega$, то $\xi(\tau) = \xi_0\xi_2'(\omega)$ или $\xi(\tau) = \xi_2'(\omega)$. В каждом из двух последних случаев справедливы соотношения

$$\tau \in \mathbf{D}(z_1'' \oplus z_2'') \backslash \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\tau) \in \mathbf{D}(z''') \backslash \mathbf{O}(z'''),$$

$$(\tau \in \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'') \leftrightarrow \xi(\tau) \in \mathbf{O}(z''')).$$

Следовательно, условие (1.1) выполнено.

Пусть $\xi(\tau) \subset \xi(\tau\sigma)$ и $\sigma \in \{0, 1\}$. Рассмотрим три случая: $\tau = \Lambda$, $\tau = 0\omega$ и $\tau = 1\omega$.

Если $\tau = \Lambda$ и $\xi'(\alpha)1 \subseteq \xi'(\beta)$, то $\sigma = 1$, так как $\xi(\Lambda) \subset \xi(1)$ и $\xi(\Lambda) = \xi(0)$. Из $\xi(1) = \xi_2''(\Lambda) = \xi_2'(\Lambda) = \xi'(\beta) = \alpha 1\gamma$ следует включение $\xi(\Lambda)1 \subseteq \xi(1)$.

Если $\tau = \Lambda$ и $\xi'(\alpha)0 \subseteq \xi'(\beta))$, то $\sigma = 1$, так как $\xi(\Lambda) \subset \xi(1)$ и $\xi(\Lambda) = \xi(0)$. Тогда из $\xi(1) = \xi_0\xi_2'(\Lambda) = \xi_0(\alpha 0\gamma) = \alpha 1\gamma$ следует, что $\xi(\Lambda)1 \subseteq \xi(1)$.

Если $\tau = 0\omega$, то $\xi(0\omega) = \xi_1'(\omega)$ и $\xi(0\omega\sigma) = \xi_1'(\omega\sigma)$. Поэтому справедливо включение $\xi_1'(\omega) \subset \xi_1'(\omega\sigma)$.

Поскольку ξ_1' является w-трассированием z_1'' в z''', то $\xi_1'(\omega)\sigma \subseteq \xi_0'(\omega\sigma)$, из чего следует включение $\xi(0\omega)\sigma \subseteq \xi(0\omega\sigma)$.

Для $\tau = 1\omega$ значения $\xi(1\omega)$ и $\xi(1\omega\sigma)$ определяются с помощью одного из двух соотношений определения ξ, соответствующего одному из условий

$$\xi'(\alpha)1 \subseteq \xi'(\beta) \text{ или } \xi'(\alpha)0 \subseteq \xi'(\beta).$$

Если $\xi'(\alpha)1 \subseteq \xi'(\beta)$, то $\xi(\tau) = \xi_2'(\omega) \subset \subset \xi(\tau\sigma) = \xi_2'(\omega\sigma)$.

Поскольку ξ_2' является w-трассирование z_2'' в z''', то $\xi_2'(\omega)\sigma \subseteq \xi_2'(\omega\sigma)$. Следовательно, $\xi(\tau)\sigma \subseteq \xi(\tau\sigma)$.

Если $\xi'(\alpha)0 \subseteq \xi'(\beta)$, то

$$\xi(\tau) = \xi_0\xi_2'(\omega) \subset \xi(\tau\sigma) = \xi_0\xi_2'(\omega\sigma).$$

Поскольку ξ_0 является элементарной инверсией, а $\xi_0\xi_2'$ — w-трассированием z_2'' в z''', то $\xi_2'(\omega) \subset \xi_2'(\omega\sigma)$ и $\xi_2'(\omega)\sigma \subseteq \xi_2'(\omega\sigma)$. Поэтому $\xi_0(\xi_2'(\omega)\sigma) = \xi_0(\xi_2'(\omega))\sigma$ и $\xi_0(\xi_2'(\omega)\sigma) \subseteq \xi_0\xi_2'(\omega\sigma)$, что означает истинность соотношения $\xi(\tau)\sigma \subseteq \xi(\tau\sigma)$.

