

УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-4-91-99

## К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на акустическом основании

И. С. Телятников <sup>✉</sup>, М. Н. Колесников , А. В. Павлова , С. Е. Рубцов 

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

<sup>✉</sup>Телятников Илья Сергеевич; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: [ilux\\_t@list.ru](mailto:ilux_t@list.ru)

*Аннотация.* В масштабе строения Земли литосферные плиты можно рассматривать как покрытия относительно малой толщины, поэтому простейшей моделью протяженной литосферной структуры может служить пластина, что приводит к моделированию их взаимодействия с помощью разделенных деформируемых пластин. В работе рассматривается плоская задача об установившихся колебаниях системы двух контактирующих полуграниченных пластин Кирхгофа на слое идеальной жидкости, расположенном на недеформируемом основании. Колебания возбуждаются действием сосредоточенного гармонического источника, расположенного в акустической среде. Решение построено с применением интегрального подхода, метода собственных функций и метода факторизации, развитых для подобных задач, возникающих в геофизике, сейсмоакустике и экологии. Получены интегральные представления амплитудных значений прогибов покрытия (перемещения поверхности рассматриваемой структуры) и давления на границе соприкосновения упругих пластин с жидкой средой.

*Ключевые слова:* пластины Кирхгофа, установившиеся колебания, акустическая среда, сосредоточенный источник, метод собственных функций, метод факторизации.

*Финансирование.* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Кубанского научного фонда (проект № 22-21-20032, <https://rscf.ru/project/22-21-20032/>).

*Цитирование:* Телятников И. С., Колесников М. Н., Павлова А. В., Рубцов С. Е. К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на акустическом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 91–99. DOI 10.31429/vestnik-19-4-91-99

Поступила 25 ноября 2022 г. После доработки 28 ноября 2022 г. Принято 30 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### On the Study of Kirchhoff Plates Vibration on an Acoustic Base

I. S. Telyatnikov <sup>✉</sup>, M. N. Kolesnikov, A. V. Pavlova, S. E. Rubtsov

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

<sup>✉</sup>Ilya S. Telyatnikov; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: [ilux\\_t@list.ru](mailto:ilux_t@list.ru)

*Abstract.* In seismology, the study of the wave field on the surface of a medium makes it possible to build models of natural tectonic processes in the Earth's crust and upper mantle. On the scale of the Earth's structure, lithospheric plates can be considered as coatings of relatively small thickness; therefore, a plate can serve as the simplest model of an extended lithospheric structure, which leads to modeling their interactions using separated deformable plates. The problems of geodynamic interaction of deformable plates with acoustic and elastic media can be studied by methods of the contact problems theory. In this paper, we consider a plane problem of steady-state oscillations for a system of two contacting semi-bounded Kirchhoff plates on a layer of an ideal fluid located on a non-deformable foundation. Oscillations are excited by the action of a concentrated harmonic source located in an acoustic medium. The solution is constructed using the integral approach, the eigenfunction method, and the factorization method developed for similar problems arising in geophysics, seismoacoustics, and ecology. We also obtained integral representations of the amplitude values of the coating deflections (the surface displacements of the structure under consideration) and the pressure at the interface between the elastic plates and the liquid medium. The presented approach makes it possible to study the features of the propagation for waves generated by oscillating loads in acoustic media with a coating.

*Keywords:* Kirchhoff plates, steady-state oscillations, acoustic medium, concentrated source, eigen function method, factorization method.

*Funding.* The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation (project No. 22-21-20032, <https://rscf.ru/project/22-21-20032/>).

*Cite as:* Telyatnikov I. S., Kolesnikov M. N., Pavlova A. V., Rubtsov S. E. On the study of Kirchhoff plates vibration on an acoustic base. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 91–99. DOI 10.31429/vestnik-19-4-91-99

Received 25 November 2022. Revised 28 November 2022. Accepted 30 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

Изучение волновых полей на поверхности геологических структур связано с задачами мониторинга опасных эндогеодинамических и неблагоприятных экзогенных процессов, а также определения их связи с тектоническим поведением территорий. Результаты исследования вопросов подготовки сейсмических событий и анализа условий, которые определили их зарождение и процесс развития, представлены в многочисленных публикациях. Теоретические построения [1, 2 и др.] инициировали развитие методов механико-математического мониторинга, включая моделирование волновых полей от источников различной природы.

