

УДК 531.39

EDN: EPRBNT DOI: 10.31429/vestnik-20-3-13-23

Вибрационное перемещение корпуса судна в сопротивляющейся среде

Ю. П. Артюхин¹, П. Г. Великанов^{1,2}✉¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия² Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. В настоящее время одной из основных задач механики колебательного движения является разработка эффективных вибрационных движителей для перемещения мобильных роботов, что, как ожидается, в самом ближайшем будущем сыграет решающую роль в развитии робототехники. В работе рассматривается развитие одной из популярных стратегий по реализации вибрационных движителей, связанная с передвижением робота в сопротивляющейся среде за счет использования подвижной внутренней массы. Приводимая в движение специальным источником энергии, подвижная внутренняя масса взаимодействует с корпусом, инициируя его движение во внешней среде, что приводит к возникновению реакции со стороны среды на корпус. Задавая специальные периодические законы движения подвижной внутренней массы, можно регулировать возникающие силы реакции среды, обеспечивая движение в выбранном направлении. В предложенной статье рассматривается вибрационное перемещение судна в вязкой жидкости и вибрационное перемещение корпуса по шероховатой поверхности, вызванные гармоническими и негармоническими законами колебаний. Также приведена постановка и решение задачи оптимального управления для двигателя судна.

Ключевые слова: колебательное движение, вибрационный движитель, мобильный робот, сопротивляющаяся среда, оптимальное управление.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Артюхин Ю. П., Великанов П. Г. Вибрационное перемещение корпуса судна в сопротивляющейся среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 13–23. EDN: EPRBNT. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-13-23

Поступила 17 января 2023 г. После доработки 6 августа 2023 г. Принято 14 августа 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи, внесение правок и утверждение окончательного варианта (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Vibratory Movement of the Ship's Hull in a Resisting Medium

Yu. P. Artyukhin¹, P. G. Velikanov^{1,2}✉¹ Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia² Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. Currently, one of the main tasks of the oscillatory motion mechanics is the development of effective vibration thrusters for moving mobile robots, which is expected to play a decisive role in the development of robotics in the very near future. This article discusses one of the popular strategies for the implementation of vibration thrusters associated with the movement of the robot in a resisting environment through the use of a movable internal mass. Driven by a special energy source, the mobile internal mass interacts with the body, initiating its movement in the external environment, which leads to a reaction from the environment to the body. By setting special periodic laws of motion of the mobile internal mass, it is possible to regulate the emerging reaction forces of the medium, ensuring movement in the chosen direction. In the article offered to your attention, the vibrational movement of the vessel in a viscous liquid and the vibrational movement of the hull on a rough surface caused by harmonic and non-harmonic laws of vibrations are considered. This article also presents the formulation and solution of the optimal control problem for the ship's engine.

Keywords: oscillatory motion, vibrating mover, mobile robot, resisting environment, optimal control.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Artyukhin, Yu. P., Velikanov, P. G., Vibratory movement of the ship's hull in a resisting medium. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 13–23. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-13-23

Received 17 January 2023. Revised 6 August 2023. Accepted 14 August 2023. Published 29 September 2023.

The contribution of each co-author to the article writing process at different stages: the idea of the work (Y.P. Artyukhin), calculations (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article, making edits and approving the final version (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Изучение механики колебательного движения насчитывает не одно столетие. В настоящее время одной из основных ее задач является разработка эффективных вибрационных движителей для перемещения мобильных роботов, что, как ожидается, в самом ближайшем будущем сыграет решающую роль в развитии робототехники.

В настоящее время известно несколько популярных стратегий по реализации вибрационных движителей. В данной статье рассматривается дальнейшее развитие одной из них [1], связанной с передвижением робота в сопротивляющейся среде за счет использования подвижной внутренней массы. Приводимая в движение специальным источником энергии, подвижная внутренняя масса взаимодействует с корпусом, инициируя его движение во внешней среде, что приводит к возникновению реакции со стороны среды на корпус. Задавая специальные периодические законы движения подвижной внутренней массы, можно регулировать возникающие силы реакции среды, обеспечивая движение в выбранном направлении.

Теоретически изучением вибрационных мобильных устройств (вибророботов) в настоящее время занимаются многочисленные отечественные и зарубежные ученые: Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, Т.Ю. Фигурина, Д.В. Баландин, И.М. Зейдис, С.Ф. Япун, К. Zimmermann, E. Papadopoulos, A. Fidlin, K. Furuta, H. Li, J.J. Thomsen и другие. Экспериментально такие механизмы в настоящее время реализуются в России (Институт проблем механики РАН, Курский государственный технический университет), Германии (Технический университет г. Ильменау), Японии и др. странах [1].

Постановка и решение задач

1. Вибрационное перемещение судна в вязкой жидкости

Рассмотрим движение судна массы M под действием периодически двигающейся массы m внутри судна. Отнесем движение судна $S(t)$ к неподвижным декартовым координатам X и Y , а координату $x(t)$ массы m — к подвижным декартовым координатам x и y , жестко связанным с корпусом судна (рис. 1).

