УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-27-36

О преобразованиях систем интегральных уравнений для многокомпонентной наночастицы, лежащей на деформируемом слое в условиях вибрации

В. А. Бабешко✉, **О. В. Евдокимова**, **О. М. Бабешко**, **М. В. Зарецкая**, **И. С. Телятников**, **Д. А. Снетков**, **О. А. Гришко**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Владимир Андреевич; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. В статье путем применения универсального метода моделирования осуществляется сведение систем интегральных уравнений Винера–Хопфа к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа конечного порядка, возникают в смешанных задачах механики сплошных сред для моделирования многокомпонентных наночастиц на слоистой деформируемой среде конечной толщины. Осуществляются преобразования Галеркина, которые оказываются возможными в связи с тем, что матрица-функция преобразования ядра системы интегральных уравнений имеет мероморфные элементы. В результате преобразований система интегральных уравнений сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, методы исследования и решения которых разработаны авторами и будут применены к построенным бесконечным системам алгебраических уравнений.

Ключевые слова: многокомпонентные наночастицы, системы интегральных уравнений, преобразования Галеркина.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00128).

Цитирование: Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Телятников И. С., Снетков Д. А., Гришко О. А. О преобразованиях систем интегральных уравнений для многокомпонентной наночастицы, лежащей на деформируемом слое в условиях вибрации // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 27–36. DOI 10.31429/vestnik-19-4-27-36

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 20 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On Transformations of Systems of Integral Equations for a Multicomponent Nano Particle Lying on a Deformable Layer Under Vibration Conditions

V. A. Babeshko✉, **O. V. Evdokimova**, **O. M. Babeshko**, **M. V. Zaretskaya**, **I. S. Telyatnikov**, **D. A. Snetkov**, **O. A. Grishko**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Vladimir A. Babeshko; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. In the work, by applying a universal modeling method, the systems of Wiener-Hopf integral equations are reduced to infinite systems of linear algebraic equations. Systems of Wiener-Hopf integral equations of finite order arise in mixed problems of continuum mechanics for modeling multicomponent nanoparticles on a layered deformable medium of finite thickness. Galerkin transformations are carried out, which turn out to be possible due to the fact that the matrix-function of the transformation of the kernel of the system of integral equations has meromorphic elements. As a result of transformations, the system of integral equations is reduced to infinite systems of linear algebraic equations, the research methods and solutions of which are developed by the authors and will be applied to the constructed infinite systems of algebraic equations.

Keywords: multicomponent nanoparticles, systems of integral equations, Galerkin transformations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00128).

Cite as: Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Zaretskaya M. V., Telyatnikov I. S., Snetkov D. A., Grishko O. A. On transformations of systems of integral equations for a multicomponent nano particle lying on a deformable layer under vibration conditions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 27–36. DOI 10.31429/vestnik-19-4-27-36

Received 15 November 2022. Revised 20 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

Исследование в работе нацелено на выделение механической части процессов самоорганизации и самосборки наночастиц, лежащих на деформируемом основании. Известно, что наночастицы в иерархии строения вещества занимают промежуточное место между квантово-механическими объектами, молекулами и макромиром. Искусственно выращиваемые наноматериалы, как правило, значительно отличается своими свойствами от природных материалов естественного происхождения. Существуют определенные теории конденсированного вещества, описывающие свойства наноматериалов, вводятся понятия смоченных наночастиц с другими характеристиками, с целью выявления наиболее адекватного описания их поведения в причинно-следственном аспекте. Описание поведения многокомпонентных наночастиц на деформируемом основании, как объектов механики, путем решения смешанных задач теории упругости, сводится к решению систем интегральных уравнений Винера–Хопфа. Ядром систем являются матрицы-функции, преобразования Фурье их элементов являются мероморфными функциями.

Многокомпонентность выдвигает требования исследования и решения систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, причем порядок систем не является определенным. Авторами проведен глубокий анализ различных подходов к решению систем таких уравнений. Ниже приводится их обзор.

