

УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-4-68-75

О возбуждении направленных волн в композитных материалах

Е. В. Кириллова  

Университет прикладных наук Рейн-Майн, ул. Курт-Шумахер-Ринг 18, г. Висбаден, Германия

✉ Кириллова Евгения Вадимовна; ORCID 0000-0002-6797-0920; e-mail: kirilova@web.de

Аннотация. Было проанализировано влияние различных параметров на волновые поля, возбуждаемые в композитных пластинах пьезоэлементами различной формы. Сформулированная краевая задача была сначала проинтегрирована с помощью преобразования Фурье, построена матрица Грина, а затем с помощью обратного преобразования вычислено решение. Было показано, что только для определенных композитных материалов применение секторных вибраторов позволяет получить усиление амплитуды волн в выбранном направлении.

Ключевые слова: волны Лэмба, гармонические колебания, композитная пластина, матрица Грина, преобразование Фурье, круговой актуатор, секторный пьезоэлемент, направленное возбуждение волн.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Кириллова Е. В. О возбуждении направленных волн в композитных материалах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 68–75. DOI 10.31429/vestnik-19-4-68-75

Поступила 25 ноября 2022 г. После доработки 27 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

On Excitation of Directed Waves in Composite Materials

E. V. Kirillova 

RheinMain University of Applied Sciences in Wiesbaden, Kurt-Schumacher-Ring 18, Wiesbaden, 65197, Germany

✉ Evgeniya V. Kirillova; ORCID 0000-0002-6797-0920; e-mail: kirilova@web.de

Abstract. The influence of various parameters on wave fields excited in composite plates by piezoelectric elements of various shapes has been analyzed. The formulated boundary value problem was first integrated using the Fourier transform, the Green matrix was constructed, and then the solution was calculated using the inverse transformation. It has been shown that only for certain composite materials the use of sector vibrators makes it possible to obtain amplification of the amplitude of the waves in the selected direction.

Keywords: Lamb waves, harmonic oscillations, composite plate, Green matrix, Fourier transform, circular actuator, sector piezoelectric element, directional wave excitation.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Kirillova E. V. On excitation of directed waves in composite materials. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 68–75. DOI 10.31429/vestnik-19-4-68-75

Received 25 November 2022. Revised 27 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

В последнее время композитные материалы все чаще используются из-за их преимуществ, таких как более высокая прочность, большая эластичность и универсальная применимость. Тем не менее, наряду с этими преимуществами необходимо учитывать и недостатки — более высокая чувствительность к вибрации и расслоение, что значительно увеличивает вероятность образования трещин. Таким образом, алгоритмы, позволяющие обнаруживать возникшие дефекты, необходимы во многих отраслях промышленности. К ним относятся авиастроение

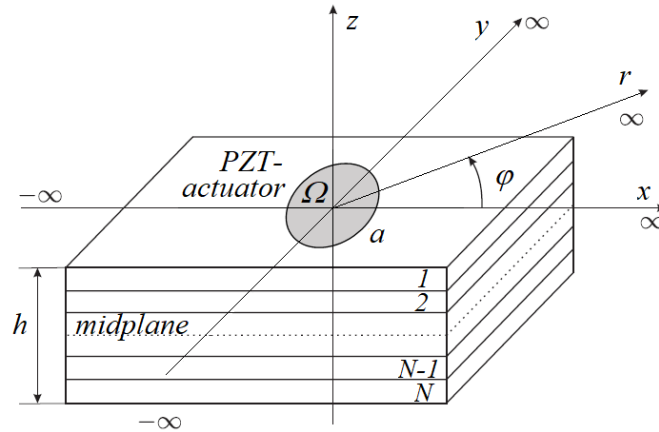


Рис. 1. Схема нагружения многослойной анизотропной пластины

(мониторинг крупномасштабных деталей конструкции самолета), машиностроение (мониторинг трубопроводов), химическая промышленность, автомобилестроение и традиционное машиностроение.

