







УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-4-57-67

Исследование возможности возникновения дискретного спектра в блочной структуре основания и штампа и характера волнового поля, излучаемого вне деформируемого штампа

О. В. Евдокимова  , О. М. Бабешко , В. А. Бабешко , Д. А. Хрипков , А. С. Мухин ,
В. С. Евдокимов, С. Б. Уафа

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Евдокимова Ольга Владимировна; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Аннотация. В ранее опубликованной работе авторов исследована постановка и решение контактной задачи с деформируемым штампом. Показана корректность постановки задачи, состоящая в возможности определения всех параметров решения, в частности возникающих в этих контактных задачах функционалов от искомым контактных напряжений. В настоящей работе продолжается исследование особенностей решений контактных задач с деформируемым штампом. В отличие от случая контактных задач с абсолютно твердым штампом, в случае деформируемых штампов могут появиться дискретные спектры у оператора смешанной задачи. В работе выявлены соотношения трансцендентного типа, которые могут содержать этот спектр. В случае полубесконечного деформируемого штампа это соотношение не содержит вещественных точек спектра. Изучен вопрос поведения волновых полей, возбуждаемых на поверхности полубесконечным деформируемым штампом. В основе исследования использовался недавно разработанный универсальный метод моделирования, допускающий применение как в граничных задачах для дифференциальных уравнений, так и в некоторых типах интегральных уравнений. Продемонстрировано построение упакованных блочных элементов в квадрантах декартовой системы координат.

Ключевые слова: контактная задача, деформируемый штамп, интегральное уравнение, многослойная среда, блочные элементы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00129).



Цитирование: Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А., Хрипков Д. А., Мухин А. С., Евдокимов В. С., Уафа С. Б. Исследование возможности возникновения дискретного спектра в блочной структуре основания и штампа и характера волнового поля, излучаемого вне деформируемого штампа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 57–67. DOI 10.31429/vestnik-19-4-57-67

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 22 ноября 2022 г. Принято 23 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Investigation of the Possibility of a Discrete Spectrum in the Block Structure of the Base and Stamp and the Nature of the Wave Field Emitted Outside the Deformable Stamp

O. V. Evdokimova  , O. M. Babeshko, V. A. Babeshko, D. A. Khripkov, A. S. Mukhin,
V. S. Evdokimov, S. B. Uafa

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga V. Evdokimova; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. In the previously published work of the authors, the formulation and solution of the contact problem with a deformable stamp is investigated. Correctness is shown the formulation of the problem, which consists in the possibility of determining all the parameters of the solution. In particular, the functionals arising in these contact problems from the desired contact voltages. In this paper, the study of the features of solutions of contact problems with a deformable stamp continues. In contrast to the case of contact problems with an absolutely solid stamp, in the case of deformable stamps, discrete spectra may appear

in the operator of a mixed problem. The paper identifies transcendental type relations that may contain this spectrum. In the case of a semi-infinite deformable stamp, this relation does not contain real points of the spectrum. The question of the behavior of wave fields excited on the surface by a semi-infinite deformable stamp is studied. The study was based on a newly developed universal modeling method that allows application both in boundary value problems for differential equations and in some types of integral equations. The construction of packed block elements in the quadrants of the Cartesian coordinate system is demonstrated.

Keywords: contact problem, deformable stamp, integral equation, multilayer medium, block elements.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00129).

Cite as: Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Babeshko V. A., Khripkov D. A., Mukhin A. S., Evdokimov V. S., Uafa S. B. Investigation of the possibility of a discrete spectrum in the block structure of the base and stamp and the nature of the wave field emitted outside the deformable stamp. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 57–67. DOI 10.31429/vestnik-19-4-57-67

