



УДК 531.39

EDN: EWHWZB DOI: 10.31429/vestnik-20-4-11-24

## Исследования по динамике стержневых сооружений

П. Г. Великанов <sup>1,2</sup>✉, Ю. П. Артюхин <sup>1</sup><sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия<sup>2</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: [pvelikanov@mail.ru](mailto:pvelikanov@mail.ru)

*Аннотация.* Проектирование стержневых сооружений — актуальная научная задача развития современной техники. Получить точные решения при исследовании собственных и вынужденных колебаний стержневых сооружений в рамках модели сплошной однородной среды (механика сплошных сред) с бесконечным числом степеней свободы часто затруднительно. Поэтому в статье модель стержневого сооружения наделяют конечным числом степеней свободы, размещенным в серединах конечных элементов в узлах (там же размещают и массу конечных элементов), которые упруго взаимодействуют с конечными элементами модели, не имеющими массы. Предполагается, что элементы стержневых сооружений работают только на изгиб, что вполне оправдывается сопоставлением частот его изгибных и продольных колебаний (частота продольных колебаний на два порядка выше частоты изгибных колебаний). Разрешающая система дифференциальных уравнений колебаний стержневых сооружений, в которую в квадратурах записаны выражения для энергий (потенциальной, кинетической и Релея), получена с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода. В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. были решены несколько задач о свободных колебаниях стержневых сооружений: консольного стержня с распределенной массой и сооружения башенного типа (телевизионная башня). Полученные в статье численные результаты при их сравнении с точными решениями, реализованными с помощью прямого и непрямого методов граничных элементов, а также с другими малоизвестными численными решениями, при увеличении числа степеней свободы (количества сосредоточенных масс, моделирующих распределенную массу стержня) показали быструю сходимость к точным решениям.

*Ключевые слова:* колебание стержней, частоты колебаний, функция Грина, матрица жесткости, матрица масс, матрица податливости.

*Финансирование.* Исследование не имело спонсорской поддержки.

*Цитирование:* Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Исследования по динамике стержневых сооружений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 4. С. 11–24. EDN: EWHWZB. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-11-24

Поступила 24 января 2023 г. После доработки 29 октября 2023 г. Принято 1 ноября 2023 г. Публикация 31 декабря 2023 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи, внесение правок и утверждение окончательного варианта (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Research on the Dynamics of Beam Structures

P. G. Velikanov<sup>1,2</sup>✉, Yu. P. Artyukhin<sup>1</sup><sup>1</sup> Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia<sup>2</sup> Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: [pvelikanov@mail.ru](mailto:pvelikanov@mail.ru)

*Abstract.* The design of beam structures is an actual scientific task of the development of modern technology. It is often difficult to obtain exact solutions when studying natural and forced vibrations of beam structures within the framework of a continuous homogeneous medium model (continuum mechanics) with an infinite number of degrees of freedom. Therefore, in the article, the model of a beam structure is endowed with a finite number of degrees of freedom placed in the middle of the finite elements at the nodes (the mass of the finite elements is also placed there), which elastically interact with the finite elements of the model

that do not have mass. It is assumed that the elements of beam structures work only for bending, which is fully justified by comparing the frequencies of its bending and longitudinal vibrations (the frequency of longitudinal vibrations is two orders of magnitude higher than the frequency of bending vibrations). The resolving system of differential equations of vibrations of beam structures, in which expressions for energies (potential, kinetic and Rayleigh) are written in quadratures, is obtained using Lagrange equations of the 2nd kind. In the article using Green's functions, stiffness, mass, malleability matrices, etc. several problems of free oscillations of beam structures were solved: a cantilever beam with a distributed mass and a tower-type structure (a television tower). The numerical results obtained in the article, when compared with exact solutions implemented using direct and indirect of boundary element methods, as well as with other little-known numerical solutions, with an increase in the number of degrees of freedom (the number of concentrated masses modeling the distributed mass of the beam), showed rapid convergence to exact solutions.

*Keywords:* oscillation of beams, oscillation frequencies, Green's function, stiffness matrix, mass matrix, malleability matrix.

*Funding.* The study did not have sponsorship.

*Cite as:* Velikanov, P. G., Artyukhin, Yu. P., Research on the dynamics of beam structures. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 11–24. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-11-24

Received 24 January 2023. Revised 29 October 2023. Accepted 1 November 2023. Published 31 December 2023.

The contribution of each co-author to the process of writing an article at different stages of its creation: the idea of the work (Y.P.Artyukhin), calculations (Y.P.Artyukhin, P.G.Velikanov), writing the article, making edits and approving the final version (Y.P.Artyukhin, P.G.Velikanov). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Введение

В процессе развития науки и техники человек все больше сталкивается с колебательными и волновыми процессами, охватывающими значительную часть природных явлений. Колебательные и волновые процессы широко распространены и разнообразны: в географии и геомеханике — смена дня и ночи, приливы и отливы, сейсмические воздействия; в медицине — работа сердца, дыхание; в физике — акустика, оптика, электромагнитные волны; в технике — работа двигателя, колебания строительных конструкций и т.д.

Колебательные и волновые процессы в технике порой играют противоречивую роль: с одной стороны, например, колебания валов двигателей, вибрации корпусов, сооружений башенного типа (телевизионные башни) и т.д. при неблагоприятных условиях могут вызвать опасные напряжения, деформации и износ, с другой стороны, например, колебания используют для осуществления эффективных технологических процессов (вибрационное погружение свай, методы поверхностного пластического деформирования деталей, виброуплотнители грунта и т.д.) [1–5].