В настоящее время одним из наиболее точных и востребованных методов неразрушающего контроля и мониторинга состояния различных инженерных конструкций является метод, основанный на применении волн Лэмба. В настоящей работе анализируется влияние различных параметров пьезоактуаторов на волновые поля, возбуждаемые в композитных пластинах. Была разработана концепция выбора параметров вибраторов для возбуждения волн, которые усиливаются в определенном направлении для выбранных частот и подавляются в других направлениях.

1. Решение задачи о распространении волн и структура возбуждаемого волнового поля

Многослойная композитная пластина толщины h возбуждается круговым пьезоэлектрическим актуатором радиуса a (рис. 1). Композит занимает область

$$D = \{(x, y, z) \mid -\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty; z_{N+1} \leq z \leq z_1\},$$

где N — число слоев, $z_n = -h(n-1)/N$, $n = 1, \dots, N+1$, z — координаты границ слоев.

Уравнения колебаний каждого слоя

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(n)}}{\partial x_j} = \rho^{(n)} \ddot{u}_i^{(n)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)})$ и $\sigma_{ij}^{(n)}$ компоненты вектора деформаций и тензора напряжений n -го слоя и $\rho^{(n)}$ плотность n -го слоя. На границах между слоями вертикальные напряжения и деформации непрерывны

$$\sigma_{j3}^{(n)} = \sigma_{j3}^{(n+1)}, \quad u_j^{(n)} = u_j^{(n+1)}, \quad z = z_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (1.2)$$

Нижняя граница свободна от напряжений

$$\left(\sigma_{13}^{(N)}, \sigma_{23}^{(N)}, \sigma_{33}^{(N)} \right) \Big|_{z=z_{N+1}} = 0.$$

Гармонические колебания композитной плиты с частотой ω описываются с помощью множителя $e^{-i\omega t}$ (t — время). Далее множитель $e^{-i\omega t}$ опущен и рассматриваются амплитуды колебаний.

Для рассмотренного на рис. 1 кругового пьезоэлемента сосредоточенные на границе области $\Omega = \{r^2 = x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\}$ силы моделируются с помощью соответствующих векторов нагрузки, которые могут быть представлены в полярных координатах $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]$

$$q_x = \tau_0 \delta(r - a) \cos \varphi, \quad q_y = \tau_0 \delta(r - a) \sin \varphi, \quad q_z = 0, \quad \forall (r, \varphi). \quad (1.3)$$

Сформулированная краевая задача была сначала проинтегрирована с помощью преобразования Фурье по переменным x, y и построена матрица Грина. Решение рассматриваемой задачи в преобразованиях Фурье [1]:

$$U_l^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z) = K_{lj}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z) Q_j(\alpha_1, \alpha_2), \quad l, j = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Здесь $K_{lj}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — трансформанты Фурье компонент матрицы Грина $\mathbf{K}^{(n)}$ n -го слоя, вектор \mathbf{Q} с компонентами $Q_j(\alpha_1, \alpha_2)$ — трансформанта Фурье вектора нагрузки $\mathbf{q}(x, y)$. Применение преобразования Фурье к граничным условиям на поверхности (1.3) приводит к следующим соотношениям:

$$Q_1(\alpha, \gamma) = 2\pi i a \tau_0 J_1(a\alpha) \cos \gamma, \quad Q_2(\alpha, \gamma) = 2\pi i a \tau_0 J_1(a\alpha) \sin \gamma, \quad Q_3(\alpha, \gamma) = 0, \quad (1.5)$$

где $J_1(a\alpha)$ — функция Бесселя первого рода, $\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \alpha_2 = \alpha \sin \gamma$ и $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \gamma \in [0; 2\pi]$.

