

УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-4-37-47

Разработка метода оценки стабильности трещины нового типа, условий разрушения среды и разложимости по простым решениям

О. М. Бабешко [✉], О. В. Евдокимова , В. А. Бабешко , Е. М. Горшкова ,
В. С. Евдокимов, А. Г. Зарецкий, О. А. Бушуева

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Ольга Мефодиевна; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Аннотация. В работе с применением ранее разработанного авторами универсального метода моделирования, проведен углубленный анализ трещин нового типа. Разработан метод построения интегральных уравнений нового типа и предложены методы их решения. Выявлены новые особенности трещин нового типа и описан подход, позволяющий выполнять исследование трещин нового типа в средах сложных реологий. В основе подхода лежат метод блочного элемента, разложимость решений сложных граничных задач по решениям граничных задач для более простых уравнений Гельмгольца, факторизационные методы. В результате исследования выявляются особенности разрушения среды трещинами нового типа и характер возбуждаемых при гармонических колебаниях волновых полей напряжений. В работе, на примере уравнений Ламе, показано, каким образом сформированные трещины нового типа будут переноситься в среды более сложных реологии применение решений для сред более простых реологий.

Ключевые слова: трещины нового типа, блочные элементы, факторизация, интегральные уравнения, внешние формы, уравнения Ламе.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00213).

Цитирование: Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Горшкова Е. М., Евдокимов В. С., Зарецкий А. Г., Бушуева О. А. Разработка метода оценки стабильности трещины нового типа, условий разрушения среды и разложимости по простым решениям // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 37–47. DOI 10.31429/vestnik-19-4-37-47

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 20 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Development of a Method for Assessing the Stability of a New Type of Crack, the Conditions of Destruction of the Medium and Decomposability by Simple Solutions

O. M. Babeshko [✉], O. V. Evdokimova, V. A. Babeshko, E. M. Gorshkova, V. S. Evdokimov,
A. G. Zaretsky, O. A. Bushueva

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga M. Babeshko; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. In the work with the application of the universal modeling method previously developed by the authors, an in-depth analysis of cracks of a new type was carried out. A method for constructing integral equations of a new type has been developed and methods for solving them have been proposed. New features of cracks of a new type are revealed and an approach is described that allows the study of cracks of a new type in environments of complex rheologies. The approach is based on the block element method, decomposability of solutions of complex boundary value problems by solutions of boundary value problems for simpler Helmholtz equations, factorization methods. As a result of the study, the features of the destruction of the medium by cracks of a new type and the nature of the stresses excited by harmonic oscillations of wave fields are revealed. In this paper, using the example of the Lamé equations, it is shown how the formed cracks of a new type will be transferred to environments of more complex rheology using solutions for environments of simpler rheologies.

Keywords: new type cracks, block elements, factorization, integral equations, external forms, Lamé equations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-29-00213).

Cite as: Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Babeshko V. A., Gorshkova E. M., Evdokimov V. S., Zaretsky A. G., Bushueva O. A. Development of a method for assessing the stability of a new type of crack, the conditions of destruction of the medium and decomposability by simple solutions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 37–47. DOI 10.31429/vestnik-19-4-37-47

Received 15 November 2022. Revised 20 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Трещины нового типа, дополняющие трещины Гриффитса, были обнаружены при изучении разломов литосферных плит, сближающихся торцами при встречном движении по границе Конрада [1–3]. В процессе исследования в качестве моделей литосферных плит были приняты плиты Кирхгофа. В настоящей работе для изучения поведения трещин нового типа в условиях гармонических колебаний применяется ранее разработанный авторами подход, позволяющий построить интегральные уравнения теории трещин нового типа, которые позволяют изучить их волновые свойства. Этот подход допускает обобщения на термоэлектроупругие (или иной реологии) плиты, содержащие трещины нового типа. Трещины нового типа были выявлены в сейсмологии в результате изучения встречного движения полубесконечных литосферных плит по границе Конрада, разделяющей кору Земли на гранитную и базальтовую [1–3]. Предполагалось, что литосферные плиты сближаются торцами, создавая при этом разлом прямоугольной формы. Он отличается от трещин Гриффитса [4], имеющих гладкую границу, наличием угловых точек, приводящих к иному механизму разрушения среды. Именно при их близости в зонах контакта угловых точек с основанием возникают концентрации контактных напряжений. При окончательном сближении концентрация напряжений перерастает в сингулярную, приводящую к стартовым землетрясениям. Таким образом, построение интегральных уравнений трещин нового типа предполагает описание процесса сближений деформируемых объектов на деформируемом основании с вертикальными торцами или наличие в среде полости прямоугольной формы. При сближении их сторон, до взаимодействия торцами, возникает в зоне краев сингулярная концентрация контактных напряжений.