Received 15 November 2022. Revised 22 November 2022. Accepted 23 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Для более полного исследования особенностей контактных задач с деформируемым штампом в работе анализируется возможность получения соотношений, описывающих появление точек дискретного спектра, который ранее был предсказан академиком И.И. Воровичем [1, 2]. Им было установлено, что отклонение границы полосы от прямолинейного положения может приводить к появлению новых значений дискретного спектра и резонансов в этом деформируемом объекте. В основу анализа положен подход, разработанный в работе авторов [3]. Работа посвящена дальнейшему развитию изложенного метода и анализу одного из полученных результатов. Он связан с изучением как уравнений, которые, возможно, описывают спектральные свойства в контактной задаче с полубесконечным деформируемым штампом, так и с исследованием возбуждаемых вне штампа волновых полей. Следуя [3], рассмотрим многослойную среду конечной толщины, на верхней границе которой вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в области $\Omega(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ действует деформируемый штамп. Методом, описанным в [4], смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения для абсолютно жесткого штампа. Заметим, что исследованиям контактных задач с абсолютно жестким штампом посвящено огромное количество исследований [5–20]. Однако ни в одной из них не обнаружено контактных задач с деформируемым штампом. Интегральных уравнений абсолютно жестким штампом недостаточно для исследования контактных задач с деформируемым штампом вида. Они являются вспомогательной составляющей и в нашем случае имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_A^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2), \quad A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty. \quad (1)$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ — контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения. Учет деформируемости штампа требует построить в областях $\Omega_1(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ упакованные блочные элементы, которые будут

рассматриваться как деформируемые штампы. Ниже рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2). \quad (2)$$

Здесь $\varphi(x_1, x_2)$ — вертикальное перемещение в зоне контакта, $q(x_1, x_2)$ контактные напряжения, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t(x_1, x_2)$ — заданные внешние воздействия сверху на объект. Кроме этого, задаются граничные условия, которые имеют для задачи A в области $\Omega_1 (A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

1. Применение метода блочного элемента

Следуя [3], поставленная двумерные задачи (1) сводятся к одномерной с вещественным параметром α_2 в результате применения преобразования Фурье по координате x_2 .

Тогда интегральное уравнение (1) принимает вид

$$\int_A^\infty k_0(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 = f(x_1), \quad q(\xi_1) = q(\xi_1, \alpha_2), \quad k_0(x_1) = k(x_1, \alpha_2), \quad (1.1)$$

$$k_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_0(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1, \alpha_2), \quad K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1) R_0(\alpha_1).$$

Ради краткости считаем, что функция $K_0(\alpha_1)$ является четной, мероморфной и на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K_0(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $\text{Im } \alpha_1 = 0$.

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для смешанных задач на многослойной среде [4].

Функция $K_0(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей.

Граничная задача (1) для блочного элемента становятся одномерными

$$(\partial^2 x_1 + k^2) \varphi(x_1) = g(x_1), \quad g(x_1) = q(x_1) - t(x_1), \quad k^2 = p^2 - \alpha^2, \quad (1.2)$$

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_1, \alpha_2), \quad g(x_1) = g(x_1, \alpha_2),$$

$$\varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(A), \quad x_1 \rightarrow A, \quad x_1 \in \Omega_1.$$

Применив к (1.2) метод блочного элемента [3], получим следующее представление для упакованных блочных элементов. В задаче получаем внешнюю форму в виде

$$\omega_A(\alpha_1) = i(\alpha_1 - k) \varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + G_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - G_A(\alpha_1),$$

$$G_A(\alpha_1) = Q_A(\alpha_1) - T_A(\alpha_1), \quad \omega_A(k) = 0,$$

$$G_A(\alpha_1) = \int_A^\infty g_A(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha, \quad Q_A(\alpha_1) = \int_A^\infty q_A(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha, \quad T_A(\alpha_1) = \int_A^\infty t_A(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha.$$

Вертикальные перемещения, от блочных элементов, имеют вид

$$\varphi_A(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega_A(\alpha)}{\alpha^2 - k^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \quad (1.3)$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем перемещения (1.1) $f_A(x_1)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещения

упакованного блочного элемента (1.3) $\varphi_A(x_1)$ в обеих задачах, предварительно применив к ним преобразование Фурье. Это дает соотношения

$$K_0(\alpha_1)Q_A(\alpha_1) + E_A(\alpha_1) = -(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}Q_A(\alpha_1) + S_A(\alpha_1),$$

$$S_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} \langle i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + T_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1 - k)A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1 - k)A} \rangle.$$