Алгоритм вычисления матрицы Грина в области частотно-волновых чисел подробно описан в [2]. После применения обратного преобразования Фурье решение задачи можно записать в виде интеграла

$$\mathbf{u}^{(n)}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.6)$$

Для удобства опустим индексы и перейдем к цилиндрическим координатам

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma^+(\gamma)} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)} \alpha d\alpha d\gamma, \quad (1.7)$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma^+(\gamma)$ — контуры, которые обходят все действительные полюса подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения [3].

Интеграл по α может быть вычислен как сумма вычетов с помощью теоремы Коши и Леммы Жордана

$$\mathbf{u}^\pm(r, \varphi, z, \omega) = \pm \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma^\pm(r, \varphi)} \mathbf{b}_m^\pm(\gamma, z, \omega) e^{-ik_m^\pm(\gamma)r \cos(\gamma - \varphi)} d\gamma - \mathbf{d}^\pm(r, \varphi, z, \omega), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{b}_m^\pm(\gamma, z, \omega) = \text{res } \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega)|_{\alpha=k_m^\pm(\gamma)} \mathbf{Q}(k_m^\pm(\gamma), \gamma) k_m^\pm(\gamma), \quad (1.9)$$

$$\mathbf{d}^\pm = (d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm), \quad d_l^\pm = \sum_{j=1}^3 d_{lj}^\pm, \quad l = \overline{1, 3} \quad (1.10)$$

$$d_{lj}^\pm(r, \varphi, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{l^\pm}} \left(\int_{\gamma^\pm(r, \varphi)} K_{lj}(\alpha, \gamma, z, \omega) Q_j(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)} d\gamma \right) \alpha d\alpha. \quad (1.11)$$

Здесь $k_m^\pm(\gamma)$ — вещественные полюса Фурье-преобразования матрицы Грина \mathbf{K} , расположенные в первом и четвертом квадрате для: $\gamma = \varphi + \pi/2$ и $\gamma = \varphi + 3\pi/2$ соответственно. Вкладом комплексных полюсов можно пренебречь для $r \rightarrow \infty$. В дальней от источника колебаний

зоне $r \rightarrow \infty$ интегралы $d_{lj}(r, \varphi)$ по мнимым осям не учитываются. Полоса $k_m^\pm(\gamma)$ вносят вклад в (1.8) на концах интервалов $\gamma^\pm(\varphi) = (\varphi \pm \pi/2, \varphi + \pi \pm \pi/2)$ и в стационарных точках фазовой функции

$$P_m^\pm(\gamma(\varphi), \varphi) = -k_m^\pm(\gamma) \cos(\gamma - \varphi). \quad (1.12)$$

Согласно методу стационарной фазы стационарные точки $\gamma_{mp}^\pm(\varphi)$ для каждого полюса $k_m^\pm(\gamma)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{k_{m,\gamma}^\pm(\gamma)}{k_m^\pm(\gamma)} = \tan(\gamma - \varphi), \quad \gamma \in (\varphi \pm \pi/2, \varphi + \pi \pm \pi/2), \quad (1.13)$$

В дальней от источника зоны их вклад описывается следующим выражением

$$\mathbf{G}_{mp}^\pm(r, \varphi, z, \omega) = \pm \frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{\mathbf{b}_m^\pm(\gamma_{mp}^\pm(\varphi), z, \omega)}{\sqrt{-i \cdot P''_{m,\gamma^2}(\gamma_{mp}^\pm(\varphi), \varphi)}} e^{irP_m^\pm(\gamma_{mp}^\pm(\varphi), \varphi)} + O(r^{-3/2}), \quad (1.14)$$

где

$$P''_{m,\gamma^2}(\gamma_{mp}^\pm(\varphi), \varphi) = \frac{\partial^2 P^\pm(\gamma_{mp}^\pm(\varphi), \varphi)}{\partial \gamma^2} \neq 0.$$

Окончательное асимптотическое разложение вектора смещения имеет вид

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z, \omega) = \sum_{m=1}^{N_r} \sum_{p=1}^{N_{mp}^\pm(\varphi)} \mathbf{G}_{mp}^\pm(r, \varphi, z, \omega) + O(r^{-3/2}), \quad (1.15)$$

где N_r — количество вещественных полюсов и $N_{mp}^\pm(\varphi)$ количество стационарных точек, соответствующих полюсу $k_m^\pm(\gamma)$ в направлении φ .