Исследованию уравнений Винера–Хопфа и связанных с ним функциональных уравнений посвящено огромное количество работ в связи с многоцелевыми возможностями этого уравнения. Ниже дается лишь ограниченный обзор их применений, который только возрастает со временем. Аналогично существует и обилие методов аналитического, полуаналитического или численного их решения. Точные решения интегральных уравнений и их систем получаются лишь для ограниченного типа ядер и областей задания уравнений. системы интегральных уравнений Винера–Хопфа для наиболее часто встречающихся случаев, когда элементами преобразования Фурье матричного ядра являются мероморфные функции с бесконечными числами нулей и полюсов. В целом системы интегральных уравнений Винера–Хопфа играют важную роль в самых разных областях практики. Так, эти уравнения возникают в проблемах прочности и разрушения [1–4], распространения волн в упругих телах [5–7], акустике [8], неразрушающих методах контроля [9], теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники [10, 11], теории волн в жидкости [12], геофизике [13], прикладной математике и приложениях [14–17] и в других областях.

Теория отдельных уравнений Винера–Хопфа детально разработана и подробно опубликована в печати. Если теорию решения отдельных уравнений можно считать построенной, то теория решения систем интегральных уравнений Винера–Хопфа далека до завершения. Попытки построения теории систем интегральных уравнений Винера–Хопфа по аналогии с отдельными уравнениями преобладают в проводимых исследованиях. Разработано несколько подходов, позволивших однотипно решать эти уравнения. Главными из них являются методы сингулярного интеграла Сохотского–Племеля [18, 19] и проекционные методы [20].

Оба подхода опираются на сведение уравнений Винера–Хопфа к функциональным уравнениям вида

$$\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{Q}^{+}(\alpha) = \mathbf{Q}^{-}(\alpha) + \mathbf{F}(\alpha). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{Q}^{+}(\alpha)$, $\mathbf{Q}^{-}(\alpha)$ неизвестные регулярные в верхней и нижней полуплоскостях функции, $\mathbf{K}(\alpha)$ — коэффициент функционального уравнения, $\mathbf{F}(\alpha)$ — задаваемая функция.

Для решения уравнений (1) необходима факторизация функций или матриц-функций $\mathbf{K}(\alpha)$, состоящая в получении представления $\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}_{+}(\alpha)\mathbf{K}_{-}(\alpha)$, где первое выражение справа является функцией или матрицей-функцией регулярной в верхней полуплоскости, а второе с такими же свойствами в нижней полуплоскости, и без нулей определителей в этих областях.

Первые исследования функциональных уравнений принадлежат Гильберту [21]. Он сформулировал корректную постановку краевой задачи для аналитических функций в форме системы функциональных уравнений о нахождении нескольких аналитических функций по их значениям на некотором контуре комплексной плоскости.

Винеру в совместной работе с Хопфом [22] принадлежит фундаментальный результат, связавший поиск решений интегральных уравнений фильтрации сигналов и смешанных граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с функциональным уравнением Гильберта.

В работах [20] исследование проводилось проекционным методом с привлечением теории нормированных колец. Важные аналитические свойства интеграла Фурье в комплексной плоскости были использованы для приведения интегральных уравнений с разностным ядром на полупрямой к функциональным уравнениям Гильберта для случая одной аналитической функции. Подобные интегральные уравнения возникли как результат удовлетворения смешанным условиям на границе области постановки граничной задачи. В них на границе существуют множества, на которых происходит смена типа граничных условий. Такие граничные задачи обычно рассматриваются в слоистых областях или в полупространстве.

В обзорных работах из цитированных указано, что факторизации матриц-функций на сегодняшний день выполнимы лишь в ограниченных случаях. К ним относятся матрицы-функции: треугольные; имеющие в качестве элементов рациональные функции; функционально-коммутативные или сводящиеся к последним элементарными преобразованиям, для которых выполнимо свойство $\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{K}(\beta) = \mathbf{K}(\beta)\mathbf{K}(\alpha)$ [11].