Здесь $E_A(\alpha_1)$ — часть поверхности границы многослойной среды, свободная от контакта. Объединив члены, содержащие преобразования Фурье контактных напряжений и применив к этим равенствам обращение Фурье по параметру α_1 , получаем два интегральных уравнения Винера–Хопфа

$$\int_A^\infty k(x_1 - \xi_1)q_A(\xi_1)d\xi_1 = s_A(x_1), \quad A \leq x_1 \leq \infty, \tag{1.4}$$

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1, \quad K(\alpha_1) = K_0(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}.$$

Заметим, что уравнение содержит в правой части неизвестный функционал $Q_A(k)$ от искомого решения интегрального уравнения, который должен быть найден после обращения интегральных уравнений. Это одна из особенностей, присущая контактными задачам для деформируемых штампов, взятых в виде упакованных блочных элементов. Указанные функции являются отношениями целых функций $K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1)R_0(\alpha_1)$ и добавление к ним более быстро убывающих рациональных функций $(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}$ не изменяет свойств мероморфных функций. Изменяются лишь величины нулей и полюсов, число которых возрастает. Таким образом, функции $K(\alpha_1)$ (1.4) остаются мероморфными. Для дальнейшего опишем свойства рассматриваемых мероморфных функций. Предполагается, что мероморфная функция $K_0(\alpha_1)$, являющаяся преобразованием Фурье ядра, обладает следующими свойствами. Функции $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$ имеют первый порядок и конечный тип целых функций, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, имеет вид [3]

$$\xi_s = ir(s + 0,5)(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \tag{1.5}$$

$$z_m = irm(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \quad r = \text{const} > 0.$$

В динамических смешанных задачах в числе первых нулей и полюсов в (1.5) могут быть вещественные числа [4]. Имея целью исследовать уравнения, используя описанные нули, построим четные целые функции $R(\alpha_1)$, $P(\alpha_1)$ в форме бесконечных произведений [3]. Последние будут иметь вид

$$R(\alpha_1) = R_{\mp}(\alpha_1)R_{\pm}(\alpha_1), \quad R_{\pm}(\alpha_1) = T_{\mp}e^{\mp i\alpha_1} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{\alpha_1}{z_s}\right) e^{\frac{\alpha_1}{\mp z_s}}, \quad T_{\mp} = \text{const}, \tag{1.6}$$

$$P(\alpha_1) = P_{\mp}(\alpha_1)P_{\pm}(\alpha_1), \quad P_{\pm}(\alpha_1) = S_{\mp}e^{\mp i\alpha_1} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{\alpha_1}{\xi_s}\right) e^{\frac{\alpha_1}{\mp \xi_s}}, \quad S_{\mp} = \text{const},$$

которые после деления на $P(\alpha_1)$ дадут мероморфные функции, обозначенные как $K(\alpha_1) = P^{-1}(\alpha_1)R(\alpha_1)$. Их нулями являются $\pm z_m$, а полюсами — $\pm \xi_s$.

С помощью полученных функций (1.6) построим мероморфные функции следующего вида $K_{\pm}(\alpha_1) = P_{\pm}^{-1}(\alpha_1)R_{\pm}(\alpha_1)$, которые представляют результат интегральной факторизации функции $K(\alpha_1)$. Положим в (1.4) $P_{0\pm}(\alpha_1) = (\alpha_1 \pm k)^{-1}P_{\pm}(\alpha_1)$.

2. Решения интегральных уравнений

В работе [3] показано, что интегральное уравнение разрешимо, корректно и позволяет найти все неизвестные функции.

Для решения уравнения Винера–Хопфа продолжим его новой неизвестной функцией $e(x_1)$ в дополнении $-\infty \leq x_1 < A$ к зоне контакта на границе многослойной среды и получим функциональное уравнение в виде

$$K(\alpha_1)Q_A^+(\alpha_1) = S_A^+(\alpha_1) + E_A^-, \quad S_A^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1), \quad Q_A^+ \equiv Q_A(\alpha_1).$$

