УДК 517.9: 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-76-82

К задаче определения параметров стационарного источника в полуограниченной слоистой среде

О. Н. Лапина ✉, **А. Г. Нестеренко**, **Ю. Г. Никитин**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Лапина Ольга Николаевна; ORCID 0000-0002-0145-6822; e-mail: olga_ln@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе при решении обратной задачи определения параметров стационарного источника излучения (координаты и мощность), сформулированной как задача оптимизации для функционала невязки от функций, зависящих от параметра источника, используются методы условной оптимизации на основе точного решения прямой задачи — расчета концентрации субстанции в многослойной среде, излучаемой стационарным источником, с помощью матричного метода на основе интегрального подхода. Для решения оптимизационной задачи были использованы методы локального и глобального поиска, а также генетические алгоритмы глобального поиска.

Ключевые слова: диффузия-конвекция, многослойная среда, матричный метод, прямая задача, обратная задача, методы условной оптимизации.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ и Администрации Краснодарского края (проект 19-41-230011 р_а).

Цитирование: Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г. К задаче определения параметров стационарного источника в полуограниченной слоистой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 76–82. DOI 10.31429/vestnik-19-4-76-82

Поступила 20 ноября 2022 г. После доработки 25 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On the Problem of the Parameters Determination for a Stationary Source in a Semi-Bounded Layered Medium

O. N. Lapina ✉, **A. G. Nesterenko**, **Yu. G. Nikitin**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga N. Lapina; ORCID 0000-0002-0145-6822; e-mail: olga_ln@mail.ru

Abstract. In this paper, when solving the inverse problem of the parameters determination for a stationary radiation source (coordinates and intensity), formulated as an optimization problem for the residual functional of functions depending on the source parameters, we use conditional optimization methods based on the exact solution of the direct problem of the concentration calculation for a substance in a multilayer medium emitted by a stationary source using the matrix method based on the integral approach. The applied method of numerical inversion of Fourier integrals is based on the method of direct contour integration. The source is identified by the response of the pollutant distribution medium to the action of a stationary emission – a change in the concentration of an impurity at a given height based on additional "measurements", as which we chose the numerical values of the solution for the direct problem. To solve the optimization problem, local and global search methods, as well as genetic algorithms for global search, were used. Calculations carried out for various characteristics of the layered medium and the position of the source showed that the pattern search method allows us to find a more accurate solution than genetic algorithms, the convergence rate of which decreases near the minimum point. At the same time, the accuracy of restoring the initial intensity value of the pollutant source depends on the structure of the wind characteristics in the layered medium; an increase in wind speeds worsens the solution of the inverse problem. The number of measurement points has a significant impact on the accuracy of the source power value recovery when the measurement data has noise.

Keywords: diffusion-convection, multilayer medium, matrix method, direct problem, inverse problem, conditional optimization methods.

Funding. The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Krasnodar Territory (project 19-41-230011 p_a).

Cite as: Lapina O. N., Nesterenko A. G., Nikitin Yu. G. On the problem of the parameters determination for a stationary source in a semi-bounded layered medium. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 76–82. DOI 10.31429/vestnik-19-4-76-82

Received 20 November 2022. Revised 25 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Актуальность разработки методов математического моделирования распространения загрязняющих веществ (ЗВ), излучаемых в воздушную и водную среду, объясняется растущими объемами вредного антропогенного воздействия на природу. В этой связи столь же важны и задачи экологического мониторинга действующих предприятий, а также экологической экспертизы проектируемых технических сооружений.

Нередко на практике возникают ситуации, когда мощности источников излучения ЗВ и их местоположения неизвестны. При анализе воздействия на экологические системы техногенных и природных катастроф возникает необходимость решать обратные задачи распространения ЗВ для определения места и параметров выброса, воздействовавшего на экосистему. Данные задачи относятся к задачам идентификации параметров источников для моделей распространения загрязнений. Их решение заключается в определении неизвестных характеристик источников по данным измерений состояния среды.

В теории обратных задач конвекции-диффузии различают коэффициентные, граничные и эволюционные обратные задачи [1–3, и др.]. Обратные задачи могут быть некорректными в классическом смысле. В работах [4, 5] исследованы теоретические вопросы, а также предложены численные методы решения рассматриваемых обратных задач.