В то же время большое число матриц-функций, связанных с важными смешанными граничными задачами для уравнений в частных производных и не относящихся к приведенным типам, требует факторизации. Среди них особое место занимают матрицы-функции, элементами которых являются мероморфные функции, содержащие счетные множества нулей и полюсов. Такие матрицы-функции встречаются в многочисленных приложениях, а также позволяют с любой степенью точности приближать на всей вещественной оси непрерывные функции. Например, подобная ситуация имеет место для всех смешанных задач линейной механики сплошных сред в многослойной среде, имеющей конечную толщину.

В [2, 3, 6, 7, 16] построена математическая теория статических и динамических смешанных задач в неклассических многослойных областях, приводящих, в том числе, к уравнениям Винера–Хопфа. Здесь же разработаны прикладные теории факторизации мероморфных матриц-функций. Для матриц-функций высокого порядка разработан метод предварительной слабой факторизации, позволяющий выявлять главные свойства факторизации, а затем процесс уточнений осуществляется методом последовательных приближений. Также разработан другой подход, состоящий в записи функциональных уравнений смешанных граничных задач таким образом, что образуется треугольная матрица-функция с экспоненциальными элементами, имеющая бесконечный индекс.

Для нее разработан метод последовательных приближений, позволяющий в пределе получить точную факторизацию такой матрицы-функции. В [23] без доказательства приведен один из частных случаев слабой факторизации матриц-функций, ранее введенных в [3]. В работе [4] разработан метод факторизации мероморфных функций специального вида для двумерных смешанных задач теории трещин, возникающих в теории упругости. Найден способ сведения их к функционально-коммутативным, что позволило осуществлять точную факторизацию. Эти подходы нашли применение в большом числе работ. В работах [5, 8, 10] в задачах воздействия электромагнитных волн на совокупность препятствий развит метод факторизации мероморфных матриц-функций осуществлением слабой факторизации с последующим уточнением.

В работах [5, 9] разработан метод факторизации трехмерных матриц-функций в задачах распространения волн в упругой среде.

В работе [14] предложен оригинальный способ точной факторизации матриц-функций, рассматриваемых как краевая задача Римана–Гильберта на кольце для функций экспоненциального типа. Применением теоремы Винера–Пели матрицу-функцию конечного порядка на конечном отрезке $[-N, N]$ удается точно факторизовать. К сожалению, метод не применим для случая $N = \infty$. В работах [22, 23] развиты методы факторизации матриц-функций с рациональными элементами. Применены как методы последовательного аннулирования полюсов определителей матриц-функций, так и методы разложений с применением эрмитовых матиц-функций и ортоганольных полиномов. Основная часть исследования перенесена на способы вычисления частных и общего индекса матрицы-функции. В [22], к сожалению, как и в ряде работ других авторов, матрицы с элементами из рациональных функций, имеющих конечное число нулей и полюсов, названы мероморфными матрицами-функциями, что не является общепринятым. Принято мероморфными называть матрицы-функции, имеющие счетное число нулей и полюсов. Развитые в работах [24, 25] методы факторизации матриц-функций не применимы для факторизации таких мероморфных матриц-функций.

В работе [26] на основе фрактальных свойств блочных элементов разработан новый универсальный метод моделирования, успешно примененный в граничных задачах для систем дифференциальных уравнений всех типов. Он основан на оригинальных подходах американского математика Б. Мандельброта [27], в ценности которых авторы статьи смогли убедиться. В настоящей работе метод применяется для исследования систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, преобразование Фурье ядра которых представляет не допускающие точные факторизации мероморфных матриц-функций. Метод обходит традиционное сведение этих систем к функциональным и использует подход, развитый ранее авторами в работе [17] для системы двух уравнений Винера–Хопфа. Применение метода [26] позволяет развить этот подход на случай систем интегральных уравнений любого конечного порядка путем перехода от систем интегральных уравнений к системам дифференциальных, позволивших преодолеть проблему наличия не факторизуемой матрицы-функции функционального уравнения. Последнее позволяет исследовать и преобразовать системы интегральных уравнений Винера–Хопфа для слоистых многокомпонентных материалов сложной реологии таким образом, что открывается возможность применением специального метода факторизации, который будет применен в дальнейшем, построить их точное решение.