В результате применения алгоритма метода Винера–Хопфа [4], построим представление решения, которое принимает вид

$$Q_A^+(\alpha_1) = K_+^{-1}(\alpha_1)\{K_-^{-1}(\alpha_1)S_A^+(\alpha_1)\}^+.$$

Здесь приняты обозначения, заимствованные из [4]

$$\{R(\alpha_1)\}^\pm = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi - \alpha_1} d\xi, \quad \pm \operatorname{Im} \alpha_1 > 0. \quad (2.1)$$

В результате несложных преобразований приходим к представлению решения задачи A в виде

$$Q_A(\alpha_1) = Q_A(k)N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1), \quad Q_A(\alpha_1) \equiv Q_A^+(\alpha_1),$$

$$N_1(\alpha_1) = P_{0+}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)R_+^{-1}(\alpha_1)\{P_{0-}(\alpha_1)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)^{-1}e^{i(\alpha_1 - k)A}\}^+,$$

$$N_2(\alpha_1) = P_{0+}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)R_+^{-1}(\alpha_1) \times \\ \times \left\{ P_{0-}(\alpha_1)(\alpha_1 - k)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} \langle i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + \right. \\ \left. + T_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1 - k)A} \rangle \right\}^+.$$

Из последнего соотношения при $\alpha_1 = k$ находится искомым функционал

$$Q_A(k) = [1 - N_1(k)]^{-1} N_2(k),$$

$$N_1(k) = 2kP_{0+}(k)R_+^{-1}(k)\{P_{0-}(\alpha_1)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)^{-1}e^{i(\alpha_1 - k)A}\}_k^+,$$

$$N_2(k) = 2kP_{0+}(k)kR_+^{-1}(k) \times \\ \times \left\{ P_{0-}(\alpha_1)(\alpha_1 - k)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} \langle i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + \right. \\ \left. + T_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1 - k)A} \rangle \right\}_k^+.$$

Окончательно решение принимает вид

$$Q_A(\alpha_1) = [1 - N_1(k)]^{-1} N_2(k)N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1).$$

Здесь $\{R(\alpha_1)\}_k^+$ означает, что берется $\alpha_1 = k$ после вычисления интеграла (2.1).

Применив двойное обращение Фурье к построенному решению, получим решение трехмерной смешанной задачи.

3. О свойствах решения для деформируемого штампа

1. Возможность существования дискретного спектра в задаче для полубесконечного штампа сводится к исследованию свойств решения

$$q_A(x_1) = \int_{\Gamma} Q_A(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} dx_1,$$

$$Q_A(\alpha_1) = [1 - N_1(k)]^{-1} N_2(k) N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1).$$

Очевидно, спектр может быть определен путем исследования нулей знаменателя построенного решения. Таким знаменателем является функция, которая дает ответ о возможности существования дискретного спектра у оператора граничной задачи, то есть

$$1 - N_1(k) = 0. \tag{3.1}$$

Входящая в уравнение (3.1) функция $N_1(k)$ имеет представление

$$N_1(k) = 2k P_{0+}(k) R_+^{-1}(k) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P_{0-}(\xi)}{R_-(\xi) (\xi^2 - k^2)} e^{i(\xi-k)A} d\xi.$$

Для упрощения достаточно сложной трансцендентной формулы относительно параметра k рассмотрим случай, когда $A = 0$. Это означает, что система координат сдвинута так, что край штампа находится в начале координатной системы. Естественно, это не отразится на контактных напряжениях, которые будут рассматриваться в сдвинутой системе координат. В этом случае подынтегральная функция упрощается и интеграл вычисляется. В результате вычислений имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P_{0-}(\xi)}{R_-(\xi) (\xi + k)(\xi - k)} d\xi = \frac{P_{0-}(-k)}{2k R_-(-k)}.$$

Функция $N_1(k)$ принимает вид

$$N_1(k) = \frac{P_{0+}(k) P_{0-}(-k)}{R_+(k) R_-(-k)}.$$

Исследуемое уравнение описывается соотношением

$$1 - \frac{P_{0+}(k) P_{0-}(-k)}{R_+(k) R_-(-k)} = 0.$$

С учетом того, что из свойств факторизованных четных функций $D(k)$ следует соотношение $D_-(-k) = D_+(k)$, получаем следующее уравнение относительно параметра k :

$$R_+^2(k) - P_{0+}^2(k) = 0. \tag{3.2}$$

Для дальнейшего исследования этого уравнения необходимо, во первых, выявить характер зависимости функций от параметра k и, во-вторых, факторизовать в виде произведения функцию вида

$$T(\alpha_1) = \frac{P(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 - k^2) R(\alpha_1)},$$

$$P(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2) P_0(\alpha_1), \quad R(\alpha_1) = R_0(\alpha_1) (\alpha_1^2 - k^2) + P_0(\alpha_1).$$