В работах ученых Кубанского государственного университета и ЮНЦ РАН предложен подход к моделированию взаимодействия разномасштабных геологических отдельностей, основанный на использовании теории блочных структур. Так, в [3–5] построена модель «стартового» землетрясения, изучена возможность решения прогностических задач путем анализа нарастания концентрации сейсмогенерирующих контактных напряжений в области сближения литосферных структур.

В масштабе строения Земли литосферные плиты можно рассматривать как покрытия относительно малой толщины, поэтому простейшей моделью протяженной литосферной структуры может служить пластина. Проблемы геодинамического взаимодействия деформируемых пластин с акустической и упругой средами могут быть изучены методами теории контактных задач.

Задачам для упругих пластин, подверженных воздействиям статических и вибрационных нагрузок, в различной постановке посвящено большое число работ [6–8 и др.], ориентированных на решение проблем неразрушающего контроля, конструкционных материалов и технологий, сейсмологии и пр.

Авторами рассматривались задачи для акустического слоя с покрытием, описываемым как уравнениями теории тонких пластин, так и полной системой уравнений Ляме [9]. В настоящей работе рассматривается плоская задача об установившихся колебаниях системы двух контактирующих полуограниченных пластин Кирхгофа на слое идеальной жидкости, расположенном на недеформируемом основании.

## 1. Постановка задачи для слоя жидкости с составным покрытием

Рассматривается задача о вибрации слоя жидкости на недеформируемом основании под действием сосредоточенного внутреннего источника. На поверхности акустической среды расположено упругое покрытие в виде двух граничащих вдоль прямой  $x_1 = 0$  полубесконечных пластин Кирхгофа  $\Omega_+ = \{x_1 > 0\}$  и  $\Omega_- = \{x_1 < 0\}$ . Для установившегося режима колебаний (с частотой  $\omega$ ) множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опущен, во всех соотношениях использованы комплексные амплитуды соответствующих функций.

Колебания пластин Кирхгофа, моделирующих составное покрытие, после отделения временного множителя описываются линеаризованными уравнениями относительно амплитуд смещений их срединной плоскости  $u_{\pm}(x_1)$  [10], во всех последующих формулах индекс «+» указывает на правую полуплоскость, «-» — на левую,

$$R_{\pm}(\partial x_1) u_{\pm}(x_1) - \varepsilon_{\pm 5} g_{\pm}(x_1) = 0, \quad x_1 \in \Omega_{\pm}, \quad (1.1)$$

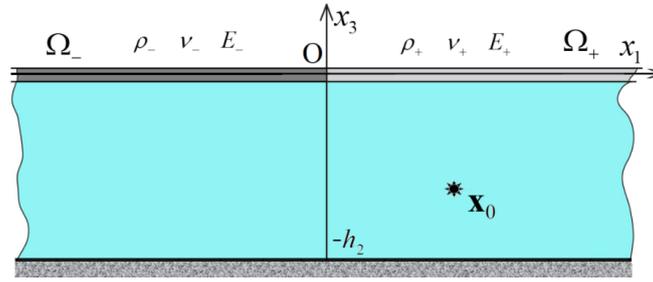


Рис. 1. Геометрия задачи

где

$$R_{\pm}(\partial x_1) = \varepsilon_{\pm 3} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \varepsilon_{\pm 4}, \quad \varepsilon_{\pm 3} = h_{\pm}^2/12, \quad \varepsilon_{\pm 4} = \omega^2 \rho_{\pm} (1 - \nu_{\pm}^2) E_{\pm}^{-1}, \quad \varepsilon_{\pm 5} = (1 - \nu_{\pm}^2) E_{\pm}^{-1} h_{\pm}^{-1},$$

$\rho_{\pm}$  — плотности,  $E_{\pm}$  — модули Юнга,  $\nu_{\pm}$  — коэффициенты Пуассона,  $h_{\pm}$  — толщины пластин,  $g_{\pm}(x_1)$  — амплитуды напряжений на нижних границах пластин.

Оси декартовой системы координат выбраны, как показано на рис. 1. Ось  $Ox_1$  проходит через срединную плоскость пластин, начало координат совпадает с разломом.