Как показал анализ колебательных и волновых процессов, между колебаниями разной физической природы много общего. Конкретные колебательные и волновые процессы, с которыми приходится иметь дело специалистам в технике, совершенно различны, однако колебательные и волновые явления, в них происходящие, подчиняются общим закономерностям и описываются едиными моделями.

При проектировании зданий и сооружений, предназначенных, например, для строительства в сейсмических районах, их сейсмостойкость традиционно обеспечивается путем повышения несущей способности конструкций за счет увеличения размеров несущих элементов и прочности материалов, а также ряда конструктивных мероприятий. Все это требует значительных дополнительных затрат строительных материалов и средств. Увеличение размеров конструк-

ций или прочности материалов приводит к увеличению жесткости и веса сооружений, что, в свою очередь, вызывает возрастание инерционной (сейсмической) нагрузки.

В технике мы редко встречаемся со свободными колебаниями: вибрация машин вызывается, как правило, каким-либо источником энергии. Между тем, необходимо изучать и свободные колебания: поведение системы при свободных колебаниях — это характеристика ее собственных свойств, недаром частота свободных колебаний называется собственной частотой системы. Частота собственных колебаний является важнейшей динамической характеристикой сооружений. Поскольку ее величина значительно влияет на расчетные значения нагрузок. Ошибки, допущенные на стадии вычисления частоты собственных колебаний, приводят к неправильному определению напряженно-деформированного состояния несущих конструкций. Помимо этого, неверное определение собственной частоты колебаний может привести к возникновению не спрогнозированных резонансных явлений, которые являются достаточно опасными. В свете вышесказанного исследование в статье свободных колебаний стержневых конструкций представляется вполне оправданным.

Аналитическое (точное) решение поставленной задачи может быть получено, если: область однородная, геометрия проста (регулярна), граничные условия на контуре сравнительно просты, определяющие дифференциальные уравнения линейны. В противном случае могут быть использованы численные методы для нахождения численного решения. Численные методы делятся на два отчетливых класса: класс, требующий аппроксимации во всей области (метод конечных разностей, метод конечных элементов (МКЭ)), и класс, требующий аппроксимации только на границе области (метод граничных элементов (МГЭ)).

В процессе реализации численных методов и созданных на их основе алгоритмов расчета сложных структур постепенно пришло понимание того обстоятельства, что не существует ни одного метода, обладающего бесспорными преимуществами при решении бесконечного разнообразия технических проблем. Это заставило обратить внимание на альтернативные варианты модернизации («гибридизации») различных методов в целях использования их преимуществ и компенсации слабых сторон.

Исследование в статье свободных колебаний многоэтажных зданий было реализовано с помощью сравнения точного решения (в данном случае ими выступали прямой (метод взвешенных невязок) и непрямой (метод компенсирующих нагрузок) МГЭ [6–8]) с численными решениями: вместо МКЭ, где узлы конечных элементов стержневых сооружений размещены на их границах, была использована его модернизация (массу конечных элементов помещают в их середине и называют узлами, которые упруго взаимодействуют с элементами многоэтажных зданий, не имеющими массы) и др. В основу МГЭ (метод граничных интегральных уравнений, метод теории потенциалов) положен переход от системы дифференциальных уравнений и граничных условий к их интегральному аналогу на границах области. Процедура решения включает дискретизацию границ области совокупностью (ансамблем) граничных элементов, применение различных вариантов аппроксимации геометрии границ и граничных функций, замену исходного интегрального соотношения дискретным аналогом для формирования системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), посредством решения которых определяются дискретные значения неизвестных функций в узловых точках на границе области.

В настоящее время считается классическим получение элементов матрицы податливости (коэффициентов влияния) с помощью следующей методики: подобно тому, как в статически неопределимых задачах сопротивления материалов для реализации метода сил формировалась каноническая система, к каждой из центрально расположенных в конечном элементе масс, на которые действуют внешние силы, прикладывают единичную силу и отдельно для каждой единичной силы строят эпюру изгибающих моментов; затем по правилу Верещагина или Симпсона находят искомые элементы матрицы. В данной статье для определения элементов матрицы податливости была использована как вышеописанная классическая методика, так и методика, позволяющая найти искомые элементы через функцию Грина. Найденные элементы матрицы податливости оказались идентичными, но затраченных усилий для их получения с помощью функции Грина, как показано, например, в [4, 5, 9–11], оказывается меньше.

## 1. Постановка и решение задач

Переходя от задач механики сплошных сред с бесконечным числом степеней свободы после дискретизации (конечно-элементной, гранично-элементной и т.д.) к задачам с конечным числом степеней свободы, как показано в [9, 10], кинетическая, потенциальная энергии, а также энергия Релея для механической системы с  $n$  степенями свободы могут быть представлены в виде квадратичных функций

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j; \quad \text{Rel} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (1.1)$$

где  $x_i, \dot{x}_i$  — поперечные перемещения и скорости перемещений сосредоточенных масс сооружений;  $m_{ij}, k_{ij}, r_{ij}$  — компоненты матриц масс  $\mathbf{M}$ , жесткости  $\mathbf{K}$  и рассеивания  $\mathbf{R}$ , соответственно.

Введя вектор-строку  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и соответствующий ей после операции транспонирования вектор-столбец, квадратичные функции энергий удалось представить в матрично-векторной форме. Использование в уравнении Лагранжа 2-го рода квадратичных функции энергий в матрично-векторной форме позволило путем дифференцирования получить систему дифференциальных уравнений колебаний системы с  $n$  степенями свободы в виде [11]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$  — вектор-столбец внешних нагрузок, приложенных к массам.

