УДК 510.67:554+556.5.072+556.535.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗНОТИПНОСТИ ПОДСТИЛАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ПРОЦЕСС МАССОПЕРЕНОСА В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ[1]

М. В. Зарецкая[2]

STUDY OF THE INFLUENCE OF MULTI-TYPE UNDERLYING SURFACES ON MASS TRANSFER PROCESS IN LAYERED INHOMOGENEOUS MEDIA

Zaretzkaya M.V.

The successive development of the model of polluting admixtures propagation in the atmosphere or water medium has been considered taking into account the medium stratification and its interaction in the process of settlement with the underlying surface, which includes domains with various properties of absorption and reflection of harmful pollutants. The latter is the innovation in the setting of such problems and can introduce considerable corrections into concentration of pollutants, settled on the surface, depending on the properties of different zones of the surface.

Традиционно проводимые исследования распространения загрязняющих веществ (ЗВ) в водной среде или атмосфере были направлены на усложнение дифференциальных уравнений, описывающих перенос, и оставляли без внимания вопросы, связанные с оседанием ЗВ, в частности, учет типов подстилающих поверхностей. Между тем влияние этих процессов на состояние окружающей среды более существенно, чем считалось ранее.

Центр тяжести исследования данного процесса впервые перенесен из области усложнения описания физических характеристик среды в область более детального изучения проблем оседания примесей, определения их концентрации на поверхности земли или дне водоема с учетом индивидуальных способностей подстилающих поверхностей аккумулировать ЗВ. Развивается строгая теория, предусматривающая учет совместного влияния стратификации среды и разнотипности подстилающих поверхностей на характер концентрации оседающих ЗВ.

Проблемы, связанные с неоднородностью среды по высоте, приводят к необходимости создания моделей, которые при описании рассеивания примесей будут представлять водную акваторию или атмосферу как среду, состоящую из нескольких слоев.

Рассматриваемый слой можно подразделить на несколько подслоев, в каждом из которых физические параметры изменяются незначительно и приближенно могут считаться величинами постоянными. Это позволяет использовать при постановке задач уравнение с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим процесс распространения загрязняющих веществ от точечного источника постоянной мощности, находящегося в третьем слое, моделируемого δ-функцией Дирака. В качестве основного уравнения, описывающего распространение примеси, используем уравнение переноса с учетом турбулентной диффузии, гравитационного оседания и естественного разложения. В дальнейшем полагаем процесс установившимся во времени и рассматриваем стационарную задачу.

Решение задачи получаем в два этапа: в первую очередь решим задачу о распространении примеси в слоисто-неоднородной среде для случая бесконечной однородной подстилающей поверхности, затем обобщим решение для случая разнотипных подстилающих поверхностей.

1. Случай бесконечной однородной подстилающей поверхности

Уравнение переноса с учетом турбулентной диффузии имеет вид

$$u_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+v_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+(w_n-w_{gn})\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}+$$
$$+\sigma_0\varphi_n-\nu_n\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^2}-\mu_n\left(\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\right)=$$
$$=\delta_{ni}C\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0).$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ Р2003ЮГ (03-01-96519, 03-01-96587, 03-05-96630).

[2]Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник НИИ проблем механики и геоэкологии КубГУ.

Здесь u_n, v_n, w_n — компоненты вектора скорости в направлениях x, y, z для n-го слоя; $\varphi_n(x,y,z)$ — функция концентрации ЗВ в n-м слое; w_{gn} — абсолютная величина вертикальной скорости под действием силы тяжести в n-м слое; σ_0 — коэффициент поглощения (величина, характеризующая взаимодействие ЗВ с воздухом или водой, обратная интервалу времени, за который концентрация субстанции по сравнению с начальной интенсивностью φ_0 уменьшится в e раз); ν_n, μ_n — коэффициенты диффузии в вертикальном и горизонтальном направлениях для n-го слоя; $\delta_{ni} = \begin{cases} 1, & n=i \\ 0, & n\neq i \end{cases}$ показывает, что точечный источник находится в i-м слое; $n = 1, 2, 3$ — номер слоя; C — постоянная, характеризующая мощность источника выброса ЗВ.

В граничных условиях предполагается, что на поверхности $z = 0$ имеет место частичное поглощение и частичное отражение субстанции, интенсивность процесса взаимодействия с подстилающей поверхностью определяется эмпирическим коэффициентом λ. На верхней границе слоя $z = h_N$ концентрация тяжелой примеси должна быть близка к нулю.