Покажем, что для w-трассирования ξ справедливы условия w-прослеживания конфигурации $z_1'' \oplus z_2''$ в z'''. Пусть

$$\tau \in \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'')(\tau \in \mathbf{D}(z_1'' \oplus z_2'') \backslash \mathbf{O}(z_1'' \oplus z_2'')).$$

Для $\tau = 0\omega$ справедливы соотношения

$$[z_1'' \oplus z_2'']_\tau = [z_1'']_\omega \text{ и } \xi(\tau) = \xi_1'(\omega).$$

Поскольку ξ_1' является w-трассированием z_1'' в z''', то

$$[z_1'']_\omega\ \rho_0\ [z''']_{\xi(\tau)}([z_1'']_\omega\ \rho_1\ [z''']_{\xi(\tau)}).$$

Следовательно,

$$[z_1'' \oplus z_2'']_\tau\ \rho_0\ [z_0''']_{\xi(\tau)}([z_1'' \oplus z_2'']_\tau\ \rho_1\ [z''']_{\xi(\tau)}).$$

Если $\tau = 1\omega$, то истинны соотношения

$$[z_1'' \oplus z_2'']_\tau = [z_2'']_\omega, (\xi(\tau) = \xi_2'(\omega) \vee \xi(\tau) = \xi_0\xi_2'(\omega)),$$

поэтому

$$[z_1'' \oplus z_2'']_\tau \rho_0 [z''']_{\xi(\tau)}([z_1'' \oplus z_2'']_\tau\ \rho_1\ [z_1'' \oplus z_2'']_{\xi(\tau)}),$$

что завершает доказательство случая **c**.

d. Случай $(\xi'')^{-1}\xi_2(\Lambda) \subset (\xi')^{-1}\xi_1(\Lambda)$ аналогичен уже рассмотренному случаю 3, а его справедливость может быть показана с помощью доказательства части **c** перестановкой ролей конфигураций z_1 и z_2 в доказательстве существования w-трассирования ξ конфигурации $z_1'' \oplus z_2''$ в z''', для которого выполнены условия включения $z_1 \oplus z_2 \subseteq_w z$.

Следовательно, во всех возможных случаях оказывается справедливым включение $z_1 \oplus z_2 \subseteq_w z$.

Теорема доказана.

Существуют такие конфигурации z_0, z_1 и z_2, что $z_1 \subseteq z_0$ и $z_2 \subseteq z_0$, а включение $z_1 \oplus_n z_2 \subseteq z_0$ является неверным. Следовательно, утверждение теоремы 2 неверно для трассирований и морфизмов конфигураций.

Если $z' \subseteq_w z''$ и z' — неэлементарная конфигурация, то z'' также является неэлементарной. Поэтому теорема 2 неверна в случае $z_1 \subseteq_w z$, $z_2 \subseteq_w z$ и z является элементарной конфигурацией. Если конфигурации z_1 и z_2 являются элементарными, то утверждение теоремы 2 не всегда верно.

Теорема 3. Если $\mu : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ является морфизмом, то существует такой биморфизм μ': $\mathbf{M}^2 \to \mathbf{M}$, что $\forall z \in \mathbf{M}(\mu(z) = \mu'(z,z))$.

3. Унифицирующие биморфизмы

Определение 11. Биморфизм μ называется унифицирующим (унификатором), если: $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(\mu(z_1,z_2) \subseteq z_1\ \&\ \mu(z_1,z_2) \subseteq z_2)$.

Конфигурация z является общим примером конфигураций z_1 и z_2, если $z \subseteq z_1$ и $z \subseteq z_2$. Множество $\mathbf{U}(z_1,z_2) = \{z|\ z$ является общим примером z_1 и $z_2\}$ — рекурсивное, так как отношение вложения конфигураций является разрешимым. Множество элементарных конфигураций содержит минимальный в отношении ρ_0 элемент κ, представляемый в ПСП конфигураций с помощью числа 0 [1, 3].