Решение задачи (1.1)–(1.3) для композитной пластины с симметрией относительно средней плоскости $z = -h/2$ может быть представлено в виде суммы симметричных и антисимметричных волн Лэмба. Дисперсионное уравнение $\Delta(\omega, \alpha, \gamma) = 0$, где $\Delta(\omega, \alpha, \gamma)$ является определителем преобразования Фурье матрицы Грина, можно разделить на два независимых уравнения

$$\Delta_S(\omega, \alpha, \gamma) = 0, \quad (1.16)$$

для симметричных и

$$\Delta_A(\omega, \alpha, \gamma) = 0, \quad (1.17)$$

соответственно для антисимметричных волн. Были проведены исследования для широкого диапазона частот, где существуют две симметричные S_0 и SH_0 (горизонтальная мода сдвига) и одна антисимметричная волновая мода A_0 . Решение (1.15) может быть представлено как комбинация соответствующих волновых мод $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{A_0} + \mathbf{u}_{S_0} + \mathbf{u}_{SH_0}$.

Чтобы увеличить амплитуды волн вдоль выбранных направлений, форма пьезоэлемента может быть изменена. В этом разделе представлен пример приведения в действие направленных волн с использованием составного пьезоактуатора с переменным направлением излучения (CLOVER) [4]. Такой актуатор (рис. 2) состоит из набора клиновидных пьезоэлементов, которые могут быть активированы только по выбранному направлению.

Внутренний и внешний радиусы актуатора равны a_i и a_o соответственно. Количество секторов n_c позволяет определить угловой диапазон актуаторов CLOVER: $\theta = 360^\circ/n_c$.

Функция нагрузки для одного активного сектора между углами ϕ_L и ϕ_R , $\phi_L - \phi_R = \theta$ ($z = 0$) имеет вид [1, 4]

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_0 (\delta(r - a_i) - \delta(r - a_o)) (H(\phi - \phi_L) - H(\phi - \phi_R)) \cos \phi, \\ \tau_{yz} &= \tau_0 (\delta(r - a_i) - \delta(r - a_o)) (H(\phi - \phi_L) - H(\phi - \phi_R)) \sin \phi, \quad \sigma_z = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $H(\phi)$ — функция Хевисайда. В рассмотренной модели пренебрегается напряжениями на границах между секторами.

