

УДК 532.526

EDN: HJKMQE DOI: 10.31429/vestnik-20-1-19-26

Бифуркации вращения в жидкости вблизи свободной границы

В. А. Батищев  

Южный федеральный университет, Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону, 344090, Россия

✉ Батищев Владимир Андреевич; ORCID 0000-0002-7552-6176; e-mail: batishev-v@mail.ru

Аннотация. На основе уравнений Навье-Стокса рассчитано стационарное термокапиллярное течение жидкости в полубесконечном пространстве, ограниченном сверху свободной границей, на которой температура распределена локально по степенному закону от радиальной координаты. Показано, что при охлаждении границы в результате бифуркации возникают вращательные режимы в пограничном слое вблизи свободной поверхности, причем вращение отсутствует вне пограничного слоя. Численно рассчитаны как незакрученные, так и вращательные режимы. В окрестности точек бифуркации построены асимптотические разложения вращательных режимов.

Ключевые слова: термокапиллярный эффект, пограничный слой, свободная граница, вращение, бифуркации.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Батищев В. А. Бифуркации вращения в жидкости вблизи свободной границы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 19–26. EDN: HJKMQE. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-19-26

Поступила 18 февраля 2023 г. После доработки 17 марта 2023 г. Принято 20 марта 2023 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Bifurcations of Rotation in a Fluid Near Free Surface

V. A. Batishchev  

Southern Federal University, Milchakova, 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia

✉ Vladimir A. Batishchev; ORCID 0000-0002-7552-6176; e-mail: batishev-v@mail.ru

Abstract. Based on the Navier-Stokes equations, the thermocapillary fluid flow in a semi-infinite space bounded from above by a free surface is calculated. At the free surface, the temperature is distributed locally according to a power law from the radial coordinate. It is shown that when the boundary is cooled, rotational regimes of fluid flows appear in the boundary layer near the free surface. There is no rotation outside the boundary layer. Both untwisted and rotational modes are calculated numerically. Non-swirling modes exist only if the external flow velocity is greater than its limit value. Rotational regimes arise as a result of bifurcation of untwisted regimes. The bifurcation values of the external flow velocity are found numerically by solving the linearized eigenvalue problem. A bifurcation diagram is constructed. In a small neighborhood of bifurcation points, asymptotic expansions of the velocity and pressure fields are constructed. Two small parameters are introduced in the construction of asymptotic formulas. It is shown that two rotational regimes branch off from the bifurcation points, which differ from each other only in the direction of rotation. Outside small neighborhoods of the bifurcation points, the rotational regimes are constructed numerically.

Keywords: thermocapillary effects, boundary layer, free boundary, bifurcations, rotation.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Batishchev, V. A., Bifurcations of rotation in a fluid near free surface. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 19–26. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-19-26

Received 18 February 2023. Revised 17 March 2023. Accepted 20 March 2023. Published 31 March 2023.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Термокапиллярные течения, вызванные неравномерным распределением температуры вдоль свободной поверхности жидкости, начали активно изучаться с середины прошлого столетия. При малых значениях диффузионных коэффициентов вблизи свободной границы возникает пограничный слой Марангони, течение в котором вызвано поверхностными касательными напряжениями, созданными температурными нагрузками. Работа [1] является одной из первых, в которой рассчитаны термокапиллярные течения жидкости в пограничном слое Марангони. Термокапиллярные течения в пограничных слоях успешно изучались в цикле публикаций, выполненных В.В. Пухначевым и его учениками. Отметим работы [2, 3], в которых выполнен анализ свойств термокапиллярных течений жидкости и приведены примеры расчетов этих течений в слоях Марангони. В [4] изучена задача о возникновении вращения жидкости в пограничном слое Марангони в результате бифуркации. Показано, что при локальном охлаждении свободной границы происходит ветвление решений уравнений пограничного слоя с возникновением двух вращательных режимов. Этот результат был перенесен на случай неоднородной жидкости, удовлетворяющей уравнениям движения в приближении Обербека-Буссинеска. В [5] рассмотрены и подтверждены экспериментально результаты решения задачи о возникновении вращения жидкости при термокапиллярном течении в «жидком мостике». Ниже результаты работы [4] обобщаются на случай локального распределения температуры свободной границы по степенному закону от радиальной координаты.