Со стороны жидкости на судно действует внешняя сила сопротивления $-R(u)$, равная

$$-R(u) = \frac{k_p}{2} [1 - k + (1 + k) \operatorname{sign}(u)] u^2, \quad (*)$$

где $u = dS/dt = \dot{S}$; $k = k_m/k_p$; k_m, k_p — коэффициенты вязкости при движении судна назад и вперед, пропорциональные динамической вязкости; $\operatorname{sign}()$ — обобщенная функция знака. Учитывается анизотропия сопротивления движению.

Анизотропию сопротивления движению можно объяснить несимметричностью профиля судна относительно его центра. При колебательном движении судна при $k > 1$ и движении вперед сила сопротивления жидкости, действующая на носовую часть судна, равна $R_p = k_p u^2$. При движении судна назад сила сопротивления равна $R_m = k_m u^2$. При одинаковой средней скорости u за одно колебание и $k > 1$ реакция жидкости на судно будет давать равнодействующую (средняя скорость $\langle u \rangle > 0$)

$$R_m - R_p = \langle k_m u^2 \rangle - \langle k_p u^2 \rangle > 0,$$

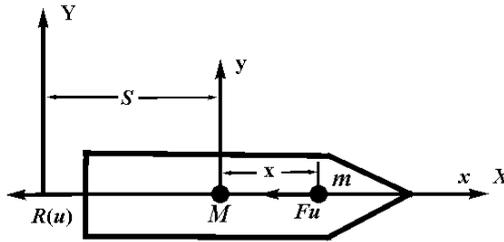


Рис. 1. Математическая модель судна

Fig. 1. Mathematical model of the ship

Таблица 1. Значения коэффициента c_x

Table 1. c_x coefficient values

Форма обтекаемого тела	c_x
Тонкая пластина, перпендикулярная потоку	1,11
Полусфера, направленная вогнутостью к потоку	1,33
Полусфера, направленная выпуклостью к потоку	0,35
Шар	0,1 ÷ 0,4
Тело обтекаемой формы	0,05
Автомобиль	0,4
Специальный профиль, где L — длина профиля, а d — ширина профиля	
$L/d = 2$	0,2
$L/d = 3$	0,1
$L/d = 5$	0,06
$L/d = 10$	0,08
$L/d = 20$	0,09

которая будет двигать судно вперед при вибрации двигателя. Это объясняется тем, что под кормой судно имеет более жесткую подкладку, чем в носовой части. Это объясняется тем, что под кормой судно имеет более жесткую подкладку (кранцы), чем в носовой части.

Если $k = 0$, то судно будет двигаться вначале вперед до тех пор, пока $R_m - R_p > 0$. С течением времени эта разность уменьшается до нуля $R_m - R_p = 0$, а движение судна замедляется и совершает малые гармонические колебания $\langle u \rangle = 0$, т.е. имеет предел пути. Этот предел можно преодолеть с помощью специального управления движением (выбором закона вибрации).

При $k < 1$ судно будет двигаться вначале вперед, а затем назад, так как

$$R_m - R_p = \langle k_m u^2 \rangle - \langle k_p u^2 \rangle < 0.$$

Гидравлическое сопротивление $R(u)$ для различных обтекаемых тел зависит от их формы и вычисляется по формуле

$$R(u) = c_x A \frac{\rho}{2} u^2,$$

где A — площадь наибольшего сечения, перпендикулярного потоку жидкости, ρ — плотность жидкости, u — относительная скорость тела в среде, c_x — коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела. Для воды плотность $\rho = 1$ кг/дм³. Значения коэффициента c_x приведены в табл. 1 [2, 3].

Вычислим k_p ($A = 60$ м²; $c_x = 0,1$; $\rho = 1$ кг/дм³): $k_p = A c_x \rho / 2 = 3000$ кг/м.

На подвижную массу действует внутренняя сила инерции

$$F_u = -m \ddot{x}(t).$$

По теореме о движении центра масс имеем [4]

$$(M + m) \ddot{S} = -R(\dot{S}) + F_u(x(t)). \quad (1)$$

Пусть масса m движется в окрестности массы M по гармоническому закону

$$x(t) = L \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

где t — время, T — период колебаний.

Вводя безразмерные переменные $\xi = S/L$, $x_1 = x/L$, $\tau = t/T$, уравнение (1) с учетом (*) представим в виде

$$a\xi''(\tau) + \frac{b}{2} \left[1 - k + (1 + k) \operatorname{sign}(\xi'(\tau))\right] (\xi'(\tau))^2 = cf(\tau), \quad (2)$$

где $a = 1 + \mu$, $b = k_p L/M$, $c = 4\pi^2 \mu$, $f(\tau) = \sin(2\pi\tau)$, $\mu = m/M$ с начальными условиями покоя

$$\xi(0) = 0, \quad \xi'(0) = 0. \quad (3)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (2) с условиями (3) не имеет аналитического решения. Будем решать его численно с помощью пакета символьной математики «Wolfram Mathematica» [5, 6].

Удобство постановки задачи в виде (2), (3) заключается в том, что уравнение записано с помощью обобщенной функции знака на всем интервале времени, когда скорость меняет знак.

Пакет символьной математики «Wolfram Mathematica» успешно работает с такими обобщенными функциями как дельта-функция Дирака, единичная функция Хевисайда, функция знака, модульная функция и др.