Граничные условия в  $x_1 = 0$  на срединной плоскости задаются соотношениями

$$L_1(\partial x_1)u(x_1)|_{x_1=0+0} + L_2(\partial x_1)u(x_1)|_{x_1=0-0} = f. \quad (1.2)$$

Взаимодействия частей покрытия в области их контакта определяет конкретный вид операторов  $L_j(\partial x_1)$ ,  $j = 1, 2$ , и правой части (1.2), различные варианты граничных условий приведены в [10, 11].

В акустической среде поле давления  $p(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца [12]

$$\Delta p(\mathbf{x}) + \kappa^2 p(\mathbf{x}) = A_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, x_3)$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{30})$  — точка локализации осциллирующего источника,  $\kappa = \omega/c$ ,  $c$  — скорость распространения акустических волн,  $A_0$  — характеристика интенсивности источника,  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа.

При установившемся движении акустической среды, так как  $p(\mathbf{x}) = i\omega\rho_0\varphi(\mathbf{x})$ , для потенциала скоростей  $\varphi(\mathbf{x})$  в области  $(-\infty < x_1 < +\infty, -h_2 \leq x_3 < -0)$  справедливо уравнение Гельмгольца

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{x}) = A_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (1.3)$$

где  $A_1 = -\frac{iA_0}{\omega\rho_0}$ ,  $\rho_0$  — плотность жидкости.

На границе пластин покрытия и акустического слоя (при  $x_3 = 0$ ) нормальная компонента напряжений равна по величине давлению

$$g_{\pm}(x_1) = -p(x_1, 0) = -i\omega\rho_0\varphi(x_1, 0), \quad x_1 \in \Omega_{\pm}. \quad (1.4)$$

Вертикальные составляющие векторов скоростей для покрытия и акустического слоя в области контакта непрерывны

$$-i\omega u_{\pm}(x_1) = \frac{\partial\varphi(x_1, 0)}{\partial x_3}, \quad x_1 \in \Omega_{\pm}. \quad (1.5)$$

В области контакта жидкости с недеформируемым основанием ( $x_3 = -h_2$ ) выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi(x_1, -h_2)}{\partial x_3} = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

В случае установившихся гармонических колебаний к граничным условиям добавляются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения.

В работе [13] с помощью топологического подхода исследована задача о взаимодействии системы полубесконечных плит с тяжелой жидкостью в предположении, что торцы плит не контактируют и между ними присутствует жидкость. В настоящей работе полагается, что в зоне контакта пластин жидкости нет.

## 2. Решение граничной задачи для слоя жидкости

Построим решение задачи для потенциала скоростей (1.3), (1.4), (1.6), считая  $g_{\pm}(x_1)$  заданным.

Решение граничной задачи будем строить с помощью интегрального преобразования Фурье по горизонтальной координате  $x_1$ . Найдем Фурье-образ  $\varphi(x_1, x_3)$ , для этого введем обозначение

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = V\varphi(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_3) \exp(i\alpha_1 x_1) dx_1.$$

Здесь  $V$  — оператор преобразования Фурье.

Применив преобразование Фурье к уравнению (1.3) для  $\varphi(\mathbf{x})$  и граничным условиям (1.4), (1.6), получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Phi''(\alpha_1, x_3) + (\kappa^2 - \alpha_1^2) \Phi(\alpha_1, x_3) = A_1 \delta(x_3 - x_{30}) \exp(i\alpha_1 x_{10}), \quad (2.1)$$

где штрихом обозначена производная по переменной  $x_3$ , с граничными условиями

$$\Phi(\alpha_1, 0) = \frac{i}{\omega \rho_0} G(\alpha_1), \quad \Phi'(\alpha_1, -h_2) = 0, \quad (2.2)$$

$$G(\alpha_1) = G_+(\alpha_1) + G_-(\alpha_1), \quad G_{\pm}(\alpha_1) = Vg_{\pm}(x_1).$$

Используя интегральное представление  $\delta$ -функции Дирака [14]

$$\delta(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta\xi} d\xi,$$

уравнение (2.1) можно записать

$$\Phi''(\alpha_1, x_3) + (\kappa^2 - \alpha_1^2) \Phi(\alpha_1, x_3) = \frac{A_1 e^{i\alpha_1 x_{10}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x_3 - x_{30})} d\xi. \quad (2.3)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.3) представляется в виде