1. Постановка задачи

Рассматривается система интегральных уравнений Винера–Хопфа, заданная на полубесконечном интервале. Система представима как одно уравнение с матричным ядром, называемом символом интегрального уравнения, и имеет вид

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)d\xi = \mathbf{f}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\},$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathbf{K}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad \mathbf{K}(\alpha) = \begin{Vmatrix} K_{11}(\alpha) & K_{12}(\alpha) & \dots & K_{1N}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1}(\alpha) & K_{N2}(\alpha) & \dots & K_{NN}(\alpha) \end{Vmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}.$$

В случае задач термоэлектроупругости компонентами вектора $\boldsymbol{\varphi}$ являются компоненты вектора напряжений, температура или ее градиент, электрический заряд. В задачах магнитоупругости наряду с вектором напряжений появится градиент магнитного поля. Аналогично появляются параметры, свойственные другим реологиям материалов.

Будем считать, что элементы $K_{mp}(\alpha)$, $m, p = 1, 2, \dots, N$, матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ в (1.1) являются в общем случае мероморфными функциями переменной α. В смешанных задачах механики и математической физики мероморфные функции $K_{mp}(\alpha)$ и определитель $\det \mathbf{K}(\alpha)$ имеют следующее представление и асимптотическое поведение [2, 5]

$$K_{mp}(\alpha)=D^{-1}(\alpha)L_{mp}(\alpha),\quad \det\mathbf{K}(\alpha)=D^{-N}(\alpha)\Delta(\alpha),$$
$$\Delta(\alpha)=\det\left\|L_{mp}(\alpha)\right\|.$$
$$K_{mp}(\alpha)=T_{mp}\left|\alpha\right|^{-1}(1+o(\alpha)),\quad m=p,\quad K_{mp}(\alpha)=T_{mp}\alpha^{-1}(1+o(\alpha)),$$
$$m\neq p,\quad |\alpha|\gg 1,\quad p=1,2,\ldots,N.$$

Для описания свойств целых функций будем следовать определениями, принятым в [28, стр. 245–246]. Порядком целой функции $f(z)$ принимается значение $\rho=M(r)=\max|f(z)|$, где $r=|z|$.

Этот параметр может быть вычислен по формуле нижнего предела

$$\rho=\underline{\lim}\frac{\ln M(r)}{\ln r},\quad r\to\infty$$

Типом этой целой функции σ называется параметр, вычисляемый по формуле

$$\sigma=\overline{\lim}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}},\quad r\to\infty$$

Например, целые функции $\operatorname{sh}z$ и $\operatorname{sh}Nz$ имеют одинаковый порядок $\rho=1$, а типы $\sigma=1$ и $\sigma=N$ соответственно. Очевидно, функция $\operatorname{sh}Nz$ имеет распределение нулей в N раз более плотное, чем функция $\operatorname{sh}z$.

Считаем, что введенные функции $L_{mp}(\alpha)$, $D(\alpha)$, являются целыми функциями первого порядка и конечного типа τ, а функция $\Delta(\alpha)$ как определитель для матрицы $\|L_{mp}(\alpha)\|$ имеет первый порядок и тип τN. Предполагается, что целые четные функции $D(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$ имеют однократные нули на множествах значений $\pm\zeta_n$ и $\pm z_n$ соответственно, с точками сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях верхней (плюс) и нижней (минус) частей комплексной плоскости, как правило, в окрестностях мнимой оси. Ради простоты, не будем усложнять свойства матриц-функций, которые имеют нулевые общий и частные индексы, а система интегральных уравнений однозначно разрешима в некотором L_p, $p>1$. Более детально свойства элементов матриц-функций описаны в [2, 5]. Очевидно, плотность распределения нулей определителя $\Delta(\alpha)$ в N раз большая, чем нулей ξ_n знаменателя $D(\alpha)$. С учетом этого, построим N ветвей W_n, $n=1,2,\ldots,N$, из нулей определителя таким образом, чтобы полученная с их помощью целая функция имела бы тип τ, такой же, как и $D(\alpha)$.