Примеры самых разных направлений исследований и подходов опубликованы в работах [5–17]. Среди этих работ особое место занимают работы, связанные с привлечением к исследованию математических средств высокого уровня, позволяющих не только получить углубленные результаты процессов разрушения, но и охватить широкий круг проблем теории трещин. В работе [18] изложена теория построения интегральных уравнений трещин нового типа и методы их решения. Для углубленного исследования поведения волновых полей в случае гармонического колебания структуры, содержащей трещины нового типа, используется подход построения интегральных уравнений и их решений, разработанный авторами [18, 19].

1. Граничная задача

Следуя развитым ранее авторами методам [18, 19], рассмотрим многослойную линейно деформируемую среду, находящуюся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1 , ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty)$ и $\Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ деформируемые объекты, которые в соответствии с подходом универсального метода моделирования, описываются уравнениями

$$\begin{aligned} [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi_{-A}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty); \\ [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi_A(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A}(x_1, x_2) = \varphi(-A, x_2), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_A(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

Применив в уравнении (1.1) преобразование Фурье по координате x_2

$$\varphi(x_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром α_2 .

После упрощения, связанного с опусканием свободного параметра α_2 , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_{-A}(x_1) &= g_{-A}(x_1), \quad \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A), \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \\ (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_A(x_1) &= g_A(x_1), \quad \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty), \\ g_{-A}(x_1) &= q_{-A}(x_1) - t_{-A}(x_1), \quad g_A(x_1) = q_A(x_1) - t_A(x_1), \\ \varphi(x_1) &= \varphi(x_1), \quad g(x_1) = g(x_1), \quad \varphi(x_1) = \varphi(\pm A), \quad x_1 \rightarrow \pm A, \\ \varphi_{-A}(x_1) &= \varphi(-A), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_A(x_1) = \varphi(A), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь q_A и q_{-A} — контактные напряжения, действующие на деформируемые тела, описываемые граничными задачами для уравнений Гельмгольца со стороны многослойной среды, а t_A и t_{-A} являются внешними давлениями сверху.

2. Блочные элементы деформируемых тел

Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (1.2). Для этого можно применить метод, изложенный в [19]. В результате применения к (1.2) получим внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{-A}(\alpha_1) &= -i(\alpha_1 + k) \varphi_{-A}(-C) e^{-i\alpha_1 C} + Q_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)C} - \\ &\quad - Q_{-A}(\alpha_1) - T_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)C} + T_{-A}(\alpha_1); \end{aligned}$$

$$\omega_A(\alpha_1) = i(\alpha_1 - k) \varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - Q_A(\alpha_1) - T_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} + T_A(\alpha_1).$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье строчных букв заглавными

$$\varphi(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

С помощью построенных внешних форм перемещения тел можно представить упакованными блочными элементами в виде

$$\varphi_r(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad \varphi_r(\alpha_1) = \frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)},$$

$$r = A, -A, \quad N(\alpha_1) = (\alpha^2 - k^2).$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся мембраны, имеет вид

$$u_r(x_1, x_2) = \iint_{\Omega_{-A}} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \iint_{\Omega_A} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad (2.1)$$

$$r = A, -A, \quad \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2$$

или

$$u_r(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) q_r(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = O(v^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty.$$

Здесь $K(\alpha_1, \alpha_2)$ — четная по обоим переменным аналитическая функция двух комплексных переменных α_k , в частности мероморфная, ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

В результате применения к двумерному интегральному уравнению (2.1) преобразование Фурье по координате x_2 получим соотношения вида

$$u_r(x_1) = \int_{-\infty}^{-A} k(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} k(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1,$$

$$k(x_1) = k(x_1, \alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1, \alpha_2),$$

$$k(x_1) = k(x_1, \alpha_2), \quad k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,$$

$$K(\alpha_1) = K(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_r(x_1) = u_r(x_1, \alpha_2).$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей $z_m, m = 1, 2, \dots, M$ и полюсов $\xi_n, n = 1, 2, \dots, N$. В этом случае представление ядра интегрального уравнения описывается контурным интегралом, обходящим области расположения полюсов, положительные — снизу, отрицательные сверху [20]