Граничные условия:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \lambda\varphi_1 = q_1, \quad z = 0; \\ \varphi_N = q_2, \quad z = h_N. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Введение стратификации фактически предполагает введение поверхности разрыва. Поэтому необходимо выписать условия на поверхностях разрыва, которые далее будем называть условиями сопряжения. Условия сопряжения на границах слоев выражаются в равенстве значений концентрации и скорости изменения концентрации на границе двух соседних слоев:

$$\begin{aligned} z = h_1, \quad & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ z = h_2, \quad & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}, \quad \varphi_2 = \varphi_3. \end{aligned}$$

Геометрия задачи (допущение о плоскопараллельных границах слоев) позволяет применить преобразование Фурье по переменным x, y к уравнениям, граничным условиям и условиям сопряжения, что даст возможность сформулировать смешанные краевые задачи в терминах интегральных уравнений, аналитически построить образ Фурье решения исходной задачи и затем провести численный анализ полученных соотношений [1].

В результате получаем решение задачи для трехслойной среды. Так как для настоящего исследования интерес представляет распределение концентрации на поверхности земли, выпишем решение только для первого слоя:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(z) = \exp(\sigma_1 z)\Big\{ & 0.5F(\alpha,\beta)\exp^{-1}(\sigma_3 z_0)\times \\ & \times e_{12}^{-1}e_{23}^{-1}\Delta_0^{-1}a^{-1}\operatorname{sh}(\theta_3(h_3-z_0))\times \\ & \times\big(\theta_1\operatorname{ch}\theta_1 z - (\sigma_1-\lambda)\operatorname{sh}\theta_1 z\big)+ \\ & + q_1 a^{-1}\Delta_0^{-1}\theta_3^{-1}\Big[\exp(\theta_1 h_1)\big(A_{q_1}\Delta_{16}- \\ & -(\sigma_3 A_{q_1}+\theta_3 B_{q_1})\operatorname{sh}(\theta_3(h_3-z_0))\big)\big(\theta_1\operatorname{ch}\theta_1 z- \\ & -(\sigma_1-\lambda)\operatorname{sh}\theta_1 z\big)+\theta_3\Delta_0\exp(\theta_1 z)\Big]+ \\ & + q_2 e_{12}^{-1}e_{23}^{-1}\Delta_0^{-1}\exp(-\sigma_3 h_3)a^{-1}\theta_3\times \\ & \times(\theta_1\operatorname{ch}\theta_1 z-(\sigma_1-\lambda)\operatorname{sh}\theta_1\lambda)\Big\}. \end{aligned}$$

Система обозначений:

$$\begin{aligned} \Delta &= \theta_1\operatorname{ch}(\theta_1 h_1)-(\sigma_1-\lambda_1)\operatorname{sh}(\theta_1 h_1); \\ \Delta_p &= \theta_1\operatorname{sh}(\theta_1 h_1)-(\sigma_1-\lambda_1)\operatorname{ch}(\theta_1 h_1); \\ \Delta_0 &= A_c\operatorname{ch}(\theta_3(h_3-z_0))+B_c\operatorname{sh}(\theta_3(h_3-z_0)); \\ \Delta_1 &= \sigma_2\operatorname{ch}(\theta_2(h_2-h_1))+\theta_2\operatorname{sh}(\theta_2(h_2-h_1)); \\ \Delta_2 &= \sigma_2\operatorname{sh}(\theta_2(h_2-h_1))+\theta_2\operatorname{ch}(\theta_2(h_2-h_1)); \\ \Delta_3 &= \sigma_2\operatorname{sh}(\theta_2(h_2-h_1))-\theta_2\operatorname{ch}(\theta_2(h_2-h_1)); \\ \Delta_{12} &= (\theta_1\Delta_p+\sigma_1\Delta)\Delta_2-\Delta(\sigma_2\Delta_2-\theta_2\Delta_1); \\ \Delta_{13} &= (\theta_1\Delta_p+\sigma_1\Delta)\operatorname{sh}(\theta_2(h_2-h_1))-\Delta\Delta_3; \\ \Delta_{14} &= (\theta_1+\sigma_1)\Delta_2-(\sigma_2\Delta_2-\theta_2\Delta_1); \\ \Delta_{15} &= (\theta_1+\sigma_1)\operatorname{sh}(\theta_2(h_2-h_1))-\Delta_3; \\ \Delta_{16} &= \sigma_3\operatorname{sh}(\theta_3(h_3-z_0))-\theta_3\operatorname{ch}(\theta_3(h_3-z_0)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_c = \Big[& \Delta_{12}\operatorname{sh}(\theta_3(z_0-h_2))+ \\ & +\Delta_{13}(\theta_3\operatorname{ch}(\theta_3(z_0-h_2))- \\ & -\sigma_3\operatorname{sh}(\theta_2(z_0-h_2)))\Big]\Big/\Big(\theta_2 a\Big); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_c = \Big[& \Delta_{12}\operatorname{ch}(\theta_3(z_0-h_2))+ \\ & +\Delta_{13}(\theta_3\operatorname{sh}(\theta_3(z_0-h_2))- \\ & -\sigma_3\operatorname{ch}(\theta_2(z_0-h_2)))\Big]\Big/\Big(\theta_2 a\Big); \end{aligned}$$