Для этого в качестве первых нулей $z_m(p)$, $p=1,2,\ldots,N$, указанных ветвей возьмем последовательно первые нули определителя $\Delta(\alpha)$ в порядке возрастания модулей, а каждый последующий ноль берется с лакуной N, то есть с пропуском N последующий нулей определителя. Таким образом, нули каждой ветви $z_m(p)$ выбираются из числа нулей z_k определителя по правилу $z_m(p)=z_{p+mN}$ и охватывают без повторений все нули определителя $\Delta(\alpha)$. Это же относится и к нулям со знаком минус. Таким образом, построенные бесконечные множества нулей, обозначенные W_n, $n=1,2,\ldots,N$, являются не пересекающимися независимыми взаимно ортогональными и в совокупности $\cup W_n$ полными во множестве нулей определителя $\Delta(\alpha)$.

Построим с помощью входящих в W_n нулей целые функции $M_p(\alpha,z_p)$ в количестве N в форме бесконечных произведений [2, 5], приняв обозначения $\pm z_m(p)=z_m^{\pm}(p)$

$$M_p(\alpha,z)=M_{p\mp}\left(\alpha,z^{\pm}(p)\right)M_{p\pm}\left(\alpha,z^{\mp}(p)\right),$$
$$M_{p\mp}\left(\alpha,z^{\pm}(p)\right)=T_{p\mp}e^{\mp i\alpha}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{z_s^{\pm}(p)}\right)e^{\frac{\alpha}{z_s^{\pm}(p)}},\tag{1.2}$$
$$T_{p\mp}=\mathrm{const},\quad p=0,1,2,\ldots,N,$$

которые после деления на $D(\alpha)$ дадут мероморфные функции, обозначенные $\mathrm{M}_p(\alpha)$. Их нулями являются $\pm z_m(p)$. Здесь в случае этажности берутся знаки избранного этажа.

Примем компоненты вектора правой части $\mathbf{f}(x)$ системы интегральных уравнений (1.1) в форме $A_p(\eta)e^{-i\eta x}$, $p = 1, 2, \ldots, N$, $\operatorname{Im}\eta = 0$. Такие значения компонент позволяют получать произвольные правые части системы интегральных уравнений, применяя преобразования Фурье, в форме

$$f_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_p(\eta)e^{-i\eta x}d\eta, \quad p = 1,2,\ldots,N. \tag{1.3}$$

Здесь $A_p(\eta)$ — преобразования Фурье функций $f_p(x)$.

Примером подобной матрицы-функции для $N = 2$ служит смешанная задача в случае колебания слоя с закрепленной нижней гранью. Элементы матрицы-функции имеют представление

$$\begin{gathered} M(u) = \frac{\chi_2^2\left(\sigma_2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1 - \sigma_1^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2\right)}{2u^2\Delta(u)}, \quad N(u) = \frac{2\operatorname{sh} 2\sigma_2}{u^2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_2}, \\ R(u) = \frac{\chi_2^2\left(\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - \sigma_2^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1\right)}{2\Delta(u)}, \quad P(u) = \frac{\xi}{\Delta(u)}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \xi = {} & \left(2u^2 - 0{,}5\chi_2^2\right)\left(1 - \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2\right) + \\ & + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\left[2u^4 - u^2\left(1{,}5\chi_2^2 + \chi_1^2\right) + \chi_2^2\chi_1^2\right] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(u) = {} & u^2\left(2u^2 - \chi_2^2\right) - \left(2u^4 - u^2\chi_2^2 + 0{,}25\chi_2^4\right) \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 + \\ & + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2\left[2u^4 - u^2\left(2\chi_2^2 + \chi_1^2\right) + \chi_1^2\chi_2^2 + 0{,}25\chi_2^4\right] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2. \end{aligned}$$

$$\chi_1^2 = \rho(\lambda+2\mu)^{-1}\omega^2, \quad \chi_2^2 = \rho\mu^{-1}\omega^2, \quad \sigma_n = \sqrt{u^2 - \chi_n^2},$$
$$u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad n = 1, 2$$

Статический случай этой же задачи

$$M(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u + 4u)}{u^2\Delta}, \quad N(u) = \frac{2\operatorname{sh} 2u}{u^3 \operatorname{ch} 2u},$$
$$P(u) = -\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2}{u\Delta}, \quad R(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u - 4u)}{\Delta},$$
$$\Delta = u\left[(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u + 4u^2 + 4(1-\nu)^2\right].$$

В приведенных формулах сохранены обозначения, принятые в [5].