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} K(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Приравнивая перемещения объектов в зоне контакта, имеем соотношения

$$K(\alpha_1) Q_{-A}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} [-Q_{-A}(\alpha_1) + S_{-A}],$$

$$[K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}] Q_{-A}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_{-A},$$

$$K(\alpha_1) Q_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} [-Q_A(\alpha_1) + S_A],$$

$$[K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}] Q_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_A,$$

$$S_{-A} = -i(\alpha_1 + k) \varphi_{-A}(-A) e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} - T_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} + T_{-A}(\alpha_1),$$

$$S_A = i(\alpha_1 - k) \varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - T_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} + T_A(\alpha_1).$$

В преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обеих контактных зон, имеем

$$K(\alpha_1)Q_{-A}^-(\alpha_1) + W(\alpha_1) + K(\alpha_1)Q_A^+(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_{-A}^- + S_A^+), \quad (2.2)$$

$$K(\alpha_1)Q_0^-(\alpha_1) + K(\alpha_1)Q_0^+(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_0^- + S_0^+). \quad (2.3)$$

С учетом аналитических свойств функций, в (2.2) (2.3) приняты обозначения

$$Q_{-A}^-(\alpha_1) \equiv Q_{-A}(\alpha_1), \quad S_{-A}^- \equiv S_{-A}(\alpha_1) \quad Q_A^+(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S_A^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1).$$

Знак плюс означает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а минус — в нижней. Здесь в (2.3) $W(\alpha_1)$ — преобразование Фурье перемещений в зоне поверхности, находящейся между зонами контакта Ω_r , $r = -A, A$. Функциональные уравнения (2.2), (2.3) позволяют моделировать трещины нового типа для любых конечных расстояний $2A$ между берегами. В (2.3) представлено функциональное уравнение для случая $A = 0$ в предположении, что мембраны сошлись торцами, но не взаимодействуют друг с другом, сохраняя заданные на торцах граничные воздействия. Образовавшаяся «трещина нового типа» вызывает в зоне сближения сингулярные концентрации контактных напряжений [1–3], разрушая среду. Таким является механизм разрушения среды трещинами нового типа. Однако разрушение может происходить и раньше в результате сближения торцов на достаточно близкое расстояние. Соотношения (2.2), (2.3) представляют обобщенные функциональные уравнения типа Винера–Хопфа относительно неизвестных $Q_{-A}^-(\alpha_1)$, $Q_A^+(\alpha_1)$, $W(\alpha_1)$, а также функционалов $Q_{-A}(-k)$, $Q_A(k)$, входящих в правые части уравнений. Для их исследования строятся интегральные уравнения.

3. О свойствах трещин нового типа

Функциональные уравнения (2.2), (2.3) методом, изложенным в [20], приводятся к интегральным уравнениями вида

$$X_-(\alpha_1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{K_-(\xi)X_+(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi - \alpha_1)} d\xi = \{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_{-C}^- e^{-i\alpha_1 C}\}^-, \quad \text{Im } \alpha_1 < 0;$$

$$X_+(\alpha_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{K_+(\xi)X_-(\xi)e^{-i\xi 2A}}{K_-(\xi)(\xi - \alpha_1)} d\xi = \{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_A^+ e^{i\alpha_1 A}\}^+, \quad \text{Im } \alpha_1 > 0.$$

Здесь введены новые неизвестные

$$K_-(\alpha_1)Q_{-A}^-(\alpha_1)e^{i\alpha_1 A} = X_-(\alpha_1), \quad K_+(\alpha_1)Q_A^+(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 A} = X_+(\alpha_1)$$

и обозначение, заимствованное из [20]

$$\{R(\alpha_1)\}^{\pm} = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi - \alpha_1} d\xi, \quad \pm \text{Im } \alpha_1 > 0.$$