Случай 1 ($k = 1$). Для получения решения в «Wolfram Mathematica» на интервале времени 200 периодов колебаний T приходится сделать 150 000 шагов по времени (по умолчанию это число равно 1000; нужно также задавать максимальный размер шага, начальный размер шага, используемый метод решения, например, метод Рунге–Кутты, Адамса или Gear; при необходимости рабочую точность вычислений можно довести с 16 до 24 знаков и выше):

```
sol = a*\xi''[\tau]+b/2*(1-k+(1+k)*Sign[\xi'[\tau]])*\xi'[\tau]^2==c*f[\tau]
f[\tau_]=Sin[2\pi*\tau]
kp=3000
p={m->1500000,M->3000000,k->1,L->10}
sol05=NDSolve[{sol,\xi[0]==0,\xi'[0]==0},\xi,\{\tau,0,200\},MaxSteps->150000][[1,1]]
\xi->InterpolatingFunction[{{0.,200.}},<>]
a05=\xi/.sol05
```

Полученная при решении интерполяционная функция содержит 18829 узловых значений точек.

С интерполяционной функцией можно работать как с аналитической функцией. Её можно дифференцировать, интегрировать, возводить в любую степень и др. в заданном интервале.

За время $t = 200T$ ($\tau = 200$) судно проходит предельное расстояние $S = 100L = 1000$ м ($\xi = 100$).

Кривая пути судна $\xi(\tau)$ ($S < 100L = 1000$ м, $0 < t < 200T$) при 200-х периодах колебаний T приведена на рис. 2. Кривая пути судна $\xi(\tau)$ при 2-х периодах колебаний T приведена на рис. 3.

Как видно из рис. 3 при исследовании в «Wolfram Mathematica», кривая пути судна $\xi(\tau)$ имеет локальный минимум $\xi = 2,07176$ при $\tau = 1,0324$. Судно движется колебательно: сначала вперед, а затем назад.

Скорость судна $\xi'(\tau)$ при 2-х периодах колебаний T приведена на рис. 4. На рис. 5 приведен график средней скорости судна $\xi'_{cp}(\tau)$. Средняя скорость судна $\xi'_{cp}(\tau)$ при $\tau = 200$ равна нулю, что гарантирует предел дальности пути.

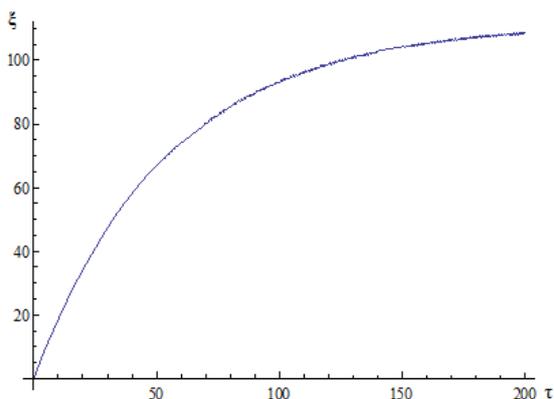


Рис. 2. Кривая пути судна $\xi(\tau)$ при 200-х периодах колебаний T

Fig. 2. Vessel path curve $\xi(\tau)$ for 200 oscillation periods T

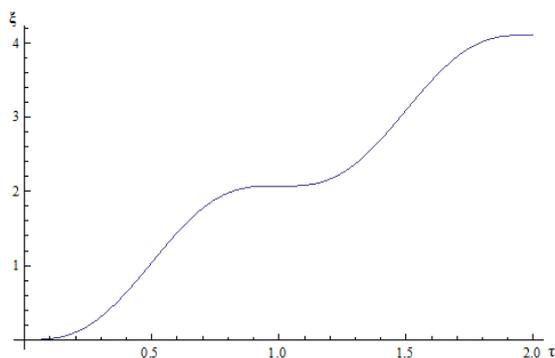


Рис. 3. Кривая пути судна $\xi(\tau)$ при 2-х периодах колебаний T

Fig. 3. Vessel path curve $\xi(\tau)$ for 2 oscillation periods T

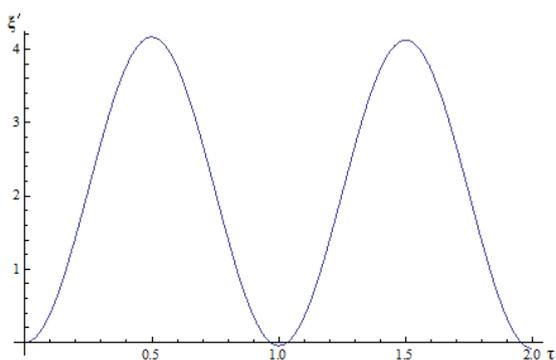


Рис. 4. Скорость судна $\xi'(\tau)$ при 2-х периодах колебаний T

Fig. 4. Vessel speed $\xi'(\tau)$ for 2 oscillation periods T

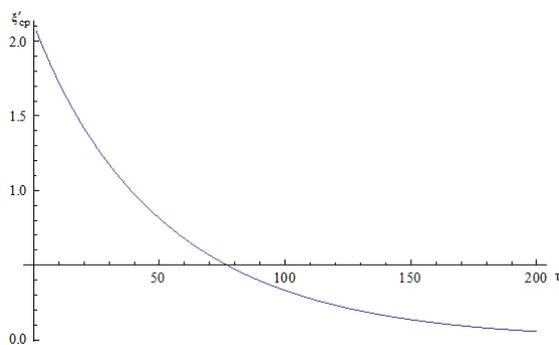


Рис. 5. Средняя скорость судна $\xi'_{cp}(\tau)$ при 200-х периодах колебаний T

Fig. 5. Vessel's average speed $\xi'_{cp}(\tau)$ for 200 oscillation periods T

Случай 2 ($k = 0,1$). Средняя скорость судна $\xi'_{cp}(\tau)$ при 400-х периодах колебаний T становится отрицательной (рис. 6). Полученная при решении интерполяционная функция содержит уже 37 774 узловых значений точек.