Наряду с обратными задачами важную роль в приложениях играют и задачи управления для моделей распространения ЗВ. Эти задачи заключаются в достижении определенных «экологических» целей за счет действия граничных либо распределенных управлений, роль которых играют координаты, мощности и другие параметры источников загрязнений. Интерес к этим задачам появился в конце прошлого столетия, начиная с работ Г.И. Марчука [6], В.В. Пененко и других исследователей, посвященных решению задач оптимального размещения предприятий вблизи экологически значимых зон.

Исследование обратных задач можно свести к изучению соответствующих экстремальных задач. Это достигается путем введения функционала качества (функционала невязки), адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче и последующей его минимизации на решениях исходной прямой задачи. При этом возникают обратные экстремальные задачи, для исследования которых можно применять методологию задач управления. Это позволяет рассматривать обратные задачи и задачи управления с единых позиций математической теории оптимального управления и применять для их решения один и тот же математический аппарат, основанный на теории экстремальных задач условной оптимизации [7–10].

В настоящей работе при решении обратной задачи определения параметров стационарного источника излучения (координаты и мощность) используются методы условной оптимизации на основе точного решения прямой задачи – расчета концентрации субстанции в многослойной среде, излучаемой стационарным источником, с помощью матричного метода на основе интегрального подхода [11–14].

Рассматриваемые уравнения интерпретируются как описание процесса турбулентной диффузии и конвективного массопереноса ЗВ в газообразной или жидкой среде, хотя допускают и другие физические толкования. Развиваемый в работах [11–14] метод позволяет рассматривать среды с большим количеством слоев, в значительной степени приближенные к реальным. Градиентные среды, для которых параметры уравнений зависят от одной (вертикальной) координаты, могут быть достаточно точно аппроксимированы многослойной средой с кусочно-постоянными коэффициентами. Применяемый метод численного обращения интегралов Фурье [11–13] и Фурье–Лапласа [14] основан на методе прямого контурного интегрирования. Символ функции Грина не имеет вещественных особенностей, в силу чего не требуется вводить внутреннее трение для метода прямого контурного интегрирования, и убывает экспоненциально, поэтому необходимые пределы интегрирования для заданной точности являются конечными.

1. Задача конвекции–диффузии для многослойной среды при наличии стационарного источника

Рассматривается среда миграции ЗВ, состоящая из Nслоев, в пределах каждого слоя $\{-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty;\ z_{n+1} < z < z_n\}$, $n = \overline{1, N}$, свойства среды полагаются постоянными, $z_1 = h$, $z_{N+1} = 0$, считается, что источник расположен на границе раздела слоев $z = z_j$. Прямая задача формулируется в виде

$$u_n \frac{\partial \varphi_n (M)}{\partial x} + v_n \frac{\partial \varphi_n (M)}{\partial y} + (w_n - w_g) \frac{\partial \varphi_n (M)}{\partial z} + \sigma \varphi_n (M) = \\ = \mu_n \left(\frac{\partial^2 \varphi_n (M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n (M)}{\partial y^2} \right) + \nu_n \frac{\partial^2 \varphi_n (M)}{\partial z^2}, \\ \{-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty;\ z_{n+1} < z < z_n\}.$$

Здесь φ_n — концентрация загрязнителя, u_n, v_n и w_n — скорости воздушных масс в горизонтальной плоскости и вертикальном направлении соответственно, $\sigma \geqslant 0$ — коэффициент распада, $\mu_n \geqslant 0$, $\nu_n \geqslant 0$ — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях в n-ом слое.

Граничные условия на верхней и нижней границе слоя можно представить в виде

$$\left. \frac{\partial \varphi_1 (M)}{\partial z} \right|_{z = z_1} = 0, \quad \left. \left(\nu_N \frac{\partial \varphi_N (M)}{\partial z} - \kappa \varphi_N (M) \right) \right|_{z = z_{N+1}} = 0,$$

На всех межслойных границах, кроме плоскости источника, справедливы условия

$$\varphi_{n-1} (z_n) = \varphi_n (z_n), \quad \nu_{n-1} \frac{\partial \varphi_{n-1} (x, y, z_n)}{\partial z} = \nu_n \frac{\partial \varphi_n (x, y, z_n)}{\partial z}.$$

На содержащей источник границе задано разрывное условие

$$\nu_{j-1} \frac{\partial \varphi_{j-1} (x, y, z_j)}{\partial z} = \nu_j \frac{\partial \varphi_j (x, y, z_j)}{\partial z}, \quad \varphi_{j-1} (x, y, z_j) = \varphi_j (x, y, z_j) + q_j (x, y), \\ q_j (x, y) = \mathrm{C}_{j0} \delta (x - x_{j0}, y - y_{j0}). \tag{1.1}$$

При формулировке краевых задач задается также условие убывания функций $\varphi_n (x, y, z) \to 0$ на бесконечности $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$.