Взяв неизвестные $Y_1(\alpha_1) = X_+(\alpha_1) + X_-(\alpha_1)$, $Y_2(\alpha_1) = X_+(\alpha_1) - X_-(\alpha_1)$, приводим систему интегральных уравнений к отдельным уравнениям вида

$$Y_2(\alpha_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{K_-(\xi)Y_2(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi + \alpha_1)} d\xi = \\ = \{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_A^+ e^{i\alpha_1 A}\}^+ - \{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_{-A}^- e^{-i\alpha_1 A}\}^-;$$

$$Y_1(\alpha_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{K_-(\xi)Y_1(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi + \alpha_1)} d\xi =$$

$$= \{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_A^+ e^{i\alpha_1 A}\}^+ + \{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_{-A}^- e^{-i\alpha_1 A}\}^+,$$

$$\text{Im } \alpha_1 \geq 0.$$

Под интегралами справа находятся аналитические функции, поэтому интегральные операторы в правой части описываются интегралами Дирихле. Детально изучив свободные члены, получаем оценки вида

$$Y_1, Y_2 = O(\alpha_1^{-1}), \quad |\alpha_1| \rightarrow \infty.$$

Это свойство позволило выявить концентрацию контактных напряжений в зоне торцов деформируемого объекта. Концентрации описываются функциями [19, 20]

$$q_{-A}(x_1) = \frac{C_{-A}}{(-A - x_1)^{0,5}}, \quad x_1 < -A; \quad q_A(x_1) = \frac{C_A}{(x_1 - A)^{0,5}}, \quad x_1 > A.$$

При $A \rightarrow 0$ имеющиеся особенности сходятся, и как доказано в [1–3], приводят к сингулярной концентрации контактных напряжений, вызывая разрушение среды, как ножницами. Этим отличаются трещины нового типа от трещин Гриффитса, разрушающих среду разрывом на границе трещины ее поверхности.

Получив представление общего решения интегральных уравнений,

$$q_{-A}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} K_{1-}^{-1}(\alpha_1)X_-(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 A}e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1, \quad x_1 < -A;$$

$$q_A(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} K_{1+}^{-1}(\alpha_1)X_+(\alpha_1)e^{i\alpha_1 A}e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1, \quad x_1 > A,$$

имеем возможность изучить поведение волнового поля контактных напряжений в областях контакта.

Здесь учтено, что в процессе перехода от функциональных уравнений к интегральным функция $K(\alpha_1)$ изменится и примет вид

$$K_1(\alpha_1) = K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}.$$

Поэтому оговоренные выше нули и полюса у нее изменятся

$$K_1(\alpha_1) = S(\alpha_1)K_0(\alpha_1), \quad S(\alpha_1) = D^{-1}(\alpha_1)R(\alpha_1),$$

$$R(\alpha_1) = \prod_{m=1}^M (\alpha_1^2 - z_{1m}^2), \quad D(\alpha_1) = \prod_{n=1}^N (\alpha_1^2 - \xi_{1n}^2).$$

В результате факторизации относительно контура γ , имеем

$$K_{1\pm}(\alpha_1) = S_{\pm}(\alpha_1)K_{0\pm}(\alpha_1), \quad R_{\pm}(\alpha_1) = \prod_{m=1}^M (\alpha_1 \pm z_{1m}), \quad D_{\pm}(\alpha_1) = \prod_{n=1}^N (\alpha_1 \pm \xi_{1n}).$$

Вычисляя интегралы Дирихле (4.1) по теории вычетов, получаем для волновых полей контактных напряжений представления

$$q_{-A}(x_1) \sim \sum_{m=1}^M \sigma_{m-} e^{-iz_{1m}(x_1+A)}, \quad x_1 < A, \quad q_A(x_1) \sim \sum_{m=1}^M \sigma_{m-} e^{iz_{1m}(x_1-A)}, \quad x_1 > A.$$

Таким образом, фазовые скорости направлены на бесконечности и в них учитываются механические свойства среды, в которой расположена трещина нового типа.

4. Разложение решения векторной плоской задачи для уравнения Ламе с помощью разложений по скалярным

Уравнения Ламе как в статическом, так и в динамическом случаях обладают давно установленным свойством представления решения в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих, получаемых также применением преобразования Галеркина. Воспользуемся применявшимся в [21] разложением решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \partial_1 \varphi(x_1, x_2) + \partial_2 \psi(x_1, x_2), \\ u_2(x_1, x_2) &= \partial_2 \varphi(x_1, x_2) - \partial_1 \psi(x_1, x_2), \\ \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} (\Delta - p_1^2)\varphi &= 0, \quad (\Delta - p_2^2)\psi = 0, \quad p_1^2 = k_1^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad p_2^2 = k_1^2\mu^{-1}, \\ \varphi(x_1, 0) &= f_1(x_1, 0), \quad \varphi(0, x_2) = f_2(0, x_2), \\ \psi(x_1, 0) &= g_1(x_1, 0), \quad \psi(0, x_2) = g_2(0, x_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Функции $f_m, g_m, m = 1, 2$, в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области Ω .