В этом соотношении явно выделен параметр k , который необходимо определить из уравнения Факторизованные в виде произведения функции описываются интегралами

$$T_+(\alpha_1) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln T(\xi)}{\xi - \alpha_1} d\xi, \quad \text{Im } \alpha_1 > 0.$$

Это позволит получить в интегральном виде функции, входящие в уравнение (3.1) для определения нулей k . Исходя из поставленной контактной задачи для полубесконечного штампа в условиях излучения энергии на бесконечность, есть основание предположить, что уравнение столь сложной структуры не будет иметь вещественных дискретных нулей параметра k , вопрос может быть изучен численно. Однако можно полагать, что будет иметь место волнообразное изменение функции $1 - N_1(k)$, что может обеспечить существование максимумов и минимумов у контактных напряжений под деформируемым штампом.

2. Поведение волнового поля $g(x_1)$ на поверхности многослойного основания вычисляется по формуле

$$g(x_1) = \int_0^{\infty} k_0(x_1 - \xi_1)q(\xi_1)d\xi_1, \quad x_1 < 0.$$

Эту формулу можно представить в виде

$$g(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{R(\alpha_1)Q(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 - k^2)P_0(\alpha_1)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad x_1 < 0.$$

Вычисления интеграла Дирихле по однократным вычетам дает следующее представление волнового поля вне зоны контакта

$$g(x_1) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R(\xi_n)Q(\xi_n)}{P'(\xi_n)} e^{-i\xi_n x_1},$$

$$\xi_0 = k, \quad \text{Im } \xi_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad x_1 < 0.$$

Здесь N — число вещественных нулей функции $P_0(\xi_n)$.

Участвующие в этом представлении вещественные полюсы формируют волновое поле. Возбуждаемые деформируемым штампом волны на свободной поверхности в контактных задачах совпадают с появляющимися в случае абсолютно жестких штампов и дополняются гармоникой деформируемого штампа e^{-ikx_1} . Амплитуды возбуждаемых волн отличаются от амплитуд абсолютно жестких штампов.

4. Построение упакованных блочных элементов и их фактор-типология для скалярной задачи в первом и других квадрантах

Объектами топологического пространства является совокупность решений граничных задач для уравнения Гельмгольца. Введем в прямоугольной системе координат $ox_1x_2x_3$ четыре полуплоскости с нормальными к границам, совпадающими с положительными или отрицательными координатными полуосями. Введем их обозначения: $\Omega_1(|x_1| \leq \infty, x_2 > 0)$, $\Omega_2(|x_2| \leq \infty, x_1 < 0)$, $\Omega_3(|x_1| \leq \infty, x_2 < 0)$, $\Omega_4(|x_2| \leq \infty, x_1 > 0)$. В каждой области, рассматриваемой в качестве носителя, решим граничные задачи для уравнения Гельмгольца с приведенными ниже граничными условиями вида

$$(\Delta + p^2)g_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\partial_2 g_1(x_1, 0) = q_1(x_1), \quad g_1(x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \partial_1 g_2(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_2(x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

$$\partial_2 g_3(x_1, 0) = q_1(x_1), \quad g_3(x_1, x_2) \in \Omega_3, \quad \partial_1 g_4(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_4(x_1, x_2) \in \Omega_4.$$

Здесь $q_n(x_n)$, $n = 1, 2$ — некоторые гладкие функции.

В дальнейшем введем в рассмотрение двумерный \mathbf{F}_2 и одномерный \mathbf{F}_1 соответственно операторы преобразования Фурье, положив

$$\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_n), \quad Q(\alpha_n) = \mathbf{F}_1(\alpha_n)q(x_n) = \int_l q(x_n) \exp i\alpha_n x_n dx_n,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} g(x_1, x_2) \exp i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) dx_1 dx_2.$$

Здесь l, Ω являются носителями функций интегрирования.