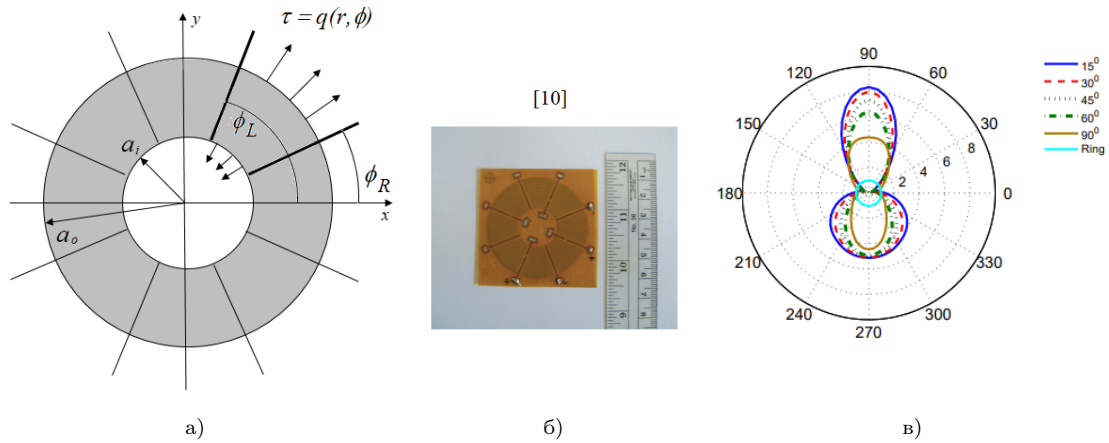


Рис. 2. CLoVER пьезоактуатор: а) схема, б) фото и в) распределение смещения в зависимости от угла для различных секторов актуатора [4]

Преобразование Фурье функции нагрузки (1.18) не может быть представлено в аналитическом виде. Используя разложение Якоби–Ангера [5], двойное преобразование в область волновых чисел принимает вид

$$\begin{aligned}
 Q_1(\alpha, \gamma) &= \tau_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \chi_n(\alpha) \int_{\phi_R}^{\phi_L} (H(\phi - \phi_R) - H(\phi - \phi_L)) e^{in(\phi - \gamma)} \cos \phi d\phi, \\
 Q_2(\alpha, \gamma) &= \tau_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \chi_n(\alpha) \int_{\phi_R}^{\phi_L} (H(\phi - \phi_R) - H(\phi - \phi_L)) e^{in(\phi - \gamma)} \sin \phi d\phi, \\
 Q_3(\alpha, \gamma) &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

где $\chi_n(\alpha) = a_o J_n(\alpha a_o) - a_i J_n(\alpha a_i)$ и $J_n(\alpha a)$ является функцией Бесселя n -го порядка.

2. Анализ волновых полей, возбуждаемых круговым и секторным пьезоактуаторами

Исследования проводились как для квазиизотропного композита, так и для композита с ярко выраженными анизотропными свойствами. Рассмотренный квазиизотропный композит состоит из 24-х слоев с ориентацией волокон $[0,45, -45,90]_{3s}$, изготовлен из эпоксидной смолы с углеродным волокном. Свойства материала в терминах инженерных констант описываются следующим образом: $E_1 = 127,6$ ГПа, $E_2 = E_3 = 11,3$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 5,97$ ГПа, $G_{23} = 3,75$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,3$, $\nu_{23} = 0,34$; плотность $\rho = 1578$ кг/м³. Все вычисления проводились в безразмерной форме, в связи с этим, инженерные константы обезразмеривались делением их на величину $E_0 = 10^{11}$ Па, плотность нормировалась на величину $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, тогда как все геометрические характеристики обезразмеривались путем деления на толщину композитной пластины h . В работе в расчетах использовалась безразмерная угловая частота $\hat{\omega} = 2\pi f_r h / c_T = 2\pi \omega / c_T$, где $\omega = f_r * h$ представляет произведение частоты на толщину возбуждаемой пластины и измеряется в КГц · мм. Значение скорости распространения поперечной волны c_T , взятой для нормализации значений, определяется как $c_T = \sqrt{G_{12} / \rho}$, где G_{12} — модуль продольного сдвига в плоскости материала композитной пластины. Очевидно, что два разных композитных материала с различными свойствами будут иметь разные значения скорости c_T , и, следовательно, разные значения безразмерной угловой частоты, но соответствующие одному и тому же значению $\omega = f_r * h$.