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \Phi_0(\alpha_1, x_3) + \Phi_1(\alpha_1, x_3), \quad (2.4)$$

где первое слагаемое — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Phi_0(\alpha_1, x_3) = C_1 e^{\sigma_0 x_3} + C_2 e^{-\sigma_0 x_3}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\alpha_1^2 - \kappa^2},$$

а второе — частное решение неоднородного уравнения

$$\Phi_1(\alpha_1, x_3) = -\frac{A_1 e^{i\alpha_1 x_{10}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\xi(x_3 - x_{30}))}{\xi^2 + \sigma_0^2} d\xi = -\frac{A_1 \exp(i\alpha_1 x_{10}) \exp(-\sigma_0 |x_3 - x_{30}|)}{2\sigma_0}.$$

Тогда

$$\Phi_1'(\alpha_1, x_3) = \frac{A_1}{2} \operatorname{sgn}(x_3 - x_{30}) \exp(-\sigma_0 |x_3 - x_{30}|) \exp(i\alpha_1 x_{10}).$$

Граничные условия (2.2) позволяют определить константы  $C_1, C_2$

$$C_1 + C_2 = \frac{i}{\omega\rho_0} G(\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1, 0),$$

$$\sigma_0 C_1 \exp(-\sigma_0 h_2) - \sigma_0 C_2 \exp(\sigma_0 h_2) = -\Phi_1'(\alpha_1, -h_2).$$

Решив систему, из (2.4) получим

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_1, x_3) = & [iG(\alpha_1) \sigma_0 \operatorname{ch} \sigma_0 (x_3 + h_2) (\omega\rho_0)^{-1} - \sigma_0 \Phi_1(\alpha_1, 0) \operatorname{ch} \sigma_0 (x_3 + h_2) - \\ & - \Phi_1'(\alpha_1, -h_2) \operatorname{sh} \sigma_0 x_3 + \Phi_1(\alpha_1, x_3) \Delta_0(\alpha_1)] \Delta_0^{-1}(\alpha_1), \quad (2.5) \\ \Delta_0(\alpha_1) = & \sigma_0 \operatorname{ch}(\sigma_0 h_2). \end{aligned}$$

### 3. Решение граничной задачи для составного покрытия

В работах [3–5] развит подход к исследованию задач для блочных сред с покрытиями, использующий метод блочного элемента. Для частных случаев, моделирующих взаимодействие плит по прямолинейному участку границы, могут использоваться и другие подходы, в частности метод собственных функций, который позволяет облегчить построение представлений решений.

Общие решения уравнений (1.1), удовлетворяющие условию ограниченности и принципу предельного поглощения в заданных областях, соответствующие распространяющимся в горизонтальном направлении волнам, имеют вид [15]

$$u_{\pm}(x_1) = A_{\pm 1} e^{\mp q_{\pm} x_1} + A_{\pm 2} e^{\pm i q_{\pm} x_1} + V^{-1}(x_1) R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) \varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\alpha_1), \quad x_1 \in \Omega_{\pm}.$$

Здесь  $A_{\pm j}, j = 1, 2$  – произвольные константы;  $q_{\pm} \in \mathbb{R}, q_{\pm} > 0$  – корни уравнений  $R_{\pm}(\alpha_1) = 0$ . Представим  $R_{\pm}(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm 3} (\alpha_1 - q_{\pm}) (\alpha_1 - i q_{\pm}) (\alpha_1 + q_{\pm}) (\alpha_1 + i q_{\pm})$ .