$$A_{q_1} = \Big[\Delta_{14}\,\mathrm{sh}(\theta_3(z_0-h_2)) + \\ + \Delta_{15}(\theta_3\,\mathrm{ch}(\theta_3(z_0-h_2)) - \\ - \sigma_3\,\mathrm{sh}(\theta_2(z_0-h_2))\Big] \Big/ \Big(\theta_2 a\Big);$$

$$B_{q_1} = \Big[\Delta_{14}\,\mathrm{ch}(\theta_3(z_0-h_2)) + \\ + \Delta_{15}(\theta_3\,\mathrm{sh}(\theta_3(z_0-h_2)) - \\ - \sigma_3\,\mathrm{ch}(\theta_2(z_0-h_2))\Big] \Big/ \Big(\theta_2 a\Big);$$

$$e_{12} = \exp((\sigma_1-\sigma_2)h_1); \quad e_{23} = \exp((\sigma_2-\sigma_3)h_2);$$

$$a = \sigma_1 + \theta_1 - \lambda;$$

$$F(\alpha,\beta) = C\nu^{-1}\exp(i(\alpha x_0 + \beta y_0));$$

$$\theta_n = -0,5\nu_n^{-1}\Big((w_n - w_{gn})^2 + 4\nu\big[\mu_n(\alpha^2+\beta^2) + \\ + i(\alpha u_n + \beta v_n) + \sigma_0\big]\Big)^{0.5};$$

$$\sigma_n = 0,5\nu_n^{-1}(w_n - w_{gn}).$$

2. Случай разнотипных подстилающих поверхностей

Граничные условия на нижней границе ставятся в предположении наличия разнотипных подстилающих поверхностей. Считаем, что в совокупности эти подстилающие поверхности полностью покрывают всю поверхность земли или дна в зоне источника. На верхней границе определяем некоторое значение концентрации. В предположении отсутствия вертикальных потоков она должна быть близка к нулю. Предполагается, что существуют три типа зон с различной способностью аккумулировать ЗВ: полное отражение оседающих ЗВ, полное оседание ЗВ, частичное оседание ЗВ.

Количество зон можно регулировать, разнообразя значения параметров $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, которые определяются экспериментально.

Граничные условия для каждого из типов подстилающих поверхностей имеют вид

$$z = 0 : L_k\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \lambda_k\varphi = 0, \\ (x,y) \in \Sigma_k, k = 1,\ldots,M. \\ z = h_3 : \varphi_3 = 0.$$

Таким образом, получилась смешанная краевая задача для уравнения переноса. Зоны Σ_k полностью покрывают плоскость xOy, в общем случае эти множества могут быть несвязными. Здесь для простоты вычислений считаем их односвязными.

Поскольку при переходе из одной области в другую граничные условия изменяются, решение краевой задачи требует построения интегральных уравнений.

Применение метода интегральных преобразований и известной техники сведения смешанных краевых задач к интегральным уравнениям позволяет перейти к решению системы интегральных уравнений первого рода [2, 3]:

$$\sum_{m=1}^{M} \iint\limits_{\Sigma_m} \kappa_l(x-\xi, y-\eta)\psi_m(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \\ = f_l(x,y), \quad (2.1)$$

$x, y \in \Sigma_l$, $l = 1, 2, \ldots, M$.