Рассматривая свободные колебания без учета рассеивания энергии, уравнение (1.2) примет вид (частное решение ищем в виде  $x = Be^{i\omega t}$ , причем  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T$  — произвольный вектор-столбец)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0. \quad (1.3)$$

Тогда задача после подстановки частного решения сводится к решению системы однородных уравнений относительно амплитуд  $B_k$

$$(\mathbf{K}_1 - \lambda \mathbf{M}_1) \mathbf{B} = 0; \quad \lambda = \frac{\omega^2 l^3 m}{d}; \quad \mathbf{M} = m \mathbf{M}_1; \quad \mathbf{K} = \frac{d}{l^3} \mathbf{K}_1, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{M}_1, \mathbf{K}_1$  — безразмерные матрицы масс и жесткости соответственно;  $\omega$  — частота колебаний;  $l$  — длина произвольного элемента;  $d$  — изгибная жесткость произвольного элемента;  $m$  — стандартная сосредоточенная масса, приложенная в середине элемента.

В некоторых случаях представления матриц в (1.3) и (1.4), описанных в [9, 10], задача об определении собственных колебаний может быть эффективно решена с помощью прямого и обратного подходов.

Общее решение уравнения (1.3) запишем в виде [12, 13]

$$x_i = \sum_{s=1}^n A_s \varphi_{is} \sin(\omega_s t + \alpha_s),$$

где  $\varphi_{is}$  — элементы модальной матрицы (амплитуд собственных форм колебаний)  $\varphi_{is} = Q$ ,  $\alpha_s$  — сдвиг фазы,  $\omega_s$  — частота свободных колебаний;  $A_s, \alpha_s$  — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий для отклонений  $x_{i0}$  и скоростей  $\dot{x}_{i0}$  из системы  $2n$  уравнений

$$x_{i0} = \sum_{s=1}^n A_s \varphi_{is} \sin \alpha_s; \quad \dot{x}_{i0} = \sum_{s=1}^n A_s \omega_s \varphi_{is} \cos \alpha_s.$$

Формы колебаний  $\varphi_{is}$  не зависят от начальных условий движения, но влияют только на постоянные  $A_s$  и  $\alpha_s$ . Более удобным является другой вид общего решения с произвольными постоянными  $A_s, C_s$ :

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^n \varphi_{is} \left( A_s \sin \sqrt{\lambda_s} t + C_s \cos \sqrt{\lambda_s} t \right).$$

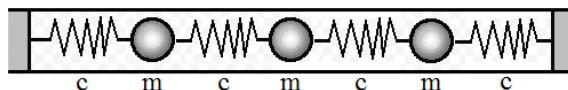


Рис. 1. Расчетная область гладкой горизонтальной трубки

Fig. 1. Computational domain of a smooth horizontal tube

Как показано в [9, 10], основная трудность решения задачи колебаний сооружений состоит в определении матрицы податливости  $\mathbf{F} = [\delta_{ik}]$ , которая на основе теоремы Максвелла о взаимности перемещений будет симметричной матрицей  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ . Введем в рассмотрение вектор  $\bar{\mathbf{G}}^{(k)}(x, \xi)$ , называемый вектором Грина. Если записать его проекции, то при переборе  $k = 1, 2, 3$  получим тензор Грина  $\mathbf{G}_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Функции  $\mathbf{G}_i^{(k)}$  называются функциями перемещений Грина.

Применяя теорему Бетти о взаимности работ к двум системам сил, получим теорему Максвелла о взаимности перемещений для сосредоточенных сил (фактически функции перемещений Грина (матрица Грина) есть ни что иное, как компоненты матрицы податливости)

$$\mathbf{G}_k^{(j)}(x, \xi) = \mathbf{G}_j^{(k)}(\xi, x). \quad (1.5)$$

Численная реализация задачи о собственных значениях была успешно реализована с помощью функций пакета символьной математики (ПСМ) “Wolfram Mathematica” [14, 15], перечисленных в [9].

### 1.1. Пример нахождения нормальных координат

В гладкой горизонтальной трубке находятся 3 шарика равной массы  $m$ , соединенные пружинами одинаковой жесткости  $c$ . Свободные концы двух крайних пружин закреплены (рис. 1). Рассмотрим колебания шариков в трубке.

Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  и матрица масс  $\mathbf{M}$  имеют вид

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 2c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & 2c \end{vmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix}.$$

Для определения частоты колебаний решаем характеристическое уравнение вида

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{E}) = 0.$$

Квадраты частот в порядке их возрастания будут иметь вид (ПСМ “Wolfram Mathematica” [14, 15] позволяет находить искомые значения аналитически):

$$\omega_1^2 = (2c - \sqrt{2}c)/m; \quad \omega_2^2 = 2c/m; \quad \omega_3^2 = (2c + \sqrt{2}c)/m.$$

Соответствующие этим частотам собственные векторы равны

$$n_1 = \{1, \sqrt{2}, 1\}; \quad n_2 = \{-1, 0, 1\}; \quad n_3 = \{1, -\sqrt{2}, 1\}.$$

Нормируем эти векторы

$$\{N_1, N_2, N_3\} = \left\{ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\} \right\}.$$

Если эти векторы транспонировать, то получим матрицу преобразования  $\mathbf{Q}$  исходных координат  $(x_1, x_2, x_3)$  к нормальным координатам  $(z_1, z_2, z_3)$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Переход к нормальным координатам определится формулами вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{z} \text{ или } x_1 = \frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{\sqrt{2}} + \frac{z_3}{2}; \quad x_2 = \frac{z_1}{\sqrt{2}} - \frac{z_3}{\sqrt{2}}; \quad x_3 = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{\sqrt{2}} + \frac{z_3}{2}.$$

Вышеприведенные результаты полностью совпадают с результатами, приведенными в [16], но полученными другим методом.