Рассматривается случай граничной задачи Ламе первого рода. На осях координат задаются условия вида $\sigma_1(0, x_2), \tau_1(0, x_2), \sigma_2(x_1, 0), \tau_2(x_1, 0)$

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при $x_1 \rightarrow 0$ вида

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi(x_1, x_2) + \partial_2 \psi(x_1, x_2) &= \sigma_1(0, x_2), \\ \partial_2 \varphi(x_1, x_2) - \partial_1 \psi(x_1, x_2) &= \tau_1(0, x_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Аналогично при $x_2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi(x_1, x_2) + \partial_2 \psi(x_1, x_2) &= \sigma_2(x_1, 0), \\ \partial_2 \varphi(x_1, x_2) - \partial_1 \psi(x_1, x_2) &= \tau_2(x_1, 0). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для решения граничной задачи для уравнений Ламе с граничными условиями (4.3), (4.4) строятся решения краевых задач для уравнений Гельмгольца при произвольных граничных условиях (4.2). Применяется использование метода блочного элемента, который описан в ряде работ авторов [21]. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле решения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_1^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ \psi(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_2^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ \varphi(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \sum_{j=1}^2 (\alpha_{3-j} - \alpha_{(3-j)1+}) \langle F_j(\alpha_j) - F_j(\alpha_{j1+}) \rangle e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \frac{id\alpha_1 d\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_1^2}, \\ \psi(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \sum_{j=1}^2 (\alpha_{3-j} - \alpha_{(3-j)2+}) \langle G_j(\alpha_j) - G_1(\alpha_{j2+}) \rangle e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \frac{id\alpha_1 d\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_2^2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2},$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2}.$$

Разрезы у многозначных функций диктуются требованием выполнения автоморфизмов [21]. В соответствии с построением для приведенных блочных элементов справедливы свойства (4.2). Используя их, введем следующие обозначения решений уравнений Гельмгольца:

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv \varphi[x_1, x_2, f_1(\xi_1, 0), f_2(0, \xi_2)] \rightarrow f_1(x_1, 0), \quad 0 < x_2 \ll 1;$$

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv \varphi[x_1, x_2, f_1(\xi_1, 0), f_2(0, \xi_2)] \rightarrow f_2(0, x_2), \quad 0 < x_1 \ll 1;$$

$$\psi(x_1, x_2) \equiv \psi[x_1, x_2, g_1(\xi_1, 0), g_2(0, \xi_2)] \rightarrow g_1(x_1, 0), \quad 0 < x_2 \ll 1;$$

$$\psi(x_1, x_2) \equiv \psi[x_1, x_2, g_1(\xi_1, 0), g_2(0, \xi_2)] \rightarrow g_2(0, x_2), \quad 0 < x_1 \ll 1.$$

В более ранних работах авторов интегро-дифференциальным методом построено решение граничной задачи второго рода для уравнений Ламе. Точное его решение в первом квадранте имеет вид [21]

$$u_1(x_1, x_2) = \partial_1 \left\langle \varphi_1 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_1(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_1(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} F(\xi_2) \right] + \right. \\ \left. + \varphi_2 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_2(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} D(\xi_1), \frac{1}{2} \partial_2^{-1} u_2(0, \xi_2) \right] \right\rangle + \\ + \partial_2 \left\langle \psi_1 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} C(\xi_1), \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(0, \xi_2) \right] - \right. \\ \left. - \psi_2 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} E(\xi_2) \right] \right\rangle; \quad (4.6)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \partial_2 \left\langle \varphi_1 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_1(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{-1} u_1(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} F(\xi_2) \right] + \right. \\ \left. + \varphi_2 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_2(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} D(\xi_1), \frac{1}{2} \partial_2^{-1} u_2(0, \xi_2) \right] \right\rangle - \\ - \partial_1 \left\langle \psi_1 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} C(\xi_1), \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(0, \xi_2) \right] - \right. \\ \left. - \psi_2 \left[x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} E(\xi_2) \right] \right\rangle; \quad (4.7)$$