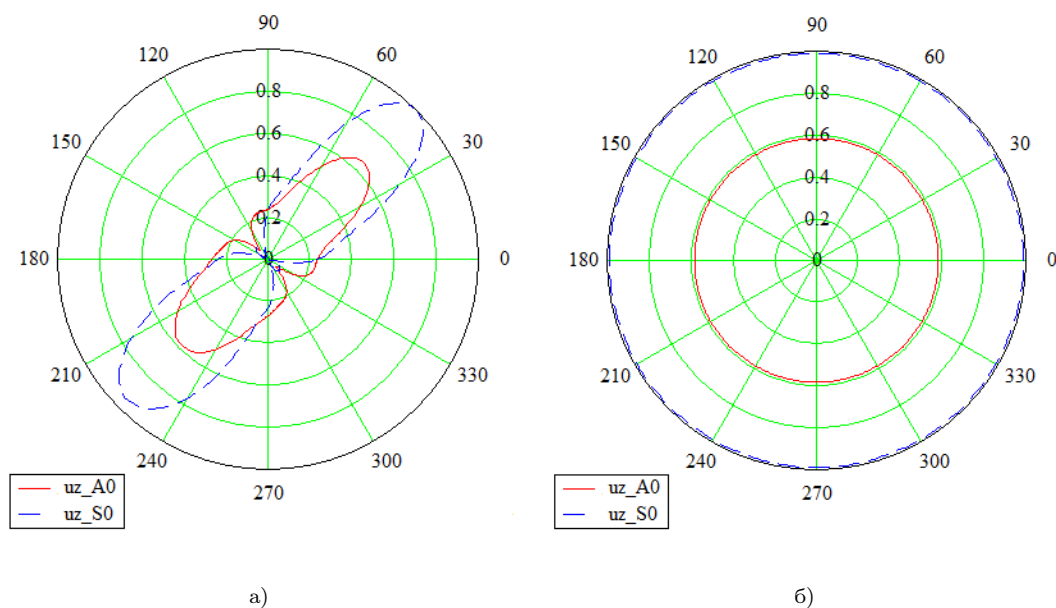


Рис. 3. Нормированные амплитуды поверхностных перемещений для а) секторного и б) кругового пьезоэлемента для $f_r \cdot h = 150$ кГц \cdot мм

На рис. 3, 4 изображены графики нормированных амплитуд поверхностных перемещений, соответствующих антисимметричной u_{A_0} и симметричной u_{S_0} волновым модам в зависимости от угла. Исследуемая пластина из квазиизотропного композита с описанными свойствами возбуждается круговым актуатором и пьезоактуатором CLoVER. Внутренний и внешний радиусы рассматриваемого сектора $a_i/h = 3$ и $a_0/h = 5$ соответственно. На рис. 3 показаны перемещения, вызванные секторным актуатором (3а), расположенным между углами $\phi_R = 22,5^\circ$ и $\phi_L = 67,5^\circ$, и круговым (3б) радиуса $a/h = 5$, полученного в точке $r/h = 100$ для частоты $f_r \cdot h = 150$ кГц \cdot мм.

Очевидно, что волны, возбуждаемые круговым пьезоактуатором, распространяются почти равномерно в зависимости от угла, в то время как секторный пьезоактуатор возбуждает волны в заданном направлении. На выбранной частоте обе волновые моды вносят сравнимый вклад в волновое поле. На рис. 4 показаны перемещения, рассчитанные для более высокой частоты $f_r \cdot h = 300$ кГц \cdot мм. Можно видеть, что при этой частоте появляется первая горизонтально-симметричная волновая мода SH_0 , а вклад первой антисимметричной моды A_0 уменьшается. Основной вклад в волновое поле вносят смещения, соответствующие первой симметричной моде S_0 .

Как и в предыдущем примере, смещения, приводимые в действие круговым пьезоактуатором (рис. 4б), почти не зависят от угла распространения, в то время как волновое поле, возбуждаемое секторным пьезоактуатором, распространяется в заданном направлении (рис. 4а). Этот эффект был продемонстрирован и для других частот.