Решение задачи в n-ом слое для одного источника на границе j-го слоя принимает вид [11, 12]

$$\varphi_n (x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(n,j)} (\alpha, \beta, z) Q_j (\alpha, \beta) \exp (-\mathrm{i} (\alpha x + \beta y)) \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta, \tag{1.2}$$

где $K^{(n,j)}$ — символ функции Грина и Q_j — трансформанта Фурье функции источника

$$Q_j (\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_j (x, y) \exp (\mathrm{i} (\alpha x + \beta y)) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Алгоритмы построения $K^{(n,j)}$ для случаев стационарных, нестационарных и периодических источников описаны в работах [11–14].

2. Задача определения параметров стационарного источника

Решение обратной многопараметрической задачи определения параметров источника излучения (пространственные координаты, мощность излучения) предполагает использование широкого спектра методов условной оптимизации на основе точного и эффективного решения прямой задачи — расчета концентрации субстанции в многослойной среде, излучаемой стационарным (а в общем случае — периодическим и нестационарным) источником.

Идентификация источника осуществлялась по отклику среды распространения ЗВ на действие стационарного выброса – изменению концентрации примеси на заданной высоте $z = z*$, $z_{n+1} < z* < z_n$, на основе дополнительных «замеров» вида $\bar{\varphi}_k \equiv \bar{\varphi}_k\left(x_k, y_k, z*\right)$, $k = 1, \ldots, p$, в качестве которых выбирались численные значения решения прямой задачи. При этом путем введения функционала

$$\varphi\left(x_{j0}, y_{j0}, z_j, C_{j0}\right) = \min \sum_{k=1}^{n} \left\| \varphi_n\left(x_k, y_k, z*\right) - \bar{\varphi}_k \right\|, \tag{2.1}$$

в который неявным образом входят параметры источника (1.1), из (1.2)

$$\varphi_n\left(x, y, z\right) = \varphi_n\left(x, y, z, x_{j0}, y_{j0}, z_j, C_{j0}\right),$$

и последующей его минимизации на эталонных решениях исходной прямой задачи с учетом погрешности в данных измерений находятся координаты и мощность источника.

Выражение в правой части (2.1) может быть представлено в виде суммы наименьших квадратов разностей концентраций, когда вычисляются отклонения от эталонных значений концентраций в точках $(x_k, y_k, z*)$

$$\varphi\left(x_{j0}, y_{j0}, z_j, C_{j0}\right) = \min \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi\left(x_k, y_k, z*\right) - \bar{\varphi}_k\right)^2. \tag{2.2}$$

Решение задачи оптимизации предполагает многократное решение прямой задачи, т.е. вычисление интегралов (1.2) при расчете концентрации в слое измерений. Вычисление интеграла (1.2) основано на применении адаптивного алгоритма интегрирования быстро осциллирующих функций (многоточечные методы Гаусса и Кронрода).

Как правило, при решении задач идентификации дополнительно следует учитывать влияние уровня погрешностей $\bar{\varepsilon}$ «замеров» $\bar{\varphi}_k$ и погрешностей вычисления интегралов (1.2) для тех же величин при симуляции физических экспериментов на точность восстановления параметров источника и скорость сходимости задачи.

Для практических расчетов необходимо наложить ограничения на диапазоны возможных параметров источника: $x_{0l} \leqslant x_{j0} \leqslant x_{0r}$, $y_{0l} \leqslant y_{j0} \leqslant y_{0r}$, $z_1 \leqslant z_j \leqslant z_{N+1}$, $C_0 \leqslant C \leqslant C_m$, — и уровня погрешностей $0 \leqslant \bar{\varepsilon} \leqslant \varepsilon_m$.

Так как распределение концентрации примеси (1.2) в заданном слое для многослойной среды можно найти только численно, то целевая функция (2.2) имеет вид «черного ящика», поэтому для ее оптимизации требуется применение соответствующих алгоритмов.

Для решения оптимизационной задачи были использованы методы локального и глобального поиска, а также генетические алгоритмы глобального поиска.