$$C(x_1) = \partial_2 \partial_1^{(-1)} u_1(x_1, 0) - \partial_1 \partial_2^{(-1)} u_1(x_1, 0), \quad D(x_1) = \partial_2 \partial_1^{(-1)} u_2(x_1, 0) - \partial_1 \partial_2^{(-1)} u_2(x_1, 0),$$

$$E(x_2) = \partial_1 \partial_2^{(-1)} u_2(0, x_2) - \partial_2 \partial_1^{(-1)} u_2(0, x_2), \quad F(x_2) = \partial_1 \partial_2^{(-1)} u_1(0, x_2) - \partial_2 \partial_1^{(-1)} u_1(0, x_2).$$

Ниже воспользуемся им для решения поставленной задачи Ламе первого рода с граничными условиями (4.3), (4.4). Для этого осуществим ряд преобразований. В граничных условиях введем новые переменные, положив для $\sigma_1(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_1(0, x_2)$, $\tau_1(x_1, x_2) \rightarrow \tau_1(0, x_2)$, $x_1 \ll 1$,

$$x_1 = (2b_1)^{-1}(z_1 + y_1), \quad x_2 = (2b_2)^{-1}(z_1 - y_1).$$

Аналогично, для

$$\sigma_2(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_2(x_1, 0), \quad \tau_2(x_1, x_2) \rightarrow \tau_2(x_1, 0), \quad x_2 \ll 1$$

примем

$$x_1 = (2b_2)^{-1}(z_2 + y_2), \quad x_2 = (2b_1)^{-1}(z_2 - y_2).$$

В результате получим представления

$$(b_1x_1 - b_2x_2) = y_1, \quad (b_1x_1 + b_1x_2) = z_1, \quad (b_2x_1 - b_1x_2) = y_2, \quad (b_2x_1 + b_1x_2) = z_2, \\ b_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)\mu}, \quad b_2 = \sqrt{\mu\lambda}, \tag{4.8}$$

$$\partial_{y_1} = (b_1\partial_1 - b_2\partial_2), \quad \partial_{z_1} = (b_1\partial_1 + b_2\partial_2), \quad \partial_{y_1}\partial_{z_1} = (b_1^2\partial_1\partial_1 - b_2^2\partial_2\partial_2), \\ \partial_{y_2} = (b_2\partial_1 - b_1\partial_2), \quad \partial_{z_2} = (b_2\partial_1 + b_1\partial_2), \quad \partial_{y_2}\partial_{z_2} = (b_2^2\partial_1\partial_1 - b_1^2\partial_2\partial_2),$$

$$\sigma_1((2b_1)^{-1}(z_1 + y_1), (2b_2)^{-1}(z_1 - y_1)) \equiv \sigma_{10}(y_1, z_1), \\ \tau_1((2b_1)^{-1}(z_1 + y_1), (2b_2)^{-1}(z_1 - y_1)) \equiv \tau_{10}(y_1, z_1), \tag{4.9}$$

$$\sigma_2((2b_2)^{-1}(z_2 + y_2), (2b_1)^{-1}(z_2 - y_2)) \equiv \sigma_{20}(y_2, z_2), \\ \tau_2((2b_2)^{-1}(z_2 + y_2), (2b_1)^{-1}(z_2 - y_2)) \equiv \tau_{20}(y_2, z_2).$$

Как и в [21], для произвольной непрерывной функции $w(\xi, \eta)$ имеем соотношения

$$\partial_{y_n}^{(-1)}w(y_n, z_n) = \int_0^{y_n} w(\xi, \eta)d\xi, \quad \partial_{z_n}^{(-1)}w(y_n, z_n) = \int_0^{z_n} w(\xi, \eta)d\eta, \\ \partial_{y_n}\partial_{z_n} \int_0^{y_n} \int_0^{z_n} w(\xi, \eta)d\xi d\eta = w(y_2, z_2), \tag{4.10} \\ \partial_{y_n}\partial_{z_n}\partial_{y_n}^{(-1)}\partial_{z_n}^{(-1)}w(\xi, \eta)d\xi d\eta = W(y_2, z_2).$$

Заметим, что для вычисления производных или первообразных у граничных функций по параметрам, обратившимся в ноль, необходимо методом блочного элемента построить с их участием упакованные блочные элементы для уравнения Гельмгольца и вычислить требуемые значения в окрестности границы.