Для сравнения был рассмотрен композит с ярко выраженными анизотропными свойствами, состоящий из 4-х слоев с ориентацией волокон $[0,90]_s$, изготовленный из углепластика T700GC/M21. Нормированные амплитуды перемещений для волновых мод u_{A_0} и u_{S_0} в полярных координатах были построены для тех же размеров кругового и секторного актуаторов для $r/h = 100$ и частоты $f_r \cdot h = 300$ кГц \cdot мм. Ввиду выбранной геометрии секторного пьезоэлемента A_0 -волны распространяются, как и ожидалось, в первом квадранте с максимальными амплитудами в направлении 45° (рис. 5а). График для S_0 -волн показывает (рис. 5б), что влияние анизотропии остается очень высоким, и, несмотря на геометрию секторного пьезоактуатора, фокусировка волн происходит в направлениях волокон.

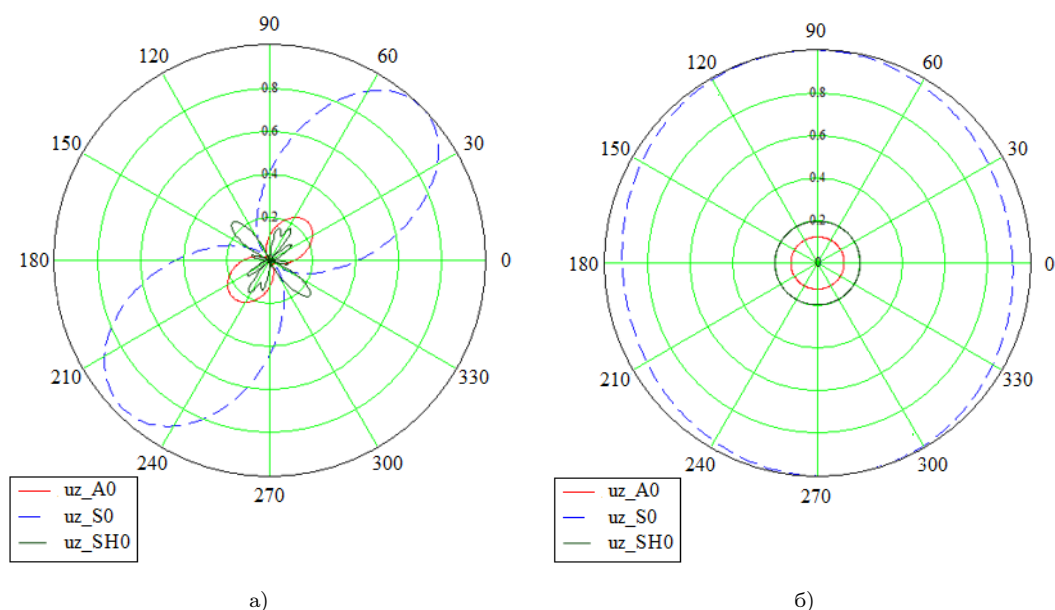


Рис. 4. Нормированные амплитуды поверхностных перемещений для а) секторного и б) кругового пьезоэлемента для $f_r \cdot h = 300$ кГц·мм