В (1.4) могут использоваться разложения (1.3).

2. О преобразованиях системы интегральных уравнений

Для привлечения к исследованию нового универсального метода моделирования [21] представим систему интегральных уравнений Винера–Хопфа, с учетом свойств элементов матриц-функций, в координатном виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{mp}(\alpha)\Phi_p(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = f_m(x). \tag{2.1}$$

Тогда с учетом свойств целых функций, имеющих счетные количества нулей, например (1.4), имеем [23]

$$k_{mp}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{mp}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad K_{mp}(\alpha) = \frac{L_{mp}(\alpha)}{D(\alpha)}, \quad f = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\},$$

$$L_{mp}(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} L_{mpn}(\alpha), \quad K_{mp}(\alpha) = \frac{L_{mp}(\alpha)}{D(\alpha)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{L_{mpn}(\alpha)}{D_n(\alpha)},$$
$$L_{mpn}(\alpha) = (\alpha^2 - \tau^2_{mpn}), \quad D_n(\alpha) = (\alpha^2 - \xi^2_n).$$

Здесь τ_{mpn} — нули целых функций, представляющих числители элементов матрицы, которые могут не совпадать с нулями определителя.

Перейдем к формулировке приведенных интегральных уравнений Винера–Хопфа в форме системы дифференциальных уравнений, имеем

$$\sum_{p=1}^{N} \prod_{n=1}^{\infty} L_{mpn}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_p(x) = \prod_{s=1}^{N} D_s\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) f_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

$$L_{mpn}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tau^2_{mpn}, \quad D_p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi^2_r.$$

Если представить правые части уравнений (2.1) интегралом Фурье,

$$\prod_{s=1}^{N} D_s(i\frac{\partial}{\partial x}) f_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_m(\eta) e^{-i\eta x} d\eta,$$

то не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением в виде

$$F_m(\eta) e^{-i\eta x}.$$

Таким образом, считая, что параметр η не совпадает ни с одним ξ_r, дифференциальные операторы не изменяют экспоненту и правые части в дифференциальном уравнении остаются экспоненциальными с измененным коэффициентом.

Применим к системе дифференциальных уравнений преобразование Галеркина [21]. Для этого построим определители, содержащие новые неизвестные функции χ_p и операторы

$$\varphi_1(x) = \begin{Vmatrix} \chi_1 & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ \chi_2 & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ \chi_N & L_{2N} & \cdots & L_{NN} \end{Vmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{Vmatrix} L_{11} & \chi_1 & \cdots & L_{1N} \\ L_{12} & \chi_2 & \cdots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ L_{1N} & \chi_N & \cdots & L_{NN} \end{Vmatrix}, \dots,$$

$$\varphi_N(x) = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & \chi_1 \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & \chi_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ L_{1N} & L_{2N} & \cdots & \chi_N \end{Vmatrix}.$$

В результате вычислений и упрощений для определения функций χ_p получаются следующая система N независимых дифференциальных уравнений

$$L\chi_p = 0, \quad L = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1M} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ L_{1M} & L_{2M} & \cdots & L_{MM} \end{Vmatrix}. \tag{2.2}$$

Раскрыв определитель и осуществив возможные преобразования, получаем дифференциальные уравнения, не зависящее от порядка его вычисления, поскольку все элементы — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, коммутируют.