Применив к (1.1) преобразование Фурье по переменной  $x_1$ , получим соотношения в трансформантах

$$U_{\pm}(\alpha_1) = \frac{\pm i A_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm i q_{\pm}} + \frac{\pm i A_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_{\pm}} + \varepsilon_{\pm 5} [R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) G_{\pm}(\alpha_1)]^{\pm}.$$

Последнее слагаемое в правой части подлежит факторизации в виде суммы. Верхний индекс «+» квадратной скобки указывает на регулярность функции в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\alpha_1$ , «-» – на регулярность в нижней полуплоскости. Воспользовавшись тем, что  $F^{\pm}(\alpha_1) = F(\alpha_1) - F^{\mp}(\alpha_1)$ , получим [15]

$$U_{\pm}(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm 5} R_{\pm}^{-1} G_{\pm}(\alpha_1) + \frac{\pm i A_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm i q_{\pm}} + \frac{\pm i A_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_{\pm}} \mp \frac{\varepsilon_{\pm 5}}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}} \left[ \frac{G_{\pm}(\pm q_{\pm})}{\alpha_1 \mp q_{\pm}} + \frac{i G_j(\pm i q_{\pm})}{\alpha_1 \mp i q_{\pm}} \right]. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) можно выразить преобразования Фурье амплитуд контактных напряжений на нижних поверхностях пластин

$$G_{\pm}(\alpha_1) = \frac{R_{\pm} U_{\pm}(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm 5}} - \frac{R_{\pm}}{\varepsilon_{\pm 5}} \left( \frac{\pm i A_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm i q_{\pm}} + \frac{\pm i A_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_{\pm}} \right) \pm \frac{R_{\pm}}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}} \left[ \frac{G_{\pm}(\pm q_{\pm})}{\alpha_1 \mp q_{\pm}} + \frac{i G_{\pm}(\pm i q_{\pm})}{\alpha_1 \mp i q_{\pm}} \right]. \quad (3.2)$$

### 4. Построение интегральных уравнений и их решений в областях пластин

Условия сопряжения покрытия со слоем жидкости (1.5) в образах Фурье запишутся

$$\begin{aligned} U_+(\alpha_1) + U_-(\alpha_1) = & [-(G_+(\alpha_1) + G_-(\alpha_1)) \sigma_0^2 \operatorname{sh} \sigma_0 h_2 (\omega\rho_0)^{-1} - i \sigma_0^2 \Phi_1(\alpha_1, 0) \operatorname{sh} \sigma_0 h_2 - \\ & - \sigma_0 i \Phi_1'(\alpha_1, -h_2) + i \sigma_0 \Phi_1'(\alpha_1, 0) \operatorname{ch}(\sigma_0 h_2)] (\omega \Delta_0)^{-1}. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших построений введем обозначение

$$\bar{\Phi}(\alpha_1) = \frac{i\sigma_0}{\omega\Delta_0} [\Phi'_1(\alpha_1, 0) \operatorname{ch}(\sigma_0 h_2) - \sigma_0 \Phi_1(\alpha_1, 0) \operatorname{sh}(\sigma_0 h_2) - \Phi'_1(\alpha_1, -h_2)].$$

Таким образом, из условий сопряжения пластин покрытия с акустической средой (4.1) и выражений трансформант Фурье напряжений (3.2) вытекает система функциональных уравнений относительно интегральных характеристик перемещений

$$\begin{aligned} & M_1(\alpha_1)U_+(\alpha_1) + M_2(\alpha_1)U_-(\alpha_1) = \\ & = Q_0(\alpha_1) + \sum_{j=1}^2 [A_{+j}Q_{+j}(\alpha_1) + A_{-j}Q_{-j}(\alpha_1) + Q_{+j}^q(\alpha_1)G_+(q_j^+) + Q_{-j}^q(\alpha_1)G_-(q_j^-)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь в функциях  $M_j(\alpha_1)$ , где

$$M_j(\alpha_1) = \frac{\omega^2 \Delta_0 \rho_0 \varepsilon_{\pm 5} + R_{\pm}(\alpha_1) \sigma_0^2 \operatorname{sh}(\sigma_0 h_2)}{\varepsilon_{\pm 5} \sigma_0^2 \operatorname{sh}(\sigma_0 h_2)},$$

индекс «1» соответствует верхнему знаку в этажных символах « $\pm$ », индекс «2» — нижнему. Функции  $M_1(\alpha_1)$  и  $M_2(\alpha_1)$  являются четными и имеют на вещественной оси конечное число простых полюсов и нулей.