### 1.2. Колебание сооружения при землетрясении

Сооружение в виде высокой колонны, трубы, антенны, водонапорной башни, телевизионной башни или небоскреба можно моделировать одним или несколькими консольными стержнями с распределенными и сосредоточенными массами (рис. 2).

Отнесем положение сооружения к неподвижным декартовым координатам  $xy$ . В результате землетрясения основание консоли  $y_g(t)$  будет сдвигаться, а положение массы по горизонтали от неподвижных осей будет определяться суммой жесткого смещения плюс упругого смещения  $w(t)$

$$y(t) = y_g(t) + w(t).$$

Отсюда ускорение массы в относительной системе координат равно

$$\ddot{w} = \ddot{y} - \ddot{y}_g.$$

Тогда матричное уравнение колебаний в системе, жестко связанной с фундаментом, примет вид

$$\mathbf{M}\ddot{w} + \mathbf{R}\dot{w} + \mathbf{K}w = -\ddot{y}_g\mathbf{M}\mathbf{1}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{1}$  — единичный вектор-столбец.

Из уравнения (1.6) следует, что относительно фундамента возникают вынужденные колебания колонны силами инерции вида  $-\ddot{y}_g\mathbf{M}\mathbf{1}$ .

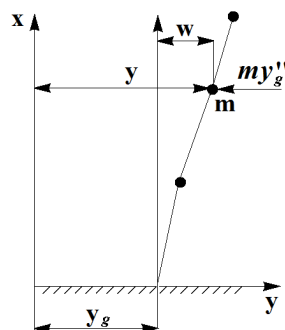


Рис. 2. Расчетная область сооружения

Fig. 2. Design area of the structure

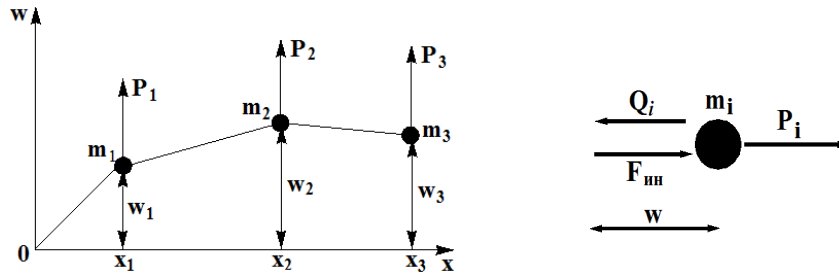


Рис. 3. Математическая модель балки

Fig. 3. Mathematical model of a beam

## 2. Свободные колебания консольного стержня с распределенной массой

Дифференциальное уравнение колебаний балки переменного сечения с распределенной массой на единицу объема  $\rho$  имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

где  $I(x)$  — осевой момент инерции поперечного сечения;  $F(x)$  — площадь поперечного сечения.

Рассмотрим колебание балки постоянной жесткости  $D = EI$  с равномерно распределенной массой  $\rho_0 = \rho F$  по длине балки. Вычислим матрицу податливости с помощью функции Грина для консоли. Функция Грина (прогиба) консоли в сечении  $x$  для нагрузки  $P = 1$ , приложенной в точке  $\xi$ , имеет вид

$$G(x, \xi) = \frac{PL^3}{2D} \left( \xi x^2 - \frac{x^3}{3} \right), \quad x \leq \xi, \quad (2.2)$$

где  $0 \leq x, \xi \leq 1$  — безразмерные координаты, отнесенные к длине балки ( $L$  — длина балки),  $D$  — изгибная жесткость. Причем здесь  $x < \xi$ . Для противоположного неравенства необходимо поменять  $x$  на  $\xi$  местами, что соответствует теореме Бетти о взаимности работ и теореме Максвелла о взаимности перемещений. Равенство  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$  приводит к симметричной матрице податливости, а затем к симметричной матрице жесткости. Это обуславливает вещественность значений частот свободных колебаний.

Разобьем балку на  $n$  элементов. Поместим в  $n$  узлах массу элемента  $m$  ( $m = \rho_0 L/n$ ) в середине каждого элемента. Выведем балку из состояния равновесия. Тогда в  $i$ -ой узловой точке согласно принципу Даламбера получим (рис. 3)

$$F_{i,ин} + P_i = Q_i \quad (2.3)$$

где  $F_{i,ин} = m_i \ddot{w}_i$  — сила инерции в  $i$ -ой узловой точке,  $Q_i$  — внешняя возбуждающая сила,  $P_i$  — сила упругого сопротивления в этой точке со стороны балки.

Введем вектор перемещений  $\mathbf{w}$ , состоящий из прогибов в узловых точках, вектор упругих нагрузок  $\mathbf{P}$  в тех же точках, матрицу податливости  $\mathbf{F}$ , матрицу жесткости  $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$ , матрицу масс  $\mathbf{M} = m\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

На рис. 3 показано статическое изгибное состояние стержня с тремя массами  $m_i$  под действием упругих сил  $P_i$ , дающее в этих точках прогибы  $w_i$ . Тогда прогиб  $w_i$  равен прогибам от всех сил с учетом коэффициентов податливости

$$w_i = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \delta_{i3}P_3.$$

Здесь силы  $P_i$ , приложены к изгибаемой балке. В матричной форме получим выражение  $\mathbf{w} = \mathbf{F}\mathbf{P}$ . С учетом (2.3) получим

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}. \quad (2.4)$$

Таким образом, можно прийти другим путем к матричной форме колебаний

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{E}\mathbf{w} = \mathbf{F}\mathbf{Q}; \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{Q}. \quad (2.5)$$