Генетические алгоритмы [15] и алгоритмы поиска паттернов [16] продемонстрировали высокую эффективность.

Была выполнена серия численных экспериментов для двух-четырехслойной сред, проводимых с различным количеством точек «измерения», с использованием симулированных точек измерения в 4–20 точках. Кроме того, в «измеренные» значения концентрации примеси добавлялись случайные погрешности, неизбежные в физических экспериментах. Случайные ошибки измерений моделировались добавлением равномерно распределенных погрешностей концентрации, вычисляемых в точках «замеров», как в [17].

Вычислительные эксперименты, в которых «замеры» были отягощены погрешностями уровня от 1 до 10 %, во всех случаях продемонстрировали приемлемые численные результаты.

Рис. 1. Влияние погрешности замеров на точность восстановления координаты

Проведенные расчеты модельных двумерных и трехмерных обратных задач конвекции–диффузии–реакции — определение неизвестных параметров источника — показали, что используемые методы дают устойчивые и точные результаты даже в условиях сильной зашумленности имитируемых измерений.

На рис. 1 приведен пример зависимости точности восстановления исходной координаты $x_{j0} = 0$ источника и погрешности данных «замеров» модельных расчетов пространственной задачи для двухслойной среды. По оси абсцисс отложены погрешности восстановления. Аналогичные порядки характерны для других координат.

Относительная погрешность «замеров» может достигать 10 %, при этом погрешность нахождения координат и мощности источника в двумерных задачах не превышает уровня погрешности, в трехмерных — превышает незначительно. Расчеты, проведенные для различных характеристик слоистой среды и положения источника, показали, что метод поиска паттернов, реализованный в [16], позволяет найти более точное решение (1–5 %), чем генетические алгоритмы, скорость сходимости которых вблизи точки минимума снижается. С увеличением количества точек «измерения» точность возрастает. Следует отметить, что точность восстановления исходной мощности источника ЗВ зависит от структуры ветровых характеристик слоистой среды, увеличение скоростей ветра ухудшает решение обратной задачи. Количество точек измерений оказывает существенное влияние на точность восстановления мощности источника при зашумлении данных измерений.

Заключение

Результаты работы могут найти применение для решения различных экологических задач при инвентаризации выбросов ЗВ в атмосферу, изучении воздействия на окружающую среду источников загрязнения природного и антропогенного характера, моделировании различных сценариев нагрузки от имеющихся источников и тенденций изменения состояния среды, при разработке теоретических и практических рекомендаций для формирования экологической модели различных территорий региона и т.д.

Решение задач идентификации источника ЗВ также находят применение при реализации различных методик оценки величины предотвращенного ущерба, оптимизации размещения будущих источников загрязнения и станций наблюдения. Решение последней проблемы на различных территориях требует разработки устойчивых методов решения обратных задач определения неизвестных пространственных координат и мощности излучения источника загрязняющих веществ, а также длительности выброса. Но в отличие от обратных задач, требующих, как правило, единственности решения, задачи оптимального управления требуют полного описания условий и ограничений для выделения требуемого решения из множества допустимых [18].

Литература [References]