Получим N бесконечных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описываемых единственным дифференциальным оператором, вытекающим из определителя всей системы интегральных уравнений Винера–Хопфа. Раскрыв определитель, получим целую функцию, аргументом которой, в соответствии с условиями задачи, будет произведение дифференциальных операторов второго порядка вида

$$L = \prod_{n=1}^{\infty} G_n, \quad G_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + z_n^2.$$

Отсюда следует, что однородное уравнение (2.2) для каждой функции χ_p имеет вид

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_p = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, N.$$

В связи с коммутацией операторов G_n, среди которых в силу однократности нулей z_n нет повторяющихся, заключаем, что общий вид решения однородного уравнения для функций χ_p на положительной полуоси состоит из решений однородных уравнений

$$G_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_{pn} = 0$$

и имеет вид

$$\chi_p = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{pn} e^{iz_m x}, \quad p = 1, 2, \ldots, N.$$

Наличие у системы интегральных уравнений правых частей приводит систему дифференциальных уравнений к неоднородным. Для поиска частного решения неоднородного дифференциального уравнения будем искать решение системы для вектора $\mathbf{f}(x) = \left\{A_p(\eta)e^{-i\eta x}\right\}$ правой части (1.3) в следующем виде

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p e^{-i\eta x} + \sum_{m=1}^{\infty} y_{pm} e^{iz_{mp} x}, \quad p = 1{,}2, \ldots, N.$$

Здесь B_p, y_{pm} не зависят от x.

В результате преобразований с учетом свойства элементов матрицы-функции, аналогичных выполненным в [2, 15, 16], получим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, которые можно представить в векторном виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{AY} = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{AC}_p\mathbf{Y} = \mathbf{F}_p, \quad p = 1, 2, \ldots, N, \quad \mathbf{Y} = \{y_m\}, \\
\mathbf{A} = \left\| \frac{1}{\xi_r - z_m} \right\|, \quad \mathbf{F}_p = \left\{ -\frac{B_p}{\eta + \xi_r} \right\}, \\
\mathbf{C}_p = \|c_{mm}(p)\|, \quad \mathbf{C}_p^{-1} = \left\|c_{mm}^{-1}(p)\right\|, \\
c_{mm}(1) = 1
\end{gathered} \tag{2.3}$$

В результате преобразований, в (2.3) представлено N совокупностей T_p бесконечных алгебраических уравнений, причем вместе совокупности содержат бесконечное множество неизвестных, эквивалентное числу нулей, входящих в полное объединение $\cup W_n$. В свою очередь, каждая совокупность T_p содержит бесконечное число уравнений, эквивалентное числу нулей в W_p, равное их числу в целой функции $D(\alpha)$. Преобразуем полную систему бесконечных уравнений таким образом, чтобы расщепить ее на совокупности T_p уравнений, которые содержат число неизвестных, эквивалентное числу уравнений, входящих в эту совокупность.

Построенные таким образом бесконечные системы алгебраических уравнений оказываются независимыми и эквивалентными системе бесконечных уравнений N совокупностей T_p.

Выводы

Таким образом, системы интегральных уравнений Винера–Хопфа произвольного конечного порядка преобразованы универсальным методом моделирования таким образом, что допускают применения к ним специального метода факторизации. Этот метод в сочетании с преобразованием Галеркина позволит строить точные решения для систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, описывающих поведение многокомпонентных наночастиц.

Литература [References]