1. Уравнения движения

На основе системы уравнений Навье–Стокса рассматривается стационарное течение несжимаемой жидкости, заполняющей полубесконечное пространство, ограниченное сверху свободной границей Γ

$$(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность. $\mathbf{g} = (0, 0, -g_t)$, g_t — ускорение свободного падения, ν — кинематический коэффициент вязкости. Задача решается в цилиндрических координатах (r, θ, z) . Рассматривается осесимметричное течение жидкости, что означает независимость скорости и давления от окружной координаты.

Предполагается, что свободная граница Γ не деформируется. Уравнение границы Γ возьмем в виде $z = 0$. На этой границе выполняются динамические условия для касательных напряжений, а также условие непротекания через границу Γ

$$2\nu\rho(\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}) = \nabla_\Gamma\sigma, \quad \mathbf{v}\mathbf{n} = 0 \quad (z = 0)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, который считается линейно зависящим от температуры: $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T_\Gamma - T_*)$, где σ_0 , $|\sigma_T|$, T_* — известные постоянные. ∇_Γ — оператор градиента вдоль границы Γ , \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к свободной границе, Π — тензор скоростей деформаций. Через T_Γ обозначена температура свободной поверхности. Считается, что температура свободной границы зависит только от радиальной координаты по степенному закону $T_\Gamma = T_\infty + T_m(r^{n+1}/L^{n+1} - 1)$ при $r \leq L$ и $T_\Gamma = T_\infty$ при $r \geq L$ (T_∞ — постоянная средняя температура слоя жидкости, L — радиус окружности на поверхности Γ , внутри которой изменяется температура, $T_m = T_\Gamma|_{r=L} - T_\Gamma|_{r=0}$ — перепад температуры на промежутке $r \in [0, L]$). Отметим, что при $T_m > 0$ свободная граница неравномерно охлаждается для $r < L$, а при $T_m < 0$ — нагревается. Обозначим через $\alpha = T_m/T_\infty$ безразмерную разность температур на Γ . Очевидно, что при охлаждении Γ выполняется соотношение $0 < T_m < T_\infty$. Параметр α удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < 1$.

Переходим к безразмерным переменным в уравнениях и краевых условиях. Выбираем в качестве масштабов длины, скорости, давления и температуры величины $L, u, \rho u^2, T_\infty$, причем параметр u определяется формулой $u = (T_\infty^2 |\sigma_T|^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}$. Введем параметр ε соотношением $\varepsilon = \sqrt{\nu/(Lu)}$. Очевидно, что при малом значении коэффициента кинематической вязкости и для конечных значений величин L, u параметр ε оказывается малым.

При малых значениях параметра ε в окрестности свободной поверхности возникает пограничный слой Марангони, толщиной порядка $O(\varepsilon)$. Вне слоя в главном приближении течение жидкости невязкое. Рассматривается случай, когда порядки скоростей во внешнем потоке $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_{r0}, \mathbf{v}_{\theta0}, \mathbf{v}_{z0})$ и в пограничном слое одинаковы и равны $O(u)$. Предполагается, что невязкое течение не закручено, т.е. $v_{\theta0} = 0$.

2. Асимптотические разложения

Краевая задача решается методом пограничного слоя [6] при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вводим переменную растяжения $s = z/\varepsilon$. Асимптотические разложения поля скорости строим по степеням малого параметра ε

$$v_r = v_{r0} + h_{r0} + \varepsilon(h_{r1} + v_{r1}) + \dots, \quad v_\theta = h_{\theta0} + \varepsilon h_{\theta1} + \dots, \quad v_z = v_{z0} + \varepsilon(h_{z1} + v_{z1}) + \dots$$

Такой же ряд строится и для функции давления. Функции $h_{r0}, h_{r1}, h_{\theta0}, h_{\theta1}, h_{z1}$ определены в области пограничного слоя D_Γ , зависят от переменных r, θ, s и стремятся к нулю при выходе из D_Γ . Функции $v_{r0}, v_{r1}, v_{z0}, v_{z1}$ определены во всей области течения жидкости («внешнее решение»), описывают течение вне области D_Γ , причем функции v_{r0}, v_{z0} удовлетворяют уравнениям Эйлера идеальной жидкости.