Поскольку $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(\kappa \in \mathbf{U}(z_1,z_2))$, то $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(\mathbf{U}(z_1,z_2) \neq \emptyset)$.

Следовательно, всякое множество $\mathbf{U}(z_1,z_2)$ содержит минимальный в отношении вложения конфигураций элемент.

Конфигурация z является неэлементарной, если дерево ПСП z имеет более одной вершины. Для неэлементарных конфигураций z_1 и z_2 множества $\mathbf{U}(z_1,z_2)$ являются бесконечными.

На множестве всех унификаторов $\mu\mathbf{U}$ определим отношение предшествования $\leqslant$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned}&\forall \mu_1, \mu_2 \in \mu\mathbf{U}(\mu_1 \leqslant \mu_2 \leftrightarrow\\ &\quad \leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(\mu_1(z_1,z_2) \subseteq \mu_2(z_1,z_2))).\end{aligned}$$

Множество $\mathbf{U}(z_1,z_2)$ может не содержать максимального в отношении $\subseteq$ элемента, что влечет отсутствие наибольшего унификатора в $(\mu\mathbf{U}, \leqslant)$ [2].

Определим специальный подкласс множества унифицирующих биморфизмов, элементы которого обобщают известные методы унификации предикатов, содержащий наибольший в отношении $\leqslant$ элемент. Для сравнения конфигураций в отношении $\subseteq$ будем рассматривать только такие изотонные отображения трассирования, которые являются тождественными для вершин ПСП вкладываемых конфигураций. Потребуем также, чтобы включение $z_1 \subseteq z_2$ выполнялось тогда и только тогда, когда $z_1 \leqslant z_2$. Удовлетворяющие приведенным условиям ограничения понятий вложения и морфизма конфигураций будем называть s — вложениями и s — морфизмами.

Будем обозначать отношение s-вложения и s-прослеживания конфигураций специальными символами $\subseteq_s$ и $\leqslant_s$.

Биморфизм $\mu : \mathbf{M}^2 \to \mathbf{M}$ является s-биморфизмом, если

$$\forall z_0 \in \mathbf{M}(\mu(z_0, z) \text{ и } \mu(z, z_0) \text{ это } s\text{-морфизмы}).$$

Для s-вложения конфигураций справедливо свойство

$$z_1 \subseteq_s z_2 \leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbf{D}(z_1)((z_1)_\alpha \subseteq_s (z_2)_\alpha).$$

Символом $\cap$ будем обозначать операции образования нижних граней пар элементов из множеств семантических зависимостей и элементарных конфигураций [3].

Определение 12. s-биморфизм μ называется простым, если для любых z_1, $z_2 \in \mathbf{M}$ выполняются соотношения

$$\forall\alpha \in (\mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1)) \cap (\mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2)) \\ ([\mu(z_1, z_2)]_\alpha \ \rho_1 \ [z_1]_\alpha \cap [z_2]_\alpha),$$

$$\forall\alpha \in \mathbf{O}(z_1)\cap\mathbf{O}(z_2)([\mu(z_1, z_2)]_\alpha \ \rho_0 \ [z_1]_\alpha\cap[z_2]_\alpha),$$

$$\forall\alpha \in ((\mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1)) \cap \mathbf{O}(z_2)) \\ ([\mu(z_1, z_2)]_\alpha = \kappa), \quad (3.1)$$

$$\forall\alpha \in (\mathbf{O}(z_1) \cap (\mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2))) \\ ([\mu(z_1, z_2)]_\alpha = \kappa).$$

Для всякого s-биморфизма μ справедливо соотношение

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}(\mathbf{D}(\mu(z_1, z_2)) = \mathbf{D}(z_1) \cap \mathbf{D}(z_2)).$$

Каждый простой биморфизм является унификатором.