Построим решения граничных задач в форме упакованных блочных элементов. Последние имеют вид

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{21+}} (\alpha_2 - \alpha_{21+}) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$g_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{11-}} (\alpha_{11-} - \alpha_1) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$
(4.1)

$$g_3(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{21-}} (\alpha_{21-} - \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$g_4(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{11+}} (\alpha_1 - \alpha_{11+}) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$
(4.2)

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{11-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}.$$

Здесь $Q_n(\alpha_s) = \mathbf{F}_1(\alpha_s)q_n(x_s)$.

Таким образом, упакованные блочные элементы построены в четырех взаимно пересекающихся полуплоскостях. Они представляют блочную структуру, блоки которой имеют носители — области $\Omega_n, n = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим множества $\Omega_n \times g_n, n = 1, 2, 3, 4$. Введем в построенной блочной структуре топологическую структуру. Назовем внутренности каждого построенного упакованного блочного элемента и носителя, то есть открытые множества, элементами топологического пространства. Они должны обладать следующими свойствами: объединение любого числа таких элементов и пересечение конечного их числа должно быть элементом топологического пространства, то есть быть упакованным блочным элементом. Очевидно, носители упакованных блочных элементов, то есть полупространства с взаимно перпендикулярными границами, имеют в качестве пересечений все четыре квадранта прямоугольной системы координат. Введем следующее их обозначение: $\Omega_5(x_1 > 0, x_2 > 0), \Omega_6(x_1 < 0, x_2 > 0), \Omega_7(x_1 < 0, x_2 < 0), \Omega_8(x_1 > 0, x_2 < 0)$. Для того, чтобы доказать, что введенная топологическая структура $\Omega_n \times g_n, \Omega_{4+n} \times \varphi_n, n = 1, \dots, 4$ действительно формирует топологическое пространство, состоящее из носителей и упакованных блочных элементов, необходимо показать, что решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в каждом квадранте представляет упакованный блочный элемент. Относительно носителей этот вопрос решен благодаря индуцированной топологии евклидова пространства. Для блочных элементов любые два соседних блочных элемента из квадрантов должны объединяться и представлять упакованный блочный элемент полупространства. Таким образом, методом блочного элемента необходимо построить решения в форме упакованных блочных элементов в каждом квадранте следующих граничных задач

$$(\Delta + p^2)\varphi_n = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \varphi_1(x_1, 0) &= q_{1+}(x_1), & \partial_1 \varphi_1(0, x_2) &= q_{2+}(x_2), & \Omega_5(x_1 > 0, x_2 > 0), \\ \partial_2 \varphi_2(x_1, 0) &= q_{1-}(x_1), & \partial_1 \varphi_2(0, x_2) &= q_{2+}(x_2), & \Omega_6(x_1 < 0, x_2 > 0), \\ \partial_2 \varphi_3(x_1, 0) &= q_{1-}(x_1), & \partial_1 \varphi_3(0, x_2) &= q_{2-}(x_2), & \Omega_7(x_1 < 0, x_2 < 0), \\ \partial_2 \varphi_4(x_1, 0) &= q_{1+}(x_1), & \partial_1 \varphi_4(0, x_2) &= q_{2-}(x_2), & \Omega_8(x_1 > 0, x_2 < 0). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$q_{1+}(x_1) = q_1(x_1), \quad x_1 \geq 0; \quad q_{2+}(x_2) = q_2(x_2), \quad x_2 \geq 0;$$

$$q_{1-}(x_1) = q_1(x_1), \quad x_1 \leq 0; \quad q_{2-}(x_2) = q_2(x_2), \quad x_2 \leq 0.$$

Применяя традиционные методы блочного элемента, включающие этапы внешней алгебры, внешнего анализа, получаем четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_n(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle,$$

$$\omega_2 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}} \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_3 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}} \right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}} \right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_4 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}} \right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактор-топологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. Названными объединениями являются следующие объекты: $\varphi_1(x_1, x_2) \cup \varphi_2(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) \cup \varphi_3(x_1, x_2)$, $\varphi_3(x_1, x_2) \cup \varphi_4(x_1, x_2)$, $\varphi_4(x_1, x_2) \cup \varphi_1(x_1, x_2)$.