Кривая пути судна $\xi(\tau)$ при 400-х периодах колебаний T приведена на рис. 7. Судно сначала движется вперед, а затем пятится назад.

В обоих случаях не достигается главная цель движения судна — перемещение из начальной точки в заданную конечную точку. Исправить этот недостаток можно двумя способами:

- 1) сделать более обтекаемой носовую часть судна по сравнению с кормовой частью, т.е. принять $k > 1$;
- 2) заменить возбуждение гармонических колебаний негармоническим законом в виде одностороннего положительного импульса

$$f(\tau) = \begin{cases} g(\tau), & \tau \leq 0,5 \\ 0, & 0,5 < \tau \leq 1 \end{cases}.$$

В качестве функции $g(\tau)$ можно взять, например, следующие функции:

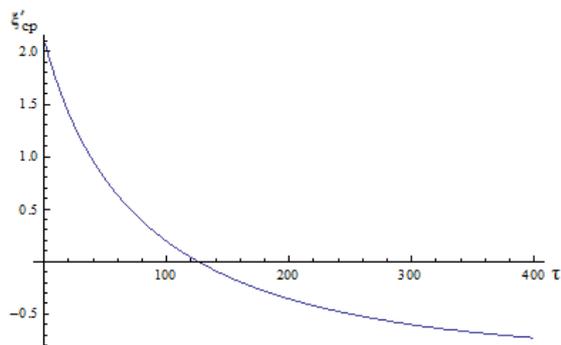


Рис. 6. Средняя скорость судна $\xi'_{cp}(\tau)$ при 400-х периодах колебаний T

Fig. 6. Vessel's average speed $\xi'_{cp}(\tau)$ for 400 oscillation periods T

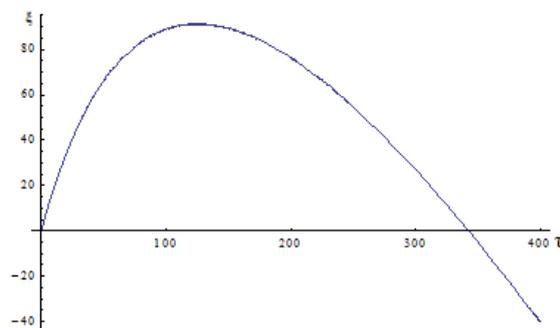


Рис. 7. Кривая пути судна $\xi(\tau)$ при 400-х периодах колебаний T

Fig. 7. Vessel path curve $\xi(\tau)$ for 400 oscillation periods T

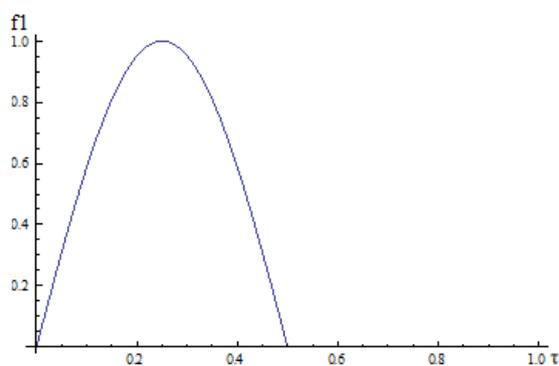


Рис. 8. График функции $f1[\tau]$

Fig. 8. Graph of the function $f1[\tau]$

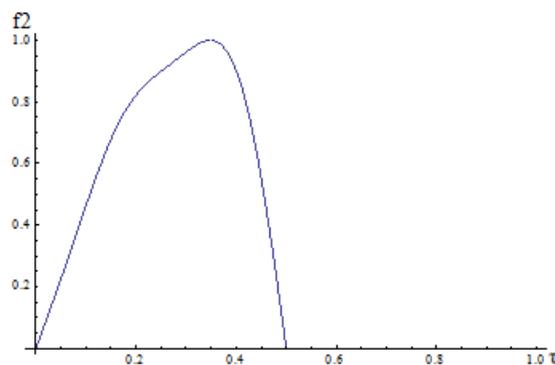


Рис. 9. График функции $f2[\tau]$

Fig. 9. Graph of the function $f2[\tau]$

$$g(\tau)=1; g(\tau)=\text{Sin}[2\pi * \tau];$$

$$g(\tau)=\text{Sin}[2\pi * \tau]-\text{Sin}[4\pi * \tau]/5+\text{Sin}[6\pi * \tau]/10-\text{Sin}[8\pi * \tau]/20$$

Например, введем в рассмотрение функцию $f1[\tau]$ вида (рис. 8)

$$f1[\tau]=\text{Sin}[2\pi * \tau]\text{UnitStep}[\text{Sin}[2\pi * \tau]] \quad (4)$$