Зададим число разбиений  $n = 6$ . Безразмерную длину разобьем на  $2n$  отрезка. Тогда координаты середины элементов будут пропорциональны нечетным числам  $(2i - 1)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Для составления матрицы податливости необходимо, чтобы функция Грина  $G(x, \xi)$  при единичной нагрузке вычислялась в точках  $x = (2i - 1)/(2n)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\xi = (2k - 1)/(2n)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . В двойном цикле по  $i$  и  $k$  её элементы будут равны

$$\delta_{ik} = G(x_i, \xi_k). \quad (2.6)$$

Запишем их в матрицу  $\mathbf{F}$ . Тогда безразмерная матрица податливости  $\mathbf{F}$  получит вид (матрица жесткости  $\mathbf{K}$  является обратной матрицей по отношению к матрице податливости  $\mathbf{F}$ )

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5184} & \frac{1}{1296} & \frac{7}{5184} & \frac{5}{2592} & \frac{13}{5184} & \frac{1}{324} \\ \frac{1}{1296} & \frac{1}{192} & \frac{1}{96} & \frac{1}{64} & \frac{1}{48} & \frac{5}{192} \\ \frac{7}{5184} & \frac{1}{96} & \frac{125}{5184} & \frac{25}{648} & \frac{275}{5184} & \frac{175}{2592} \\ \frac{5}{2592} & \frac{1}{64} & \frac{25}{648} & \frac{343}{5184} & \frac{245}{2592} & \frac{637}{5184} \\ \frac{13}{5184} & \frac{1}{48} & \frac{275}{5184} & \frac{245}{2592} & \frac{9}{64} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{324} & \frac{5}{192} & \frac{175}{2592} & \frac{637}{5184} & \frac{3}{16} & \frac{1331}{5184} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 15042 & -4370 & 1517 & -404 & 101 & -16,86 \\ -4370 & 3482 & -2414 & 989,3 & -247,3 & 41,22 \\ 1517 & -2414 & 3122 & -2301 & 899,3 & -149,8 \\ -404,7 & 989,3 & -2301 & 3032 & -2054 & 558,3 \\ 101,1 & -247,3 & 899,3 & -2054 & 2133 & -787,5 \\ -16,86 & 41,22 & -149,8 & 558,3 & -787,5 & 347,2 \end{pmatrix}.$$

Следует решить характеристическое матричное уравнение

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E}) = 0, \quad \lambda = \omega^2 m L^3 / D.$$

Стандартная процедура определения собственных частот в ПСМ “Wolfram Mathematica” [14, 15] приводит к следующим результатам. Обозначим список 6 собственных значений в порядке их убывания через  $\{\lambda_6, \lambda_5, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1\}$ , тогда их значения имеют вид

$$\lambda = \{\lambda_6, \lambda_5, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1\} = \{16972,1; 6780,4; 2641,77; 680,668; 84,6079; 2,08689\}.$$

Если балка колеблется с круговой частотой  $\omega$ , то точные решения для распределенных и сосредоточенных масс соответственно имеют вид [17]

$$\omega_T = \frac{\beta^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_0}} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{\lambda n D}{\rho_0}}.$$

Приведем сопоставление коэффициентов частот точного  $\beta^2$ , полученного с помощью прямого и непрямого МГЭ, и приближенного решений  $\sqrt{\lambda n}$

$$\beta^2 = \{3,516; 22,03; 61,7; 120,9; 200; 298\}; \quad \sqrt{\lambda n} = \{3,538; 22,5; 63,9; 125,9; 201,7; 319\}.$$



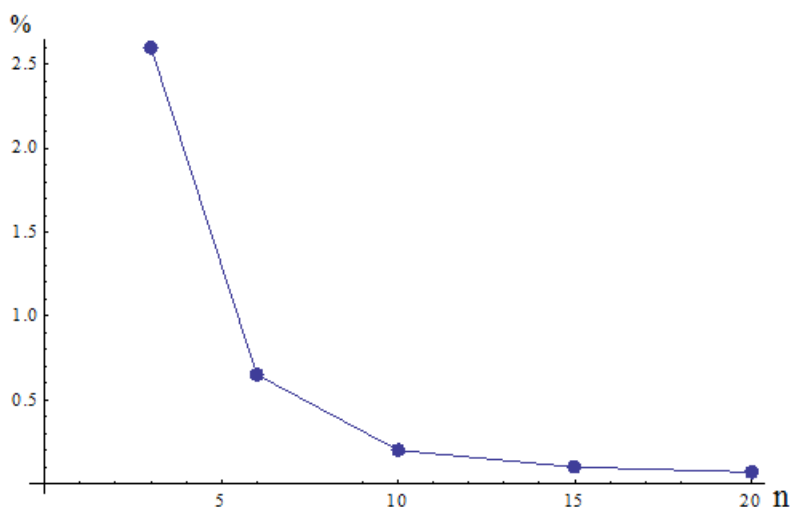


Рис. 4. График сходимости погрешности в зависимости от количества сосредоточенных масс

Fig. 4. Graph of error convergence depending on the number of concentrated masses

Погрешность в сторону завышения приближенного вычисления 1-ой собственной частоты составляет 0,65 %, 2-ой частоты составляет 2,2 %, 3-ей частоты составляет 3,6 %, 4-ой частоты составляет 4,1 %, 5-ой частоты составляет 0,08%, 6-ой частоты составляет 6,9 %.

Матрица податливости при любом  $n$  вычисляется по формуле (2.6) и поэтому можно провести вычисления для более высоких разбиений стержня на элементы. Анализ показывает следующую сходимость коэффициента 1-ой собственной частоты колебаний от числа степеней свободы (количества сосредоточенных масс, моделирующих распределенную массу стержня)  $n$ . На рис. 4 показано отличие в процентах в сторону завышения приближенной 1-ой собственной частоты колебаний от точного значения в зависимости от числа степеней свободы (количества сосредоточенных масс)  $n$ .