В (4.2) также введены обозначения:

$$\begin{aligned} Q_0(\alpha_1) &= \frac{\omega^2 \rho_0 \Delta_0 \bar{\Phi}(\alpha_1)}{\sigma_0^2 \operatorname{sh}(\sigma_0 h_2)}, & Q_{\pm 1}(\alpha_1) &= \frac{\pm i R_{\pm}(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm 5}(\alpha_1 \pm i q_{\pm})}, & Q_{\pm 2}(\alpha_1) &= \frac{\pm i R_{\pm}(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm 5}(\alpha_1 \pm q_{\pm})}, \\ Q_{\pm 1}^q &= \frac{\pm R_{\pm}(\alpha_1)}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}(\alpha_1 \mp q_{\pm})}, & Q_{\pm 2}^q &= \frac{\pm i R_{\pm}(\alpha_1)}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}(\alpha_1 \mp i q_{\pm})}, & q_1^{\pm} &= \pm q_{\pm}, & q_2^{\pm} &= \pm i q_{\pm}. \end{aligned}$$

Поделив левую и правую части соотношения (4.2) на функцию  $M_1(\alpha_1)$ , придем к системе функциональных уравнений, которая с учетом регулярности функций  $U_{\pm}(\alpha_1)$  в соответствующих областях может быть решена методом Винера – Хопфа [16].

Факторизовав функцию  $M(\alpha_1) = M_2(\alpha_1)M_1^{-1}(\alpha_1)$  относительно контура  $\sigma$ , почти всюду совпадающего с вещественной осью, в виде произведения  $M(\alpha_1) = M_+(\alpha_1)M_-(\alpha_1)$  по параметру  $\alpha_1$  и умножив последнюю систему на  $M_+^{-1}(\alpha_1)$ , придем к соотношениям

$$\begin{aligned} & M_+^{-1}(\alpha_1)U_+(\alpha_1) + M_-(\alpha_1)U_-(\alpha_1) = P_0(\alpha_1) + \\ & + \sum_{j=1}^2 [A_{+j}P_{+j}(\alpha_1) + A_{-j}P_{-j}(\alpha_1) + P_{+j}^q(\alpha_1)G_+(q_j^+) + P_{-j}^q(\alpha_1)G_-(q_j^-)]. \end{aligned}$$

$$P_0(\alpha_1) = \frac{Q_0(\alpha_1)}{M_+(\alpha_1)M_1(\alpha_1)}, \quad P_{\pm j}(\alpha_1) = \frac{Q_{\pm j}(\alpha_1)}{M_+(\alpha_1)M_1(\alpha_1)}, \quad P_{\pm 1}^q(\alpha_1) = \frac{Q_{\pm 1}^q(\alpha_1)}{M_+(\alpha_1)M_1(\alpha_1)}.$$

Факторизуем в виде сумм относительно контура  $\sigma$  по параметру  $\alpha_1$  слагаемые, стоящие в правой части полученной системы

$$\begin{aligned} & M_+^{-1}U_+ + M_-U_- = P_0^+ + P_0^- + \\ & + \sum_{j=1}^2 [A_{+j}\{P_{+j}\}^+ + A_{-j}\{P_{-j}\}^+ + G_+(q_j^+)\{P_{+j}^q\}^+ + G_-(q_j^-)\{P_{-j}^q\}^+] + \\ & + \sum_{j=1}^2 [A_{+j}\{P_{+j}\}^- + A_{-j}\{P_{-j}\}^- + G_+(q_j^+)\{P_{+j}^q\}^- + G_-(q_j^-)\{P_{-j}^q\}^-]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Переносим в левую часть полученной системы уравнений все слагаемые, регулярные выше контура, а в правую — ниже контура, в соответствии с методом Винера–Хопфа, воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля [17], получаем две системы функциональных уравнений, из которых следуют выражения для образов Фурье  $U_{\pm}(\alpha_1)$  перемещений пластин покрытия:

$$U_{\pm}(\alpha_1) = U_{\pm}^0(\alpha_1) + \sum_{j=1}^2 [A_{+j}U_{\pm}^{j+}(\alpha_1) + A_{-j}U_{\pm}^{j-}(\alpha_1) + U_{q_{\pm}^+}^{j+}(\alpha_1)G_+(q_j^+) + U_{q_{\pm}^-}^{j-}(\alpha_1)G_-(q_j^-)], \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} U_+^0(\alpha_1) &= M_+(\alpha_1)P_0^+(\alpha_1); & U_-^0(\alpha_1) &= M_-^{-1}(\alpha_1)P_0^-(\alpha_1); \\ U_{+}^{j\pm}(\alpha_1) &= M_+(\alpha_1)\{P_{\pm j}(\alpha_1)\}^{\pm}; & U_{-}^{j\pm}(\alpha_1) &= M_-^{-1}(\alpha_1)\{P_{\pm j}(\alpha_1)\}^{\mp}; \\ U_{q_+}^{j\pm}(\alpha_1) &= M_+(\alpha_1)\{P_{j\pm}^q(\alpha_1)\}^{\pm}; & U_{q_-}^{j\pm}(\alpha_1) &= M_-^{-1}(\alpha_1)\{P_{j\pm}^q(\alpha_1)\}^{\mp}. \end{aligned}$$

В соотношения (4.4) входят четыре неизвестных величины  $G_{\pm}(q_j^{\pm})$ ,  $j = 1, 2$ . Чтобы исключить их из выражений для  $U_{\pm}(\alpha_1)$ , найдем из соотношений (4.3) выражения  $U_{\pm}(q_j^{\pm})$ ,  $j = 1, 2$ , и подставим их соответственно в выражения  $G_{\pm}(q_j^{\pm})$  из (3.2). В результате приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно неизвестных  $G_{\pm}(q_j^{\pm})$ , разрешив которую, получим выражения  $U_{\pm}(\alpha_1)$ , где неизвестными являются только произвольные константы  $A_{\pm j}$ ,  $j = 1, 2$ . В результате выражения для  $U_{\pm}(\alpha_1)$  могут быть записаны в следующем виде:

$$U_{\pm}(\alpha_1) = \tilde{U}_{\pm}^0(\alpha_1) + \sum_{j=1}^2 A_{+j}\tilde{U}_{\pm}^{j+}(\alpha_1) + \sum_{j=1}^2 A_{-j}\tilde{U}_{\pm}^{j-}(\alpha_1). \quad (4.5)$$

Значения  $A_{\pm j}$ ,  $j = 1, 2$ , могут быть определены с помощью заданных граничных условий (1.2). Для этого к выражениям Фурье образов перемещений  $U_{\pm}(\alpha_1)$  (4.5) применяется обратное преобразование Фурье  $V^{-1}$

$$u_{\pm}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} U_{\pm}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,$$

после подстановки  $u_{\pm}(x_1)$  в (1.2) и нахождения  $A_{\pm j}$ ,  $j = 1, 2$ , из алгебраической системы будем иметь

$$u_{\pm}(x_1) = \tilde{u}_{\pm}^0(x_1) + \sum_{j=1}^2 A_{+j}\tilde{u}_{\pm}^{j+}(x_1) + \sum_{j=1}^2 A_{-j}\tilde{u}_{\pm}^{j-}(x_1).$$

Факторизация функции  $M(\alpha_1)$  в виде произведения осуществляется приближенно. Для этого строится аппроксимирующая функция  $M^A(\alpha_1)$  [18]. Для возможности аналитического обращения преобразований Фурье  $U_{\pm}(\alpha_1)$  функции в правой части соотношений (4.3) заменяются аппроксимациями, как в [18].

## Заключение

Литосферные плиты в масштабе строения Земли могут рассматриваться в качестве покрытий относительно малой толщины, что приводит к моделированию их взаимодействия с помощью разделенных деформируемых пластин.

Локализация волнового процесса может иметь место в структурах, проводящих волны различной природы, в частности упругие и акустические. В сейсмологии изучение волнового поля поверхности среды позволяет построить модели естественных тектонических процессов в земной коре и верхней мантии.

В работе рассмотрена задача для системы «совокупность контактирующих пластин – акустическая среда – гармонический источник». Получены интегральные представления амплитудных значений прогибов покрытия (перемещения поверхности рассматриваемой структуры)

и давления на границе соприкосновения упругих пластин с жидкой средой. Представленный подход позволяет изучать особенности распространения волн, генерируемых осциллирующими нагрузками, в акустических средах с покрытием.