Помогает и односторонняя негармоническая функция вида $f2[\tau]$ (рис. 9), являющаяся сложением нескольких гармонических колебаний

$$f2[\tau]=\left(\text{Sin}[2\pi * \tau]-\text{Sin}[4\pi * \tau]/5+\text{Sin}[6\pi * \tau]/10-\text{Sin}[8\pi * \tau]/20\right)*\text{UnitStep}[\text{Sin}[2\pi * \tau]] \quad (5)$$

Наибольший эффект дает второй способ — односторонний положительный импульс. Этот эффект объясняется тем, что импульс от сил инерции попадает в резонанс с частотой колебаний судна, что приводит к быстрому увеличению средней скорости и увеличению дальности движения. Этот эффект можно сравнить с параметрическими колебаниями (например, раскачивание качелей сидящим в них человеком).

Пусть судно приводится в движение силой вида (4) (рис. 8). Тогда за время $t = 200T$ ($\tau = 200$) судно достигает $S = 5000L = 50000$ м ($\xi = 5000$), т.е. в 5 раз дальше, чем при действии двусторонней гармонической силы при одном и том же $k = 1$. Причем, отсутствуют колебания судна, характерные при двустороннем импульсе. Нижняя кривая соответствует движению судна при выключении двигателя при $\tau = 100$ (рис. 10) и $\tau = 20$ (рис. 11).

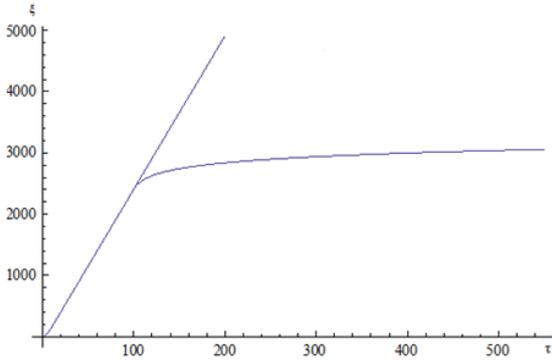


Рис. 10. Кривая пути судна $\xi(\tau)$ при выключении двигателя при $\tau = 100$

Fig. 10. Vessel path curve $\xi(\tau)$ during engine shutdown at $\tau = 100$

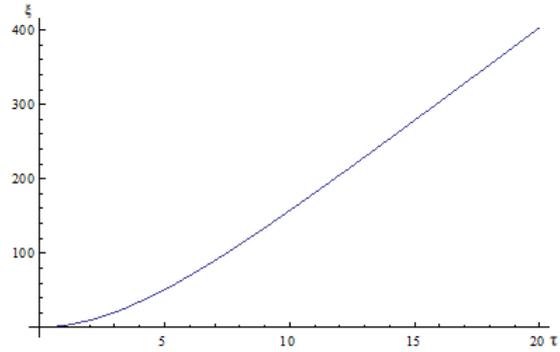


Рис. 11. Кривая пути судна $\xi(\tau)$ до $\tau = 20$

Fig. 11. Vessel track $\xi(\tau)$ to $\tau = 20$

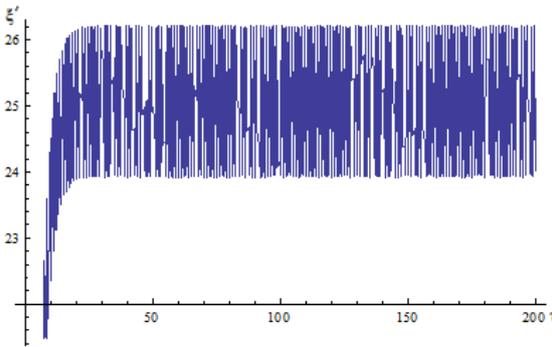


Рис. 12. Скорость судна $\xi'(\tau)$ при 200-х периодах колебаний T

Fig. 12. Vessel speed $\xi'(\tau)$ for 200 oscillation periods T

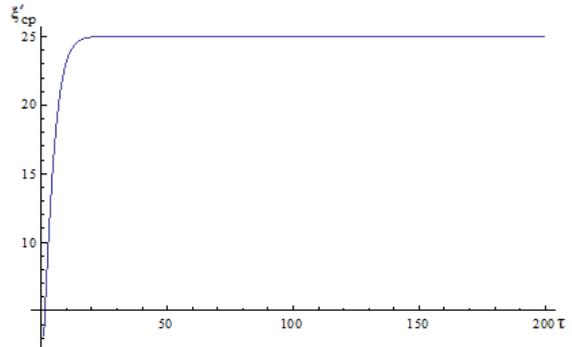


Рис. 13. Средняя скорость судна $\xi'_{cp}(\tau)$ при 200-х периодах колебаний T

Fig. 13. Vessel's average speed $\xi'_{av}(\tau)$ for 200 oscillation periods T

Если судно приводится в движение силой вида (4) (рис. 8), то скорость судна $\xi'(\tau)$ возрастет в 6 раз (рис. 12), а средняя скорость $\xi'_{cp}(\tau)$ после 10 колебаний становится постоянной и судно движется равномерно (рис. 13).