Из рис. 4 следует, что разбиение массы стержня на 6 элементов, в середине которых помещена 1/6 часть общей массы стержня, дает погрешность в определении 1-ой собственной частоты колебаний консоли всего 0,65 %. А начиная с 15 элементов, погрешность составляет менее 0,1 %.

Наибольшее значение сосредоточенных масс (число степеней свободы для нахождения собственных значений) было опробовано при  $n = 200$ , т.е. для матриц с 40 000 элементами или решение полинома 200-го порядка. ПСМ “Wolfram Mathematica” [14, 15] и с этой задачей успешно справился, применив метод итераций матриц Стодолы.

Продемонстрируем определение собственных форм колебаний для случая  $n = 3$ . Собственные векторы (перемещения в дискретных точках с массами  $m$ ) определяются с точностью до некоторого параметра. Обозначая список этих векторов  $\{s_3, s_2, s_1\}$ , соответствующих их собственным значениям  $\{\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1\}$ , с помощью ПСМ “Wolfram Mathematica” [14, 15] находим список собственных векторов

$$\{s_3; s_2; s_1\} = \left\{ \{0,957078; -0,281677; 0,0682638\}; \right. \\ \left. \{0,284758; 0,870004; -0,4025\}; \{0,053985; 0,404662; 0,912871\} \right\}.$$

В этот список введем смещение в заделке с учетом нулевого угла поворота. Интерполируя полученный список, получим графическое изображение трех основных форм колебаний. Формы колебаний, соответствующие 1, 2 и 3-й частотам, показаны на рис. 5. На горизонтальной оси указаны соответствующие части длины стержня  $L$ , по вертикали — смещение  $w$ . Из графика следует качественное совпадение трех форм колебаний с точным решением, полученным в [17].

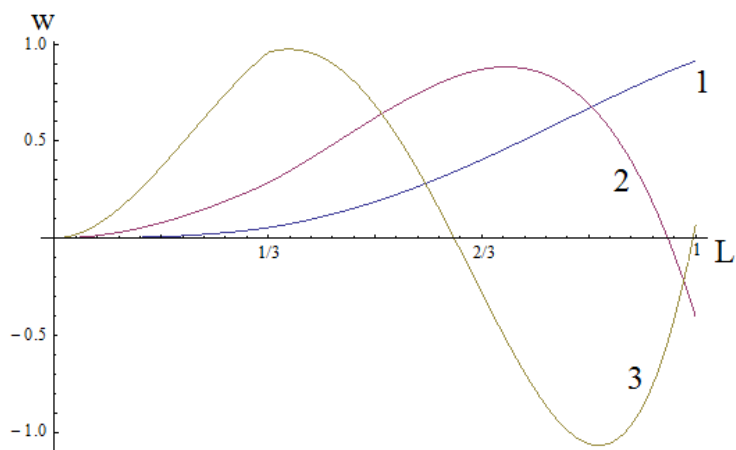


Рис. 5. Графическое изображение трех основных форм колебаний

Fig. 5. Graphic representation of the three main modes of vibration

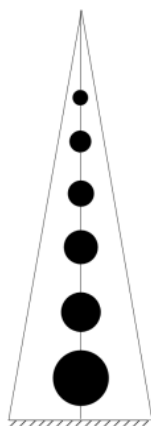


Рис. 6. Модель сооружения башенного типа

Fig. 6. Model of a tower type structure

Аналогичные результаты по частотам приведены в [12], где определены приближенные значения собственных частот свободных колебаний шарнирно опертой балки длины  $L$  с 3-мя равными сосредоточенными массами, расположенными в середине каждого элемента (балка разделена на 3 равных элемента). Распределенная масса стержня представлена тремя массами. Частоты имеют вид

$$\{\omega_3, \omega_2, \omega_1\} = \{62,3538; 38,1838; 9,85901\} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Точные формулы из [18] дают следующее

$$\{\omega_3, \omega_2, \omega_1\}_T = \{88,8264; 39,4784; 9,8696\} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

где  $m$  — масса балки на единицу длины.

### 3. Свободные колебания сооружения башенного типа (телевизионная башня)

Рассмотрим свободные колебания сооружения, модель которого может быть представлена стержнем переменного сечения в виде конуса с радиусом основания  $R$  длины  $L$  (рис. 6).

Дифференциальные уравнения свободных колебаний описываются уравнением (2.1). В сечении  $x$  радиус  $r(x)$ , площадь сечения  $F(x)$  и момент инерции  $J(x)$  будут соответственно равны

$$r(x) = R \left(1 - \frac{x}{L}\right); \quad F(x) = \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2; \quad J(x) = \frac{\pi R^4}{4} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^4,$$

а изгибающий момент в сечении  $x$  под действием силы  $P$  в точке  $\xi$  равен

$$m(x, \xi) = P((x - \xi) - (x - \xi) \operatorname{sign}(x - \xi)),$$

где  $\operatorname{sign}(x - \xi)$  — функция знака и, кроме того, выполняется условие  $x \leq \xi$ .