Уравнения пограничного слоя получаются подстановкой асимптотических рядов в систему Навье–Стокса и приравниванием нулю суммы коэффициентов порядка $O(1)$. Введем функции $H_r = h_{r0} + v_{r0}|_\Gamma, H_z = h_{z1} + v_{z1}|_\Gamma + s \partial v_{z0}/\partial z|_\Gamma$. В главном приближении получаем систему уравнений пограничного слоя в D_Γ

$$\begin{aligned} H_r \frac{\partial H_r}{\partial r} + H_z \frac{\partial H_r}{\partial s} - \frac{h_{\theta0}^2}{r} &= \frac{\partial^2 H_r}{\partial s^2} + v_{r0} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \Big|_\Gamma, \\ H_r \frac{\partial h_{\theta0}}{\partial r} + H_z \frac{\partial h_{\theta0}}{\partial s} + \frac{H_r h_{\theta0}}{r} &= \frac{\partial^2 h_{\theta0}}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_z}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Краевые условия приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial s} = -\alpha(n+1)r^n, \quad \frac{\partial h_{\theta0}}{\partial s} = 0, \quad H_z = 0 \quad (s=0), \\ H_r \rightarrow v_{r0}|_\Gamma, \quad h_{\theta0} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow -\infty). \end{aligned} \tag{2.2}$$

В безразмерных переменных температуру свободной границы представим в виде $T_\Gamma = 1 + \alpha(r^{n+1} - 1)$ при $r < 1$. С учетом этой формулы предположим, что радиальная компонента скорости идеальной жидкости на свободной границе также зависит от радиальной координаты по степенному закону $v_{r0}|_\Gamma = Ur^{(2n+1)/3}$ ($U \geq 0$).

3. Основные режимы

Рассмотрим случай незакрученного осесимметричного течения жидкости. Здесь отсутствует окружная компонента скорости $v_\theta = 0$, а сам вектор скорости не зависит от окружной координаты θ . Решения уравнений пограничного слоя (2.1), для которых введем обозначение $H_{r0}, h_{\theta0}, H_{z0}$, строятся по формулам

$$H_{r0} = r^{(2n+1)/3}(H'_0(\eta) + U), \quad h_{\theta0} = 0, \tag{3.1}$$

$$H_{z0} = r^{(n-1)/3}((n+5)(H_0(\eta) + \eta U) + (n-1)\eta(H'_0 + U))/3.$$

Здесь $\eta = -sr^{(n-1)/3}$. Функция $H_0(\eta)$ находится из краевой задачи

$$H_0^{(3)} = \frac{2n+1}{3} (H_0'^2 + 2UH_0') - \frac{n+5}{3} (H_0 + \eta U) H_0'', \tag{3.2}$$

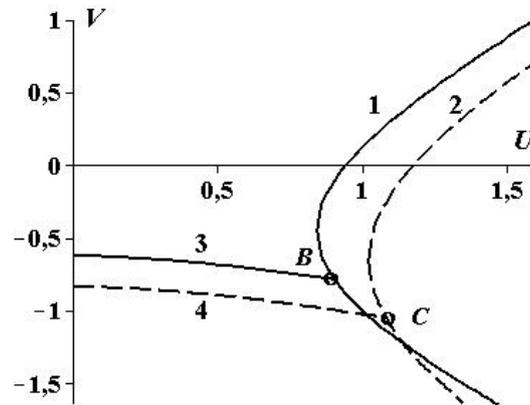


Рис. 1. Зависимость $V(U)$ на свободной границе для «основных» (1–2) и вращательных (3–4) режимов
 Fig. 1. Dependence $V(U)$ on the free boundary for “basic” (1–2) and rotational (3–4) modes

$$H_0(0) = 0, \quad H''_0(0) = \alpha(n + 1), \quad H'_0(\infty) = 0.$$

Краевая задача (3.2) решалась численно методом пристрелки с использованием пакета Matlab.