2. Вибрационное перемещение корпуса по шероховатой поверхности

Рассмотрим движение корпуса массы M под действием периодически двигающейся массы m внутри корпуса по шероховатой поверхности. Отнесем движение корпуса $S(t)$ к неподвижным декартовым координатам X и Y , а координату $x(t)$ массы m — к подвижным декартовым координатам x и y , жестко связанным с корпусом (рис. 14).

При движении вправо на корпус будет действовать сила трения T_r , равная

$$T_r(\dot{S}) = -\lambda g (M + m) \text{sign}(\dot{S}),$$

где λ — коэффициент трения скольжения, g — ускорение свободного падения. Некоторые справочники по нелинейным колебаниям вводят гипотезу об анизотропии движения корпуса (вперед — назад). Причем, говорят «допустим». По мнению авторов, для сухого трения эту гипотезу никак нельзя обосновать.

Дифференциальное уравнение движения корпуса имеет вид

$$(M + m) \ddot{S} + m\ddot{x} = -\lambda g (M + m) \text{sign}(\dot{S}); \quad \ddot{x} = -\frac{4\pi^2 L}{T^2} f(\tau). \quad (6)$$

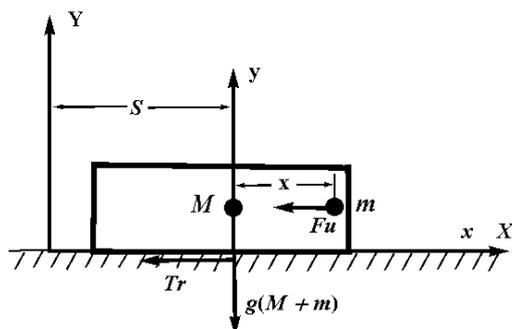


Рис. 14. Математическая модель корпуса

Fig. 14. Mathematical model of the ship's hull

Таблица 2. Коэффициенты трения покоя λ_0 и скольжения λ

	λ_0	λ	λ	λ
		Сухое	Со смазкой	С водяной смазкой
Сталь / сталь	0,15	0,1	0,01	
Металл / дерево	0,5÷0,6	0,4÷0,5	0,03÷0,08	0,25
Дерево / дерево	0,65	0,3	0,1	
Сталь / лед		0,027		0,014
Кожа / дерево	0,47	0,27		

Переходя к безразмерным переменным $\xi = S/L$, $x_1 = x/L$, $\tau = t/T$ (L — длина корпуса, t — время, T — период колебаний) и делая замену переменной $\mu = m/M$, получим

$$\xi''(\tau) + \lambda g \left(\frac{T^2}{L} \right) \text{sign}(\xi'[\tau]) = \frac{4\pi^2 \mu}{1 + \mu} f(\tau). \quad (7)$$

Коэффициенты трения покоя и скольжения помещены в табл. 2 [3].

Случай 1. Пусть $f[\tau] = \text{Sin}[2\pi * \tau]$

```
p=[g→9.81,λ→0.4,T→1,L→100,M→100, m→50];
sl=sol/.p
0.03924 Sign[ξ'[τ]]+ξ''[τ]==4π²/3 Sin[2πτ]
r=NDSolve[{sl,ξ[0]==0,ξ'[0]==0},ξ,{τ,0,500},MaxSteps→150000][[1,1]]
ξ→InterpolatingFunction[{{0.,500.}},<>]
s=ξ/.r
InterpolatingFunction[{{0.,500.}},<>]
```

Полученная при решении интерполяционная функция содержит 98886 узловых значений точек.

Корпус при 500-х периодах колебаний T достигает предела пути $\xi = 162$ (рис. 15). При рассмотрении меньшего числа периодов колебаний T (например, при 3-х периодах колебаний T) видно, что корпус движется колебательно: сначала вперед, а затем назад (рис. 16).

Скорость движения корпуса $\xi'(\tau)$ колеблется сначала в окрестности 2-х, а в конце интервала 500-т периодов колебаний T — асимптотически приближается к нулю (рис. 17, 18).

Случай 2. Пусть $f[\tau] = \text{UnitStep}[\text{Sin}[2\pi * \tau]]$

При тех же параметрах получаем график пути корпуса $\xi(\tau)$ (рис. 19). Как видно из рис. 15, 19, ξ_{max} возрастает от 162 до 300 000 за счет односторонности единичного импульса (синусоидальный импульс дает $\xi_{max} = 60 000$). Корпус движется без колебаний, временами