Если μ_1 — простой биморфизм, то биморфизм μ_2, определяемый как $\mu_2(z_1, z_2) = \mu_1(z_2, z_1)$, также является простым.

Обозначим символом $\boldsymbol{\mu}\mathbf{SU}$ множество всех простых s-биморфизмов.

Определим отображение $\mu ms : \mathbf{M}^2 \to \mathbf{M}$ соотношениями

$$\forall\alpha \in (\mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1)) \cap (\mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2)) \\ ([\mu ms(z_1, z_2)]_\alpha = [z_1]_\alpha \cap [z_2]_\alpha),$$

$$\forall\alpha \in \mathbf{O}(z_1) \cap \mathbf{O}(z_2) \\ ([\mu ms(z_1, z_2)]_\alpha = [z_1]_\alpha \cap [z_2]_\alpha),$$

$$\forall\alpha \in (\mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1)) \cap \mathbf{O}(z_2)) \\ ([\mu ms(z_1, z_2)]_\alpha = \kappa),$$

$$\forall\alpha \in (\mathbf{O}(z_1) \cap (\mathbf{D}(z_2))\backslash\mathbf{O}(z_2))) \\ ([\mu ms(z_1, z_2)]_\alpha = \kappa).$$

Теорема 4. Отображение μms является наибольшим элементом упорядоченного множества $(\mu\mathbf{SU}, \leqslant)$.

Доказательство.

1. Докажем истинность предиката

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}\forall z \in \mathbf{M}(z_1 \leqslant_s z_2 \to \\ \to \mu ms(z_1, z) \leqslant_s \mu ms(z_2, z)).$$

Трассирование ξ является тождественным на $\mathbf{D}(\mu ms(z_1, z))\backslash\mathbf{O}(\mu ms(z_1, z))$ и переводит элементы $\mathbf{O}(\mu ms(z_1, z))$ в элементы $\mathbf{O}(\mu ms(z_2, z))$.

Покажем, что $\mu ms(z_1, z) \leqslant_s \mu ms(z_1, z)$ для отображения трассирования ξ.

Если $\alpha \in \mathbf{O}(\mu ms(z_1, z))$, то из определения ξ следует

$$\xi(\alpha) \in \mathbf{O}(\mu ms(z_2, z)) \ \& \\ [\mu ms(z_1, z)]_\alpha \ \rho_0 \ [\mu ms(z_2, z)]_{\xi(\alpha)}.$$

Последнее соотношение верно для случая $[\mu ms(z_1, z)]_\alpha = \kappa$. Если же $[\mu ms(z_1, z)]_\alpha \neq \kappa$, то справедливы соотношения

$$[z_1]_\alpha \ \rho_0 \ [z_2]_\alpha, [\mu ms(z_1, z)]_\alpha = \\ = [z_1]_\alpha \cap [z]_\alpha, [\mu ms(z_2, z)]_\alpha = [z_2]_\alpha \cap [z]_\alpha.$$

Следовательно,

$$[\mu ms(z_1, z)]_\alpha \ \rho_0 \ [\mu ms(z_2, z)]_{\xi(\alpha)}.$$

Если $\alpha \in \mathbf{D}(\mu ms(z_1, z))\backslash\mathbf{O}(\mu ms(z_1, z))$, то $\xi(\alpha) \in \mathbf{D}(\mu ms(z_2, z))\backslash\mathbf{O}(\mu ms(z_2, z))$. Кроме того,

$$[z_1]_\alpha \ \rho_1 \ [z_2]_\alpha, [\mu ms(z_1, z)]_\alpha = [z_1]_\alpha \cap [z]_\alpha \text{ и} \\ [\mu ms(z_2, z)]_\alpha = [z_2]_\alpha \cap [z]_\alpha,$$

поэтому $[\mu ms(z_1, z)]_\alpha \ \rho_1 \ [\mu ms(z_2, z)]_{\xi(\alpha)}$ и

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M} \ \forall z \in \mathbf{M} \\ (z_1 \leqslant_s z_2 \to \mu ms(z_1, z) \leqslant_s \mu ms(z_1, z)).$$

2. Истинность предиката

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}\forall z \in \mathbf{M} \\ (z_1 \leqslant_s z_2 \to \mu ms(z, z_1) \leqslant_s \mu ms(z, z_2))$$

доказывается аналогично.