Внесем в (4.6), (4.7) вместо перемещений следующие соотношения

$$u_1(0, x_2) = \mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_{10}(y_1, z_1) - \lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_{10}(y_1, z_1), \\ u_2(0, x_2) = -\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_{10}(y_1, z_1) + (\lambda + 2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_{10}(y_1, z_1), \\ u_1(x_1, 0) = \mu\partial_1\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\sigma_{20}(y_2, z_2) - (\lambda + 2\mu)\partial_2\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\tau_{20}(y_2, z_2), \\ u_2(x_1, 0) = -\mu\partial_2\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\sigma_{20}(y_2, z_2) + \lambda\partial_1\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\tau_{20}(y_2, z_2).$$

Докажем, что построенные таким образом выражения представляют решение первой граничной задачи для уравнения Ламе в первом квадранте, разложенное с помощью упакованных блочных элементов.

Для этого, требуется убедиться в выполнении граничных условий (4.3). Ограничимся границей x_2 , на границе x_1 проверка производится аналогично. Зная, что для проверки выполнения граничного условия (2.2) для нормального напряжения на оси x_2 необходимо, используя (4.8), (4.9), (4.10), вычислить выражение $\sigma_1(0, x_2) = (\lambda + 2\mu)\partial_1u_1(0, x_2) + \lambda\partial_2u_2(0, x_2)$, получаем следующую последовательность преобразований

$$(\lambda + 2\mu)\partial_1u_1(0, x_2) + \lambda\partial_2u_2(0, x_2) = \\ = (\lambda + 2\mu)\partial_1 \left[\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) \right] + \\ + \lambda\partial_2 \left[-\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) + (\lambda + 2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) \right] = \\ = (\lambda + 2\mu)\partial_1\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \lambda\partial_2\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \\ - (\lambda + 2\mu)\partial_1\lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) + \lambda\partial_2(\lambda + 2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) = \\ = [(\lambda + 2\mu)\mu\partial_1\partial_1 - \lambda\mu\partial_2\partial_2] \partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) = \partial_{y_1}\partial_{z_1}\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) = \sigma_1(0, x_2).$$

Здесь принято во внимание соотношение $\partial_{y_1} \partial_{z_1} = (b_1^2 \partial_1 \partial_1 - b_2^2 \partial_2 \partial_2)$.

Рассмотрим случай заданных на границе касательных напряжений $\tau_1(0, x_2)$. Подставим в правую часть

$$\tau_1(0, x_2) = \mu \partial_2 u_1(0, x_2) + \mu \partial_1 u_2(0, x_2)$$

значения $u_1(0, x_2)$, $u_2(0, x_2)$, взятые из (4.6), (4.7). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \mu \partial_2 \left[\mu \partial_1 \partial_{y_1}^{(-1)} \partial_{z_1}^{(-1)} \sigma_1(0, x_2) - \lambda \partial_2 \partial_{y_1}^{(-1)} \partial_{z_1}^{(-1)} \tau_1(0, x_2) \right] + \\ & + \mu \partial_1 \left[-\mu \partial_2 \partial_{y_1}^{(-1)} \partial_{z_1}^{(-1)} \sigma_1(0, x_2) + (\lambda + 2\mu) \partial_1 \partial_{y_1}^{(-1)} \partial_{z_1}^{(-1)} \tau_1(0, x_2) \right] = \\ & = [(\lambda + 2\mu) \mu \partial_1 \partial_1 - \lambda \mu \partial_2 \partial_2] \partial_{y_1}^{(-1)} \partial_{z_1}^{(-1)} \tau_1(0, x_2) = \partial_{y_1} \partial_{z_1} \partial_{y_1}^{(-1)} \partial_{z_1}^{(-1)} \tau_1(0, x_2) = \tau_1(0, x_2). \end{aligned}$$

Здесь вновь использовано указанное выше соотношение.

Таким образом, достаточно просто осуществляется разложение решения граничной задачи первого рода для уравнения Ламе в первом квадранте по решениям граничных задач для уравнений Гельмгольца, описывающих вихревые и потенциальные процессы в первом квадранте.

Выводы

Таким образом, на базе нового универсального метода моделирования [19] предложен способ построения уравнений трещин нового типа, выполнен анализ механизма их разрушения и исследован характер возбуждаемых волн напряжений. На основании полученных результатов будет развиваться подход, позволяющий исследовать трещины нового типа в средах сложной реологии, граничные задачи которых описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Одновременно, на примере уравнений Ламе, показано, каким образом сформированные трещины нового типа будут переноситься в среды более сложных реологии применением решений для сред более простых реологий.