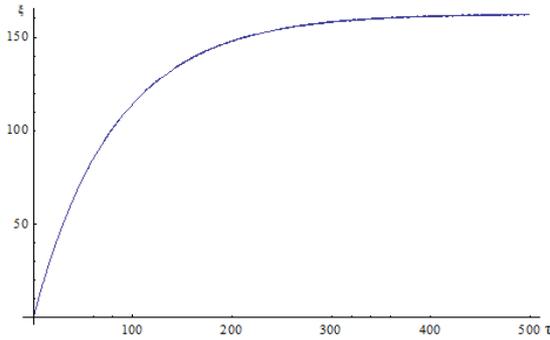


Рис. 15. Кривая пути корпуса $\xi(\tau)$ при 500-х периодах колебаний T

Fig. 15. Hull path curve $\xi(\tau)$ for 500 oscillation periods T

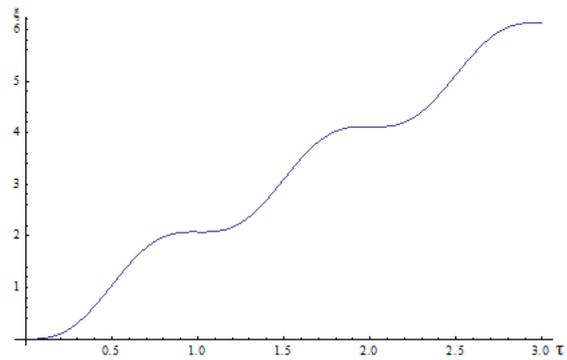


Рис. 16. Кривая пути корпуса $\xi(\tau)$ при 3-х периодах колебаний T

Fig. 16. Hull path curve $\xi(\tau)$ for 3 oscillation periods T

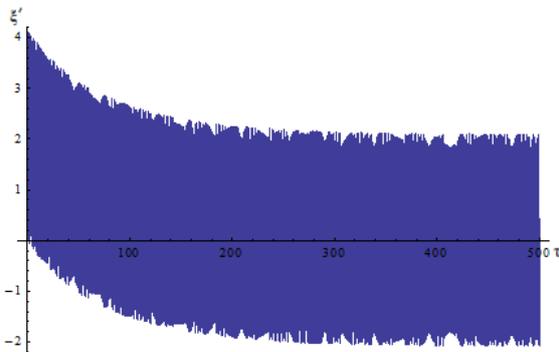


Рис. 17. Скорость движения корпуса $\xi'(\tau)$ при 500-х периодах колебаний T

Fig. 17. Hull velocity $\xi'(\tau)$ for 500 oscillation periods T

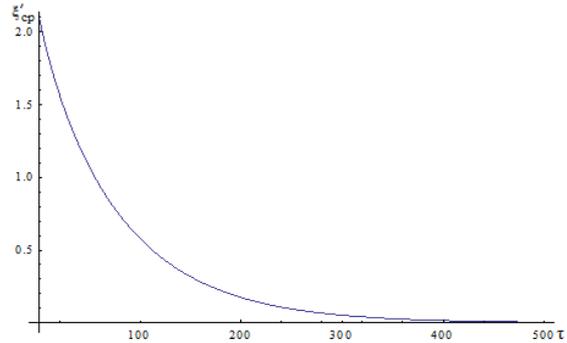


Рис. 18. Средняя скорость движения корпуса $\xi'_{cp}(\tau)$ при 500-х периодах колебаний T

Fig. 18. Average speed of hull movement $\xi'_{cp}(\tau)$ at 500 oscillation periods T

ускоренно, временами равномерно без ускорения. Об этом свидетельствует график средней скорости корпуса $\xi'_{cp}(\tau)$ (рис. 20).

3. Задачи оптимального управления

Подсчитаем энергетические затраты двигателя судна за время (t_0, t_1) . Приращение кинетической энергии судна за это время будет равно работе сил инерции и сил сопротивления на пути $(S(t_0), S(t_1))$

$$(M + m) \int_{S_0}^{S_1} \ddot{S} dS = - \int_{S_0}^{S_1} (R(u) + F_u(\ddot{x})) dS$$

ИЛИ

$$E(t_1) - E(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (F_u(x) - R(u)) u(t) dt, \quad (8)$$

где

$$E(t) = \frac{M + m}{2} u^2(t), \quad F_u(x) = -F_u(\ddot{x}).$$

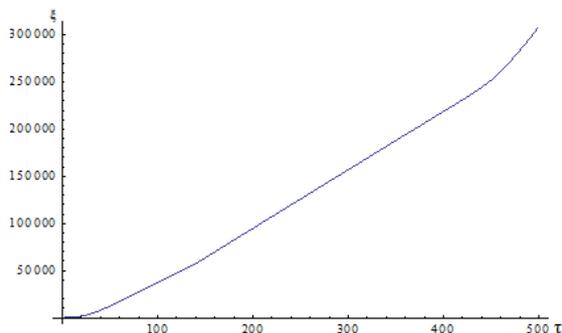


Рис. 19. Кривая пути корпуса $\xi(\tau)$ при 500-х периодах колебаний T

Fig. 19. Hull path curve $\xi(\tau)$ for 500 oscillation periods T

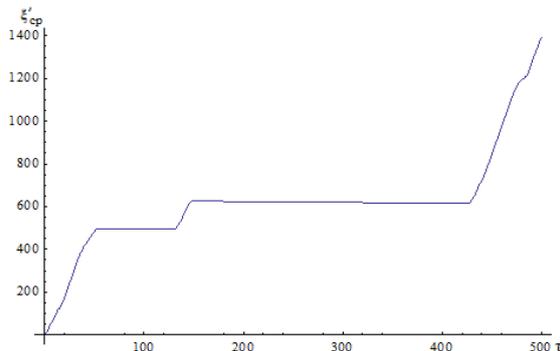


Рис. 20. Средняя скорость корпуса $\xi'_{cp}(\tau)$ при 500-х периодах колебаний T