Здесь приняты обозначения:

$$\psi_m = P_m\psi;$$

P_m — проекторы на области Σ_m:

$$P_m = \begin{cases} 1, (x,y) \in \Sigma_m\,, \\ 0, (x,y) \notin \Sigma_m\,; \end{cases}$$

$$k_l(x,y) = V^{-1}L_lK_1(\alpha,\beta,0);$$

$$f_l(x,y) = -P_lV^{-1}L_lK_2(\alpha,\beta,0)F(\alpha,\beta);$$

$$L_k = \frac{\partial}{\partial z} - \lambda_k;$$

$$\bar\varphi = V\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)e^{i(\alpha x+\beta y)}\,dx\,dy;$$

$$V^{-1}\bar\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar\varphi(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta.$$

Соотношения являются системой интегральных уравнений первого рода относительно искомой кусочно-непрерывной функции $\psi(x, y)$.

Решение записывается в виде

$$\varphi(x,y,z) = V^{-1}K_1(\alpha,\beta,z)V\psi + \\ + V^{-1}K_2(\alpha,\beta,z)F(\alpha,\beta).$$

Выпишем выражения $K_1(\alpha,\beta,0)$ и $K_2(\alpha,\beta,0)$ для трех слоев

$$K_1(\alpha,\beta,0) = a^{-1}\Delta_0^{-1}\theta_3^{-1}\Big[\exp(\theta_1 h_1)\Big(A_{q_1}\Delta_{16} - \\ -(\sigma_3 A_{q_1} + \theta_3 B_{q_1})\,\mathrm{sh}\big(\theta_3(h_3 - z_0)\big)\Big)\theta_1 + \theta_3\Delta_0\Big],$$

$$K_2(\alpha,\beta,0) = \bar{\varphi}_1(\alpha,\beta,0).$$

Здесь $\bar{\varphi}_1$ — преобразование Фурье по параметрам x, y решения краевой задачи с граничным условием $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - \lambda_0\varphi = 0, z = 0$.

Рассматриваемые системы интегральных уравнений обладают специфическими свойствами локальности их ядер. Ядра систем интегральных уравнений экспоненциально затухают при увеличении аргументов. Это обстоятельство позволяет строить приближенные решения интегральных уравнений специальным методом, развитым для решения смешанных задач теории упругости [4].

Согласно этому методу рассматриваемые области Σ_m должны быть относительно большими и не иметь сужений.

Особенность метода состоит в том, что построенное решение в достаточно больших областях имеет две составляющие, т.е.

$$\Psi_m(x,y) = \Psi_{m1}(x,y) + \Psi_{m2}(x,y).$$

Первая составляющая решения $\Psi_{m1}(x,y)$ описывает его поведение во внутренних точках области Σ_m и называется вырожденной.

Вторая составляющая $\Psi_{m2}(x,y)$ называется погранслойной. Ее величина наиболее значительна у границы области и убывает по мере удаления от границы области вглубь.

$$\varphi(x,y,0) = V^{-1}\Big[K_2(\alpha,\beta,0) - \\ - K_1(\alpha,\beta,0)\frac{L_m K_2(\alpha,\beta,0)}{L_m K_1(\alpha,\beta,0)}\Big]F(\alpha,\beta). \quad (2.2)$$

Из формулы (2.2) следует, что найденное решение после проектирования в область Σ_m дает вырожденную составляющую, а построенное решение отвечает случаю краевой задачи о распространении ЗВ от точечного источника и осаждения на подстилающую поверхность при условии, что вся она имеет граничное условие $L_m\varphi = 0$; $-\infty \leqslant x, y \leqslant \infty$.

Второе важное свойство, которым обладает решение, — принцип локальности, состоящий в том, что решение с некоторым искажением «копирует» свойства правой части.

Решение системы (2.1) можно осуществить методом построения вырожденных составляющих решения [4].

Полученное решение задачи позволяет определить безопасные для населения зоны и оптимальные пути эвакуации при опасных выбросах ЗВ.

Литература

1. *Бабешко В. А., Гладской И. Б., Зарецкая М. В., Кособуцкая Е. В.* Моделирование распространения загрязняющих веществ в трехслойной атмосфере // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 1999. № 4.
2. *Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Гладской И. Б., Евдокимов С. М., Евдокимова О. В.* Роль разнотипных поверхностей при оседании загрязняющих выбросов // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2000. № 4.
3. *Бабешко О. М., Евдокимова О. В, Евдокимов С. М.* Об учете типов источников и зон оседания загрязняющих веществ // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 1.
4. *Евдокимова О. В.* К проблеме эколого-экономической оценки дизайна территорий // Природа. Общество. Человек. 2002. № 1 (14).

Статья поступила 5 марта 2003 г.
Кубанский государственный университет
© 2003 Зарецкая М. В.