1. Freund, L.B., *Dynamic Fracture Mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
2. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Наука, Москва (1974). [Vorovich I.I., Aleksandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical mixed problems of elasticity theory.* Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)]
3. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.* Наука, Москва (1999). [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media.* Nauka, Moscow, 1999. (in Russian)]
4. Храпков, А.А., Решения задач в замкнутой формы об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричной выемкой на вершине. *ПММ*, 1971, т. 35, с. 1009–1016. [Khrapkov, A.A., Solutions of problems in closed form on the elastic equilibrium of an infinite wedge with an asymmetric notch at the top. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, pp. 1009–1016. (in Russian)]
5. Achenbach, J.D., *Wave propagation in Elastic Solids.* North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1973.
6. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Наука, Москва, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
7. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., Динамика неоднородных линейно-упругих сред. Наука, Москва, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F., *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear elastic media.* Nauka, Moscow, 1989. (in Russian)]
8. Abrahams, I.D., Wickham, G.R., General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, pp. 819–838. DOI 10.1137/0150047
9. Norris, A.N., Achenbach, J.D., Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material. *Q. J. Apple. Math. Mech.*, 1984, vol. 37, pp. 565–580. DOI 10.1093/qjmam/37.4.565
10. Sautbekov, S., Nilsson, B., Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener-Hopf method. *AIP Conf. Proc.*, 2009, vol. 1106, pp. 110–117. DOI 10.1063/1.3117085
11. Нобл, Б.: Метод Винера-Хопфа. ИЛ, Москва, 1962. [Noble B. *Metod Vinera-Khopfa = Wiener-Hopf method.* Inostrannaya literatura, Moscow, 1962. (in Russian)]
12. Chakrabarti, A., George, A.J., Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Appl. Math. Lett.*, 1994, vol. 7, pp. 43–47. DOI 10.1016/0893-9659(94)90070-1
13. Davis, A.M.J., Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1987, vol. 39, pp. 25–55. DOI 10.1080/03091928708208804
14. Payandeh Najafabadi, A.T., Kucerovsky, D., Exact solutions for a class matrix Riemann-Hilbert problems. *IMA J. of Appl. Math.*, 2014, vol. 79, pp. 109–123. DOI 10.1093/imamat/hxs044
15. Эскин, Г.И., *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* Наука, Москва (1973). [Eskin, G.I., *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh uravneniy = Boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations.* Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]
16. Бабешко, В.А., *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости.* Наука, Москва, 1984. [Babeshko, V.A., *Obobshchennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskih smeshannyh zadachah teorii uprugosti = Generalized method of factorization in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory.* Nauka, Moscow, 1984. (in Russian)]

17. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., The Hilbert-Wiener factorization problem and block element method. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, no. 12, pp. 591–595. DOI 10.1134/S1028335814120052
18. Гахов, Ф.Д., *Краевые задачи.* Наука, Москва (1977). [Gakhov, F.D., *Kraevye zadachi = Boundary value problems.* Nauka, Moscow (1977). (in Russian)]
19. Мусхелишвили, Н.И., *Сингулярные интегральные уравнения.* Наука, Москва (1962). [Muskhelishvili, N.I., *Singulyarnye integral'nye uravneniya = Singular integral equation.* Nauka, Moscow (1962). (in Russian)]
20. Гохберг, И.Ц., Крейн, М.Г., Системы интегральных уравнений на полупрямой, с ядрами, зависящие от разности аргументов. *Успехи математических наук*, 1958, т. 13, вып. 2, с. 3–72. [Gokhberg, I.Ts., Krein, M.G., Systems of integral equations on the half-line, with kernels, depending on the difference of the arguments. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1958, vol. 13, iss. 2, pp. 3–72. (in Russian)]
21. Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Leipzig-Berlin, 1924.
22. Wiener, N., Hopf, E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. In *S.B. Preuss. Akad. Wiss.*, Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1931, p. 696–706.
23. Idemen, M., A new method to obtain exact solutions of vector Wiener-Hopf equations. *ZAMM*, 1979, vol. 59, pp. 656–658.
24. Litvinchuk, G.S., Spitkoskii, I.M., *Factorization of measurable matrix functions.* Boston, Birkhäuser Verlag Basel, 1987.
25. Адуков, В.М., Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций. *Алгебра и анализ*, 1992, т. 4, вып. 1, pp. 54–74. [Adukov, V.M., Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *Algebra i analiz = Algebra and Analysis*, 1992, vol. 4, no. 1, pp. 54–74. (in Russian)]
26. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *ДАН*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740021040039
27. Мандельброт, Б., *Фрактальная геометрия природы.* Институт компьютерных исследований, Москва, 2002. [Mandelbrot, B., *Fraktal'naya geometriya prirody = The Fractal Geometry of Nature.* Institute for Computer Research, Moscow, 2002. (in Russian)]
28. Маркушевич, А.И., *Теория аналитических функций.* Т. 2. Наука, Москва, 1968. [Markushevich, A.I., *Teoriya analiticheskikh funktsiy = Theory of analytic functions.* Vol. 2. Nauka, Moscow, 1968. (in Russian)]