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полупространства. Имеем

$$\begin{aligned} & \varphi_1(x_1, x_2) \cup \varphi_2(x_1, x_2) = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2) + \omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 = & \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle + \\ & + \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}} \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle. \end{aligned}$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}, \quad \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}, \quad \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, то есть обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль становится понятной при вычислении обращений преобразований Фурье для получения значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат. Поэтому, при исчезновении границы между блочными элементами, и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах, ими следует пренебрегать. Остаются те из них, которые

сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая не нужные члены, имеем

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \langle Q_{1+}(\alpha_1) \rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \langle Q_{1-}(\alpha_1) \rangle = \\ &= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \langle Q_{1+}(\alpha_1) + Q_{1-}(\alpha_1) \rangle = \frac{\alpha_2 - \alpha_{21+}}{\alpha_{21+}} Q_1(\alpha_1).\end{aligned}$$

Внеся эти данные в (4.3), получаем упакованный блочный элемент для полупространства (4.1), (4.2), а объединение блочных элементов оказывается связным множеством.

Вывод

Таким образом, в статье получено уравнение, которое может содержать параметры спектра, возникающего в контактных задачах с деформируемым штампом. Этот спектр, скорее всего, комплексный, в связи с неограниченностью штампа. Уравнение имеет сложное строение, в связи с чем его решение необходимо искать численным методом. Установлен характер волн на свободной поверхности в контактных задачах с деформируемым штампом. Они такие же, как и в случае абсолютно жесткого штампа, но дополняются гармоникой деформируемого штампа. Амплитуды оказываются разными. Представлено построение дискретного топологического пространства и фактор-топологий, состоящего из упакованных блочных элементов квадрантов декартовой системы координат, необходимых в дальнейших исследованиях.

Литература [References]

1. Ворович, И.И., Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*, 1979, т. 245, № 4, с. 817–820. [Vorovich, I.I., Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous strip. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)]
2. Ворович, И.И., Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*, 1979, т. 245, №5, с. 1076–1079. [Vorovich, I.I., Resonance properties of an elastic inhomogeneous band. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)]
3. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*, 2022, т. 84, №1, с. 25–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On contact problems with a deformable stamp. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and plasticity*, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. (in Russian)] DOI 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34
4. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains*. Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
5. Papangelo, A., Ciavarella, M., Barber, J.R., Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471. DOI 10.1098/rspa.2015.0271
6. Zhou, S., Gao, X.L., Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. DOI 10.1007/s00033-012-0205-0
7. Almqvist, A., *An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem*, 2013. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem>
8. Cocou, M., A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, vol. 22, pp. 508–519. DOI 10.1016/j.nonrwa.2014.08.012
9. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2349–2362. DOI 10.1016/S0020-7683(97)00154-6

10. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II—Examples. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2363–2378. DOI [10.1016/S0020-7683\(97\)00155-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8)
11. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI [10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006)
12. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI [10.1016/j.euromechsol.2006.05.007](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007)
13. Almqvist, A., Sahlin, F., Larsson, R., Glavatskih, S., On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. DOI [10.1016/j.triboint.2005.11.008](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008)
14. Andersson, L.E., Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.*, 2000, vol. 42, pp. 169–202. DOI [10.1007/s002450010009](https://doi.org/10.1007/s002450010009)
15. Cocou, M., Rocca, R., Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis*, 2000, vol. 34, pp. 981–1001.
16. Kikuchi, N., Oden, J., *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1988.
17. Raous, M., Cangémi, L., Cocu, M., A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 1999, vol. 177, pp. 383–399.
18. Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J., *Models and analysis of quasistatic contact*. *Lect. Notes Phys.*, vol. 655. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
19. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI [10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006)
20. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI [10.1016/j.euromechsol.2006.05.007](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007)
21. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI [9.31857/S2686740021040039](https://doi.org/10.31857/S2686740021040039)