Литература [References]

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI 10.1007/s00707-017-2092-0
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko O.M., On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 11, pp. 4727–4739. DOI 10.1007/s00707-018-2255-7
3. Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина. *Доклады Академии наук*, 2019, vol. 485, №2, с. 34–38. [Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., A new type of cracks adding to Griffith-Irwin cracks. *Dokl. Phys.*, 2019, vol. 64, pp. 102–105. DOI 10.1134/S1028335819030042]
4. Griffith, A., VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 221, pp. 163–198. DOI 10.1098/rsta.1921.0006
5. Sator C., Becker W., Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions. *Arch. Appl. Mech.*, 2012, vol. 82, pp. 643–658. DOI 10.1007/s00419-011-0580-6
6. Irwin, G., Fracture dynamics. In *Fracture of metals*. ASM, Cleveland, 1948, p. 147–166.
7. Leblond, J.B., Frelat J., Crack kinking from an interface crack with initial contact between the cracks lips. *Euro. J. Mech. A. Solids*, 2001, vol. 20, pp. 937–951.
8. Loboda, V.V., Sheveleva, A.E., Determining prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, iss. 5, p. 566–572. DOI 10.1023/A:1025139625891
9. Loeber, J.F., Sih, G.C., Transmission of anti-plane shear waves past an interface crack in dissimilar media. *Engineering Fracture Mechanics*, 1973, vol. 146, pp. 699–725. DOI 10.1016/0013-7944(73)90048-9
10. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, iss. 5, pp. 735–749. DOI 10.1016/j.enganabound.2010.12.005

11. Mikhas'kiv, V.V., Butrak, I.O., Stress concentration around a spheroidal crack caused by a harmonic wave incident at an arbitrary angle. *Int. Appl. Mech.*, 2006, vol. 42, iss. 1, pp. 61–66. DOI [10.1007/s10778-006-0059-2](https://doi.org/10.1007/s10778-006-0059-2)
12. Rice, J.R., Elastic fracture mechanics concepts for interface cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, pp. 98–103. DOI [10.1115/1.3173668](https://doi.org/10.1115/1.3173668)
13. Zhang, Ch., Gross, D., *On wave propagation in elastic solids with cracks*. Comp. Mech. Publ., Southampton, UK, Boston, USA, 1998.
14. Морозов, Н.Ф., *Математические вопросы теории трещин*. Наука, Москва, 1984. [Morozov, N.F., *Matematicheskie voprosy teorii treshchin = Mathematical issues in crack theory*. Nauka, Moscow, 1984. (in Russian)]
15. Черепанов, Г.П., *Механика хрупкого разрушения*. Наука, Москва, 1974. [Cherepanov, G.P., *Mekhanika khrupkogo razrusheniya = A mechanics of brittle fracture*. Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)]
16. Kirugulige, M.S., Tippur H.V., Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp Mech.*, 2006, vol. 46, iss. 2, pp. 269–281. DOI [10.1007/s11340-006-5863-4](https://doi.org/10.1007/s11340-006-5863-4)
17. Huang, Y., Gao, H., Intersonic crack propagation – Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 76–80. DOI [10.1115/1.1410936](https://doi.org/10.1115/1.1410936)
18. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Об интегральных уравнениях трещин нового типа. *Вестник Санкт-Петербургского университета математика, механика, астрономия*, 2022, vol. 55, no. 3, pp. 267–274. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On integral equations for cracks of a new type. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta matematika, mekhanika, astronomiya = Bulletin of Saint Petersburg University Mathematics, Mechanics, Astronomy*, 2022, vol. 55, no. 3, pp. 267–274. (in Russian)] DOI [10.21638/spbu01.2022.302](https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.302)
19. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI [10.31857/S2686740021040039](https://doi.org/10.31857/S2686740021040039)
20. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Наука, Москва, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains*. Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
21. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики. *Доклады Академии наук*, 2020, т. 495, с. 34–38. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., The block element method in the expansion of solutions to complex boundary value problems in mechanics. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2020, vol. 495, p. 34–38. (in Russian)] DOI [10.31857/S2686740020060048](https://doi.org/10.31857/S2686740020060048)