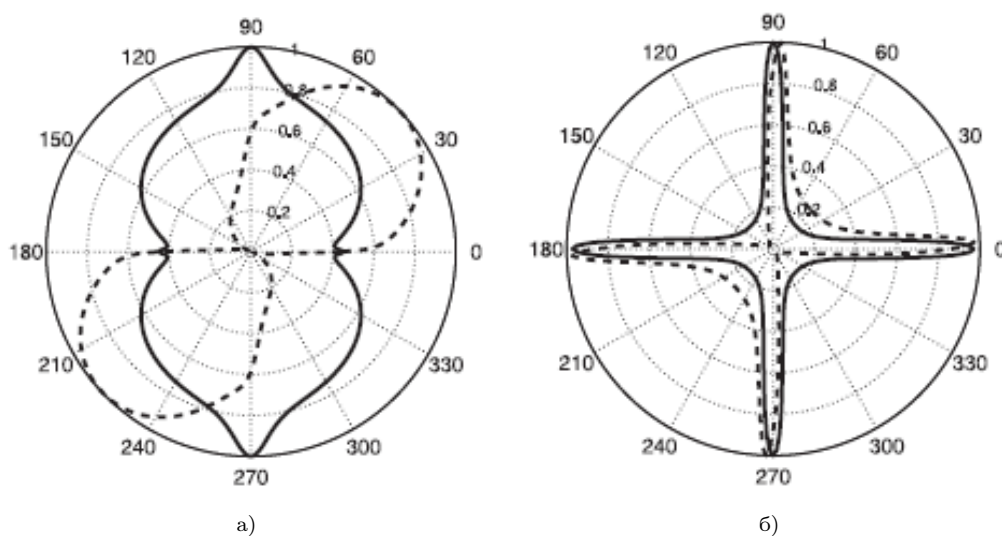


Рис. 5. Нормированные амплитуды поверхностных перемещений а) A_0 и б) S_0 для секторного (пунктир) и кругового (сплошная линия) пьезоэлемента для $f_r \cdot h = 300$ кГц·мм

Амплитуды волн в областях между волокнами намного меньше, как в случае секторного, так и кругового пьезоактуатора, что может вызвать проблемы при неразрушающем контроле материалов.

Заключение

Построенная математическая модель позволила выделить и проанализировать вклад каждой волновой моды в результирующее волновое поле и исследовать распространение отдельных мод по различным направлениям в зависимости от анизотропных свойств исследуемых ком-

позитов. Из-за анизотропии слоев амплитуды волн в слоистых композитах могут проявлять сильную фокусировку в определенных направлениях. Были проведены исследования амплитуд волн в композитных материалах для круглых пьезоактуаторов и вибраторов в форме сектора. Показано, что для определенных композитных материалов применение секторных вибраторов позволяет получить усиление амплитуды волн в выбранном направлении. Для композитов с ярко выраженными анизотропными свойствами эффект анизотропии приводит к тому, что несмотря на геометрию поверхностного вибратора, происходит фокусировка отдельных волновых мод в направлениях волокон. Таким образом, чтобы для неразрушающего контроля материалов реализовать распространение волн в выбранных направлениях, необходимо выбирать частоты, на которых вклад таких волновых мод несущественен. Подробное исследование зависимости амплитуд волн A_0 , S_0 и SH_0 от частоты проведено в работе [6].

Литература [References]

1. Karmazin, A., *Time-efficient simulation of surface-excited guided lamb wave propagation in composites*. PhD thesis, Karlsruhe Institute of Technology, 2012.
2. Karmazin, A., Kirillova, E., Seemann, W., Syromyatnikov, P., Investigation of Lamb elastic waves in anisotropic multilayered composites applying the Green's matrix. *Ultrasonics*, 2011, vol. 51, p. 17–28. DOI [10.1016/j.ultras.2010.05.003](https://doi.org/10.1016/j.ultras.2010.05.003)
3. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. Наука, Москва, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, J.F., *Dinamika neodnorodnykh lineynno-uprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear elastic media*. Nauka, Moscow, 1989. (in Russian)]
4. Salas, K.I., Cesnik, C.E.S., Guided wave excitation by a CLoVER transducer for structural health monitoring: theory and experiments. *J. Smart Mater. Struct.*, 2009, vol. 18, art. 075005. DOI [10.1088/0964-1726/18/7/075005](https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/7/075005)
5. Бейтмен, Г., Эрдейи, А., *Высшие трансцендентные функции. Т. 2*. Наука, Москва, 1974. [Bateman, G., Erdelyi, A., *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2 = Higher transcendental functions, vol. 2*, Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)]
6. Kirillova, E., Seemann, W., Shevtsova, M., Selective mode excitation of Lamb wave in composite laminates for a circular and two ring-shaped piezoelectric actuators. *J. Appl. Math. and Mech. (ZAMM)*, 2021, vol. 101, iss. 2, art. e202000078. DOI [10.1002/zamm.202000078](https://doi.org/10.1002/zamm.202000078)