Следовательно, отображение μms является биморфизмом.

3. Поскольку μms удовлетворяет условиям (3.1), то $\forall z_0 \in \mathbf{M}(\mu(z) = \mu ms(z, z_0)$ и $\mu'(z) = \mu ms(z_0, z)$ являются s-морфизмами).

Следовательно, $\mu ms(z_1, z_2)$ является s-биморфизмом.

4. Покажем, что μms это наибольший элемент в упорядоченном множестве $(\mu\mathbf{SU}, \leqslant)$.

Пусть $\mu \in \mu\mathbf{SU}$. Если $\alpha \in \mathbf{O}(\mu(z_1, z_2))$, то из

$$([\mu(z_1, z_2)]_\alpha = \kappa \vee [\mu(z_1, z_2)]_\alpha \ \rho_0 \ [z_1]_\alpha \cap [z_2]_\alpha)$$

следует, что

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M} \forall \alpha \in \mathbf{O}$$
$$(\mu(z_1, z_2))([\mu(z_1, z_2)]_\alpha \ \rho_0 \ [\mu ms(z_1, z_2)]_\alpha).$$

Если же $\alpha \notin \mathbf{O}(\mu(z_1, z_2))$, то

$$[\mu(z_1, z_2)]_\alpha \ \rho_1 \ [z_1]_\alpha \cap [z_2]_\alpha.$$

Таким образом $[\mu(z_1, z_2)]_\alpha \ \rho_1 \ [\mu ms(z_1, z_2)]_\alpha$ и $\forall \mu \in \mu\mathbf{SU}(\mu \leqslant \mu ms)$.

Теорема доказана.

Множества $\boldsymbol{\mu}\mathbf{U}$ унификаторов конкретных абстрактных пространств знаний содержат все преобразования, осуществляющие построение общих примеров произвольных пар конфигураций. При этом s-биморфизмы образуют собственный подкласс достаточно простых отображений из $\boldsymbol{\mu}\mathbf{U}$.

В модели логических программ хорошо изучены и применяются в конкретных приложениях преобразования унификации предикатов. Можно определить абстрактное пространство знаний, конфигурации которого представляют множество правильных записей предикатов, составленных с использованием счетно-бесконечных множеств функциональных и предикатных символов, обозначений переменных и констант. При этом семейства предикатных и функциональных символов одинаковых размерностей также являются счетно-бесконечными. В этом пространстве биморфизм μms является аналогом преобразования унификации предикатов, выполняемого с помощью алгоритма Робинсона [2]. Особенностью биморфизма μms является существование значений в случаях, когда унификация знаний, представляемых конфигурациями, невозможна. В этом случае $\mu ms(z_1, z_2)$ может рассматриваться как результат процесса унификации по алгоритму Робинсона до тех фрагментов предикатов, в которых продолжение унификации невозможно.

Заключение

Предложенные в работе определения w-трассирования и w-вложения расширяют понятия трассирования и вложения конфигураций. Они делают возможным изучение и использование преобразований, основанных как на растяжении, так и на сжатии структуры знаний. Рассматривавшиеся классы биморфизмов унификации и прямой суммы являются уточнениями для пространств знаний классов преобразований согласования и интеграции знаний.

Литература

1. *Костенко К. И.* Морфизмы информационных объектов фундаментальной модели сред областей знаний // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. №4. С. 5–12.
2. *Хоггер К.* Введение в логическое программирование. М.: Мир, 1988. 348 с.
3. Общая алгебра. Т. 2 / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.

Статья поступила 18 июня 2005 г.
Кубанский государственный университет