## Литература [References]

1. Гамбурцев, Г.А., Перспективный план исследований по проблеме. Изыскание и развитие прогноза землетрясений. В сб. *Развитие идей Г.А. Гамбурцева в геофизике*. Наука, Москва, 1982, с. 304–311. [Gamburtsev, G.A., Perspective plan of research on the problem. Research and Development of Earthquake Forecast. In: *Razvitie idey G.A. Gamburtseva v geofizike = Development of G.A. Gamburtsev in geophysics*. Nauka, Moscow, 1982, pp. 304–311. (in Russian)]
2. Садовский, М.А., Болховитинов, Л.Г., Писаренко, В.Ф., *Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс*. Наука, Москва, 1987. [Sadovsky, M.A., Bolkhovitinov, L.G., Pisarenko, V.F., *Deformirovaniye geofizicheskoy sredy i seysmicheskiiy protsess = Deformation of the geophysical environment and the seismic process*. Nauka, Moscow, 1987. (in Russian)]
3. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5. pp. 2163–2175. DOI [10.1007/s00707-017-2092-0](https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0)
4. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 10, pp. 4727–4739. DOI [10.1007/s00707-018-2255-7](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7)
5. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Хрипков, Д.А., Телятников, И.С., Евдокимов, В.С., Шестопалов, В.Л., О стартовых землетрясениях в прибрежной зоне. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3., с. 12–18. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Khripkov, D.A., Telyatnikov, I.S., Evdokimov, V.S., Shestopalov, V.L., O starting earthquakes in the coastal zone. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3., pp. 12–18. (in Russian)]
6. Altenbach, J., Altenbach, H., Eremeyev, V.A., On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech* (Special Issue), 2010, vol. 80, pp. 73–92. DOI [10.1007/s00419-009-0365-3](https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3)
7. Chandrashekhara, K., *Theory of Plates*. Himayat Nagar Universities Press, 2001.
8. Еремеев, В.А., Zubov, L.M., *Механика упругих оболочек*. Наука, Москва, 2008. [Eremeev, V.A., Zubov, L.M., *Mekhanika uprugikh obolochek = Mechanics of Elastic Shells*. Nauka, Moscow, 2008. (in Russian)]
9. Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Telyatnikov, I.S., On models of wave processes in geological structures with the presence of an interlayer water. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2022, vol. 1070. art. 012013. DOI [10.1088/1755-1315/1070/1/012013](https://doi.org/10.1088/1755-1315/1070/1/012013)
10. Вольмир, А.С., *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. Наука, Москва, 1972. [Volmir, A.S., *Nelineynaya dinamika platinok i obolochek = Nonlinear dynamics of plates and shells*. Nauka, Moscow, 1972. (in Russian)]
11. Гольденвейзер, А.Л., *Теория упругих тонких оболочек*. Наука, Москва, 1976. [Goldenweiser, A.L., *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek = Theory of elastic thin shells*. Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)]
12. Исакович, М.А., *Общая акустика*. Наука, Москва, 1973. [Isakovich, M.A., *Obshchaya akustika = General acoustics*. Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]
13. Евдокимова, О.В., Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Уафа, С.Б., Коваленко, М.М., Бушуева, О.А., О некоторых приложениях покрытий с жидкостью. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2019, т. 16, №3, с. 40–45. [Evdokimova, O.V., Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Uafa, S.B., Kovalenko, M.M., Bushueva, O.A., On some applications of liquid coatings. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 40–45. (in Russian)]
14. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А., *Уравнения математической физики*. Наука, Москва, 2004. [Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of Mathematical Physics*. Nauka, Moscow, 2004. (in Russian)]
15. Телятников, И.С., К моделям и методам изучения взаимодействия литосферных структур в

- области разломов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2016, № 2, с. 78–89. [Telyatnikov, I.S., On models and methods for studying the interaction of lithospheric structures in the fault area. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 2, pp. 78–89. (in Russian)]
16. Noble, B., *Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations*. Pergamon Press, New York, 1958.
  17. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*. Наука, Москва, 1973. [Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V., *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo = Methods of the theory of functions of a complex variable*. Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]
  18. Колесников, М.Н., Телятников, И.С., О методах изучения динамики контактирующих литосферных структур. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 4, ч. 1, с. 50–61. [Kolesnikov, M.N., Telyatnikov, I.S., On methods for studying the dynamics of contacting lithospheric structures. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 4, pt. 1, pp. 50–61. (in Russian)]