Интегрируя дважды уравнение изгиба

$$G''(x, \xi) = -\frac{P(x - \xi)}{EJ(x)},$$

получим

$$G(x, \xi) = -\frac{2Px^2(L(x - 3\xi) + 2x\xi)}{3EL\pi r^4 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2}. \quad (3.1)$$

Введем безразмерные переменные, отнесенные к длине конуса, для которых сохраним прежние обозначения, тогда функция Грина примет вид

$$F(x, \xi) = -\frac{2L^3 G(x, \xi)}{3E\pi r^4}; \quad G(x, \xi) = \frac{x^2(x - 3\xi + 2x\xi)}{(1 - x)^2}, \quad x \leq \xi,$$

$$G(x, \xi) = \frac{\xi^2(\xi - 3x + 2x\xi)}{(1 - \xi)^2}, \quad \xi \leq x.$$

Разобьем ось конуса на  $n$  элементов. Матрицу податливости  $\mathbf{a}$  получим перебором значений  $x\xi$  в виде набора нечетных чисел:

$$\mathbf{a} = -\text{Table}[G[(2i - 1)/(2n), (2k - 1)/(2n)], \{i, 1, n\}, \{k, 1, n\}].$$

Для построения матрицы масс разобьем конус на  $n$  усеченных конусов. Высоту конуса разобьем на отрезки  $x_k = \frac{Lk}{2n}$ ,  $k = \overline{1, 2n}$ . Им соответствуют радиусы  $r(x_k) = R \left(1 - \frac{k}{2n}\right)$ .

Объем усеченного конуса  $k$  высотой  $h = L/n$  подсчитаем по формуле [19]

$$V[k] = \frac{L\pi \left( r \left[ \frac{(-1+k)L}{2n} \right]^2 + r \left[ \frac{(-1+k)L}{2n} \right] r \left[ \frac{(1+k)L}{2n} \right] + r \left[ \frac{(1+k)L}{2n} \right]^2 \right)}{3n}.$$

Задавая  $n = 6$ , вычислим  $V[k]$ , для которых  $k = 1, 3, 5, \dots, 11$ :

$$V[k] = \left\{ \frac{91}{648} L\pi r^2; \frac{61}{648} L\pi r^2; \frac{37}{648} L\pi r^2; \frac{19}{648} L\pi r^2; \frac{7}{648} L\pi r^2; \frac{1}{648} L\pi r^2 \right\}.$$

Проверкой правильности разбиения служит сумма объемов усеченных конусов. Сумма объемов всех усеченных конусов оказалась равной полному объему конуса

$$\frac{91}{648} L\pi r^2 + \frac{61}{648} L\pi r^2 + \frac{37}{648} L\pi r^2 + \frac{19}{648} L\pi r^2 + \frac{7}{648} L\pi r^2 + \frac{1}{648} L\pi r^2 = \frac{1}{3} L\pi r^2.$$

Таким образом, безразмерная матрица  $\mathbf{M}$ , содержащая 6 сосредоточенных масс, равна

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{91}{648} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{61}{648} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{648} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{648} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{648} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{648} \end{pmatrix}.$$

Матрица податливости  $\mathbf{a}$  примет вид

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0,00126263 & 0,00516529 & 0,00906795 & 0,0129706 & 0,0168733 & 0,0207759 \\ 0,00516529 & 0,0416667 & 0,087963 & 0,134259 & 0,180556 & 0,226852 \\ 0,00906795 & 0,087963 & 0,248016 & 0,432256 & 0,616497 & 0,800737 \\ 0,0129706 & 0,134259 & 0,432256 & 0,952778 & 1,55167 & 2,15056 \\ 0,0168733 & 0,180556 & 0,616497 & 1,55167 & 3,375 & 5,625 \\ 0,0207759 & 0,226852 & 0,800737 & 2,15056 & 5,625 & 18,4861 \end{pmatrix},$$

а динамическая матрица вычисляется по формуле  $\mathbf{D}_d = \mathbf{aM}$ , зная которую, с помощью ПСМ “Wolfram Mathematica” [14, 15] вычислим собственные значения  $\mathbf{p}_n$  динамической матрицы  $\mathbf{D}_d$

$$\mathbf{p}_n = \{0,0851485; 0,0181093; 0,00573288; 0,00164378; 0,000475058; 0,0000741624\}$$

из частотного уравнения

$$(\mathbf{D} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{w} = 0, \quad \lambda_1 = \frac{3R^2 E}{2L^4 \rho \omega_n^2}$$

откуда круговая частота равна

$$\omega_n = \frac{R}{L^2} \sqrt{\frac{3E}{2\rho\lambda_1}} = \frac{\alpha_n R}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{3}{2p_n}}.$$

Точное решение этой задачи впервые получено Кирхгофом в функциях Бесселя [18]. Приближенное  $a_n^p$  и точное значение коэффициента  $\alpha_n$  представимы в виде

$$a_n^p = \{4,19718; 9,10111; 16,1756; 30,2081; 56,1917; 142,218\};$$

$$\alpha_n = \{4,359; 10,573; 19,225; 30,339; 43,921; 59,956\}.$$

Оценка полученных результатов показала, что погрешность приближенного решения основного тона занижена на 3,7 %. При увеличении числа элементов до  $n = 20$  приближенное решение принимает вид

$$a_n^p = \{4,34604; 10,4498; 18,6057; 28,2066; 39,5341; 54,5446\}.$$

Оценка полученных уточненных приближенных результатов показала, что разница в сторону занижения в этом случае по четырем основным частотам колебаний становится незначительной и составляет 0,3, 1,2, 3,2 и 7 % соответственно.

## Заключение

В связи с тем, что определение собственных и вынужденных колебаний сооружений, моделируемых стержнями с распределенными массами (бесконечное число степеней свободы) довольно затруднительно, в статье сделана попытка наделить модель сооружения конечным числом степеней свободы: масса помещена в некоторое число узлов, которые упруго взаимодействуют со стержнями, не имеющими массы. Стержни работают только на изгиб.