1. Пененко, В.В., Рапута, В.Ф., Быков, А.В., Планирование эксперимента в задаче оценивания мощности источников примеси. *Физика атмосферы и океана*, 1985, т. 21, № 9. с. 913–920. [Penenko, V.V., Raputa, V.F., Bykov, A.V., Designing an experiment in the problem of estimating the power of impurity sources. *Fizika atmosfery i okeana = Physics of the Atmosphere and Ocean*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 913–920. (in Russian)]
2. Besk, J.V., Blackwell, B., Clair, C.St., *Inverse conduction ill-posed problems.* Wiley, New York, 1985.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., *Численные методы решения обратных задач математической физики.* Эдиториал УРСС, Москва, 2004. [Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki = Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics.* Editorial URSS, Moscow, 2004. (in Russian)]
4. Бакушинский, А.Б., Гончарский А.В., *Итеративные методы решения некорректных задач.* Наука, Москва, 1988. [Bakushinsky, A.B., Goncharsky A.V., *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Iterative methods for solving ill-posed problems.* Nauka, Moscow, 1988. (in Russian)]
5. Тихонов, А.Н., Арсенин, В.Я., *Методы решения некорректных задач.* Наука, Москва, 1979. [Tikhonov, A.H., Arsenin, V.Ya., *Methods for solving ill-posed problems.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
6. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* Наука, Москва, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical Modeling in the problem of the environment.* Nauka, Moscow, 1982. (in Russian)]
7. Алексеев, Г.В., Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса. *Сиб. мат. журн.*, 2001, т. 42, № 5, с. 971–991. [Alekseev, G.V., Solvability of inverse extremal problems for stationary equations of heat and mass transfer. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 5, pp. 971–991. (in Russian)]
8. Алексеев, Г.В., Адомавичюс, Э.А., О разрешимости неоднородных краевых задач для стационарных уравнений массопереноса. *Дальневост. мат. журн.*, 2001, т. 2, № 2, с. 138–153. [Alekseev G.V., Adomavichyus E.A., On the solvability of inhomogeneous boundary value problems for stationary equations of mass transfer. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 138–153. (in Russian)]
9. Алексеев, Г.В., Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2002, т. 42, № 3, с. 380-–394. [Alekseev, G.V., Inverse extremal problems for stationary equations of mass transfer theory. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 3, pp. 380–394. (in Russian)]
10. Алексеев, Г.В., Соболева, О.В., Об устойчивости решений экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса. *Дальневосточный математический журнал*, 2009, вып. 1–2, с. 5–14. [Alekseev, G.V., Soboleva, O.V., On the stability of solutions to extremal problems for stationary equations of mass transfer. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2009, iss. 1–2, pp. 5–14.(in Russian)]
11. Сыромятников, П.В., Матричный метод построения символа функции Грина для стационарных задач турбулентной диффузии в многослойных средах. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 62–71. [Syromyatnikov, P.V., Matrix method for constructing the Green's function symbol for stationary problems of turbulent diffusion in multilayer media. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 62–71. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-15-3-62-71
12. Кривошеева, М.А., Лапина, О.Н., Нестеренко, А.Г., Никитин, Ю.Г., Сыромятников, П.В., Аналитическое и численное моделирование стационарной краевой задачи диффузии – конвекции – распада для однородного слоя на основе уравнений турбулентной диффузии. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 3, с. 37–47. [Krivosheeva, M.A., Lapina, O.N., Nesterenko, A.G., Nikitin, Yu.G., Syromyatnikov, P.V., Analytical

and numerical modeling of the stationary boundary value problem of diffusion-convection-decay for a homogeneous layer based on the equations of turbulent diffusion. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 37–47. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-17-3-37-47

13. Сыромятников, П.В., Матричный метод решения нестационарных задач конвекции – диффузии в полуограниченных многослойных и градиентных средах. *Наука Юга России*, 2018, т. 14, № 4, с. 3–13. [Syromyatnikov, P.V., Matrix method for solving non-stationary problems of convection – diffusion in semi-bounded multilayer and gradient media. *Nauka Yuga Rossii = Science of the South of Russia*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 3–13. (in Russian)]
14. Лапина, О.Н., Нестеренко, А.Г., Никитин, Ю.Г., Павлова, А.В., Моделирование процесса диффузии – конвекции загрязняющей примеси от периодического источника. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 26–35. [Lapina, O.N., Nesterenko, A.G., Nikitin, Yu.G., Pavlova, A.V., Modeling of the process of diffusion – convection of a pollutant from a periodic source. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 26–35. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-19-1-25-34
15. Liu, G.R., Han, X., *Computational inverse techniques in nondestructive evaluation.* CRS Press, 2003.
16. Gablonsky, J.N., *DIRECT. Version 2.0. User Guide.* Technical Report CRSC-TR01-08. Center for Research and Scientific Computation, North Carolina State University, 2001.
17. Karmazin, A., Kirillova, E., Seemsnn, W., Syromyatnikov, P., On the solution of crack identification problem in composite materials. In *Advanced Problems of Mechanics: Proceedings of the XXXIX International Summer School. July 1–5 2011. St-Peterburg, Russia*, pp. 227–234.
18. Рапута, В.Ф., Крылова, А.И., Оптимизационные модели управления и контроля источников аэрозолей в приземном слое атмосферы. *Оптика атмосферы и океана*, 1994, т. 7, № 8, с. 1120–1125. [Raputa, V.F., Krylova, A.I., Optimization models for the control and monitoring of aerosol sources in the surface layer of the atmosphere. *Optika atmosfery i okeana = Atmospheric and oceanic optics*, 1994, vol. 7, no. 8, pp. 1120–1125. (in Russian)]