Fig. 20. Average hull velocity $\xi'_{cp}(\tau)$ for 500 oscillation periods T

Задача оптимального управления заключается в следующем: среди допустимых управлений $x(t)$ — закона подвижной массы — выбираем такое, которое переводит судно из точки $S(t_0)$ в точку $S(t_1)$ и доставляют экстремум функционалу качества управления (быстродействие, минимум энергии и т.д.). Обычно допустимые управления принадлежат некоторому ограниченному множеству. В данном случае мощность двигателя не может быть неограниченной и поэтому ограничена

$$|f(\tau)| \leq 1. \quad (**)$$

За энергетический функционал можно взять функционал изменения кинетической энергии

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (F_u(x) - R(u)) u(t) dt. \quad (9)$$

В безразмерной форме при $E(t_0) = 0$ (8) примет вид

$$\frac{a}{2} E(n) = \int_0^n \left[cf(\tau) - \frac{b}{2} (1 - k + (1 + k) \text{sign}(u)) u^2 \right] u d\tau,$$

где n — число колебаний

В безразмерной форме функционал (9) запишем следующим образом:

$$I_b = \int_0^n \left[cf(\tau) - \frac{b}{2} (1 - k + (1 + k) \text{sign}(u)) u^2 \right] u d\tau. \quad (10)$$

Здесь, выбирая $f(\tau)$ и учитывая (**), а также варьируя u и приравнивая функционал нулю

$$\delta I_b = 0, \quad (11)$$

определим оптимальную работу двигателя. Задача состоит в том, чтобы в подынтегральном выражении (10) сделать разность как можно меньше. Помимо вышеперечисленных действий, приходится применять принцип максимума Понтрягина. Однако это не гарантирует минимума энергии, так как (11) является лишь необходимым, но не достаточным условием.

Сравнение характеристик движения судна при различных периодических импульсах и одинаковых механических данных при 10-ти периодах колебаний T :

1) импульс гармонический двусторонний при $k = 1$, судно пройдет путь $\xi = 18,9$ (при 200-х периодах колебаний T судно пройдет путь $\xi = 108$), израсходует энергии 0,1114;

2) импульс гармонический двусторонний при $k = 0,1$, при 400-х периодах колебаний T судно пройдет путь ξ от 0 до 90, потом опустится до -40 , при 10-ти периодах колебаний T судно пройдет путь $\xi = 18,9$ и израсходует энергии 0,1114;

3) импульс негармонический односторонний при $k = 1$ (положительный), при 10-ти периодах колебаний T судно пройдет путь $\xi = 157,5$ и израсходует энергии 377,1, при 200-х периодах колебаний T судно пройдет путь $\xi = 4913$;

4) единичный импульс негармонический односторонний при $k = 1$, при 10-ти периодах колебаний T судно пройдет путь $\xi = 220$ и израсходует энергии 627, при 200-х периодах колебаний T судно пройдет путь $\xi = 6184$.

Заключение

В данной статье была рассмотрена одна из популярных стратегий по реализации вибрационных двигателей, связанная с передвижением робота в сопротивляющейся среде за счет использования подвижной внутренней массы. В результате задания специальных периодических законов движения подвижной внутренней массы удастся регулировать возникающие силы реакции среды, обеспечивая движение в выбранном направлении.

В предложенной статье рассмотрены: вибрационное перемещение судна в вязкой жидкости и вибрационное перемещение корпуса по шероховатой поверхности, вызванные гармоническими и негармоническими законами колебаний. Например, при одностороннем положительном импульсе импульс от сил инерции попадает в резонанс с частотой колебаний судна, что приводит к быстрому увеличению средней скорости и увеличению дальности движения.

В данной статье также была приведена постановка и решение задачи оптимального управления для двигателя судна. При различных периодических импульсах и одинаковых механических данных были определены пути судна и расходы его энергии.

Литература [References]

1. Захарова, О.С., Нуриев, А.П., Численное и аналитическое исследование оптимального движения системы с вибрационным двигателем в вязкой жидкости. *Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем»*. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. С. 370–379. [Zakharova, O.S., Nuriev, A.P., Numerical and analytical study of the optimal motion of a system with a vibrating mover in a viscous liquid. *Proc. of the X All-Russian Scientific Conference "Nonlinear oscillations of mechanical systems"*. Nizhny Novgorod, Publishing House "Our House", 2016. pp. 370–379. (in Russian)]
2. Кошкин, Н.И., Васильчикова, Е.Н., *Элементарная физика. Справочник*. Москва, АО «СТОЛЕТИЕ», 1996. [Koshkin, N.I., Vasilchikova, E.N., *Elementary physics. Reference book*. Moscow, Stoletie, 1996. (in Russian)]
3. Кухлинг, Х., *Справочник по физике*. Москва, Мир, 1985. [Kuhling, H., *Handbook of Physics: Trans. from German 2nd edition*. Moscow, Mir, 1985. (in Russian)]
4. Аппель, П., *Теоретическая механика. Динамика системы. Аналитическая механика, Т. II*. Москва, Физматгиз, 1960. [Appel, P., *Theoretical mechanics. Dynamics of the system. Analytical Mechanics. Vol. II*. Moscow, Fizmatgiz, 1960. (in Russian)]
5. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике: Учебное пособие*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Y.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics: Textbook*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]
6. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica: Лабораторный практикум*. Казань, Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Fundamentals of work in the Mathematics system: Laboratory workshop*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]