В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. были решены несколько задач о свободных колебаниях: консольного стержня с распределенной массой и сооружения башенного типа (телевизионная башня)). Полученные приближенные результаты были сравнены с известными точными результатами и показали хорошую сходимость, особенно при увеличении числа степеней свободы (количества сосредоточенных масс, моделирующих распределенную массу стержня).

## Литература [References]

1. Хазов, П.А., Кожанов, Д.А., Анущенко, А.М., Сатанов, А.А., *Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях: колебания, прочность, ресурс*. Н. Новгород, ННГАСУ, 2022. [Khazov, P.A., Kozhanov, D.A., Anishchenko, A.M., Saranov, A.A., *Dinamika stroitel'nykh konstruktсий pri ekstremal'nykh prirodnykh vozdeystviyakh: kolebaniya, prochnost', resurs = Dynamics of building structures under extreme natural influences: vibrations, strength, resource*. Nizhniy Novgorod, NNGASU, 2022. (in Russian)]
2. Мкртычев, О.В., Решетов, А.А., *Сейсмические нагрузки при расчете зданий и сооружений*. Москва, Изд-во АСВ, 2017. [Mkrtychev, O.V., Reshetov, A.A., *Seismicheskie nagruzki pri raschete zdaniy i sooruzheniy = Seismic loads in the calculation of buildings and structures*. Moscow, Publishing House of the DIA, 2017. (in Russian)]
3. Суй, Пэйфу, *Проектирование современных высотных зданий*. Москва, Изд-во АСВ, 2008. [Xu, Peifu, *Proektirovaniye sovremennykh vysotnykh zdaniy = Design of modern high-rise buildings*. Moscow, Publishing House of the DIA, 2008. (in Russian)]
4. Шейн, А.И., *Динамика и устойчивость сооружений. Обеспечение сейсмостойкости зданий и сооружений*. Пенза, ПГУАС, 2015. [Shein, A.I., *Dinamika i ustoychivost' sooruzheniy. Obespechenie seystmostoykosti zdaniy i sooruzheniy = Dynamics and stability of structures. Ensuring earthquake resistance of buildings and structures*. Penza, PGUAS, 2015. (in Russian)]
5. Гусев, А.Ф., Новоселова, М.В., *Прикладная теория колебаний*. Тверь, Тверской гос. техн. ун-т, 2017. [Gusev, A.F., Novoselova, M.V., *Prikladnaya teoriya kolebaniy = Applied theory of oscillations*. Tver, Tver State Technical University, 2017. (in Russian)]
6. Артюхин, Ю.П., Грибов А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и плоских оболочек методом граничных элементов*. Казань, ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i plogikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements*. Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]
7. Качикаделис, Дж.Т., *Граничные элементы: Теория и приложения*. Москва, Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007. [Katsikadelis, J.T., *Granichnye elementy: Teoriya i prilozheniya = Boundary elements: Theory and applications*. Moscow, Publishing House of the Association of Construction Universities, 2007. (in Russian)]
8. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. В: *Актуальные проблемы механики сплошных сред*. Казань: Изд-во Акад. наук РТ, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Bending of an anisotropic plate by the method of boundary elements. In: *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnykh sred = Actual problems of continuum mechanics*. Kazan, Publishing House of the Academy of Sciences of the Tatarstan Republic, 2020, pp. 105–111. (in Russian)]
9. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, т. 7, № 2, 2023. с. 180–195. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, vol. 7, no. 2, 2023. pp. 180-195. (in Russian)]
10. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the

- dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304–315. (in Russian)]
11. Харрис, С.М., Крид, Ч.И., *Справочник по ударным нагрузкам*. Ленинград, Судостроение, 1980. [Harris S.M., Creed C.I. *Spravochnik po udarnym nagruzkam = Handbook of shock loads*. Leningrad, Sudostroenie, 1980. (in Russian)]
  12. Бабаков, И.М., *Теория колебаний*. Москва, Гостехиздат, 1958. [Babakov, I.M., *Teoriya kolebaniy = Theory of oscillations*. Moscow, Gostekhizdat, 1958. (in Russian)]
  13. Стеклов, В.А., *Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва-Ленинград, Госиздат, 1927. [Steklov, V.A., *Osnovy teorii integrirvaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy = Fundamentals of the integration theory of the ordinary differential equations*. Moscow, Leningrad, Gosizdat, 1927. (in Russian)]
  14. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Y.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mekhanike = The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]
  15. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematica = Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]
  16. Кузьмин, П.А., *Малые колебания и устойчивость движения*. Москва, Наука, 1973. [Kuzmin, P.A., *Malye kolebaniya i ustoychivost' dvizheniya = Small oscillations and stability of motion*. Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)]
  17. Новацкий, В., *Динамика сооружений*. Москва, Госстройиздат, 1963. [Novatsky, V., *Dinamika sooruzheniy = Dynamics of structures*. Moscow, Gosstroizdat, 1963. (in Russian)]
  18. Тимошенко, С.П., Янг, Д.Х., Уивер, У., *Колебания в инженерном деле*. Москва, Машиностроение, 1985. [Timoshenko, S.P., Yang, D.H., Weaver, U., *Kolebaniya v inzhenernom dele = Fluctuations in engineering*. Moscow, Mashinostroenie, 1985. (in Russian)]
  19. Майзель, В.М., *Справочное руководство по машиностроению. Т. 1 «Математика»*. Харьков, Киев, Гос. науч.-техн. изд-во, 1937. [Maisel, V.M., *Spravochnoe rukovodstvo po mashinostroeniyu. T. 1 "Matematika" = Reference manual on mechanical engineering. Vol. 1 "Mathematics"*. Kharkiv, Kiev, State Scientific and Technical publishing house, 1937. (in Russian)]