Введем функцию $V = r^{-(2n+1)/3} H_r|_{\Gamma}$, которая пропорциональна радиальной компоненте скорости на свободной границе в главном приближении. Для основных режимов $V = U + H'_0(0)$ — параметр, подлежащий определению. Параметр U пропорционален скорости идеальной жидкости на границе Γ . На рис. 1 кривые 1 и 2 изображают зависимость параметра V от параметра U соответственно при $n = 2$ и $n = 5$ для $\alpha = 0,5$. Обозначим через U_m значение параметра U в «вершинах» кривых 1 и 2. Отметим, что $U_m \approx 0,8454$ при $n = 2$ и $U_m \approx 1,0239$ при $n = 5$. При $U > U_m$ для каждого значения U численно найдено по два различных решения задачи (3.2), которые отличаются между собой профилем скорости. При $U = U_m$ оба решения сливаются. При $U < U_m$ решения задачи (3.2) отсутствуют. Обозначим через U_0 значение параметра U , при котором кривые 1–2 пересекают ось абсцисс, т.е. при $V = 0$. Отметим, что $U_0 \approx 0,9452$ при $n = 2$ и $U_0 \approx 1,1779$ при $n = 5$. При $U \geq U_0$ решения, для которых $V \geq 0$ описывают зону тока, в которой жидкие частицы удаляются от оси Oz . При $V < 0$ вблизи свободной поверхности возникает тонкий подслой с возвратным течением, в котором жидкие частицы движутся в направлении оси Oz . Вне этого подслоя жидкие частицы движутся в противоположную сторону. Отметим, что радиальная компонента скорости в пограничном слое у «основных» режимов для $\alpha > 0$ при удалении от свободной границы монотонно возрастает и асимптотически стремится к параметру U при выходе из области пограничного слоя.

Замечание. Результаты, представленные для основных режимов при $n = 2$ и $n = 5$ справедливы и для всех значений параметра n из промежутка $[0, 10]$, в котором проводились расчеты для различных значений n . Отметим, что для каждого значения $n \in [0, 10]$ возникает точка бифуркации.

4. Бифуркационные параметры

При скоростях внешнего потока, меньших, чем U_m , основные режимы отсутствуют. Однако в пограничном слое, в этом случае, имеются вращательные режимы, которые ответвляются от основных режимов в точках бифуркации. Эти точки находятся численным интегрированием задачи на собственные значения, которая выводится путем линеаризации краевой задачи (2.1)–(2.2) вблизи основных режимов. Обозначим через u_* , v_* , w_* радиальную, окружную и осевую компоненты собственного вектора. Линеаризованная задача разбивается на две задачи. Первая задача определяет компоненту $v_*(\eta)$ и собственные значения параметра U

$$v''_* = \frac{2n + 4}{3}(H'_0 + U)v_* - \frac{n + 5}{3}(H_0 + \eta U)v'_*, \quad (4.1)$$

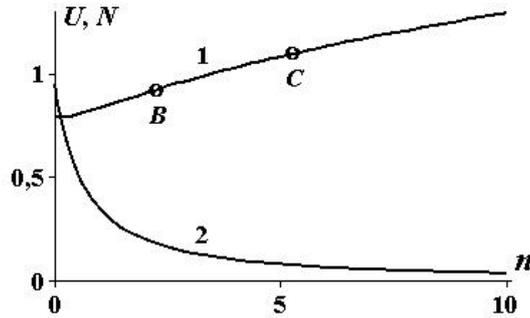


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (кривая (1)) и зависимость $N(n)$ (кривая 2) для вращательных режимов при $\alpha = 0,5$

Fig. 2. Bifurcation diagram (curve (1)) and dependence $N(n)$ (curve 2) for rotational regimes when $\alpha = 0.5$

$$v'_* = 0 \quad (\eta = 0); \quad v_* = 0 \quad (\eta = \infty).$$

Решение задачи (4.1) находится численно. Для собственной функции поставлено условие нормировки $v_*(0) = 1$. Численно найдена зависимость собственных значений U_* параметра U от параметра n в виде соотношения $U = U_*(n)$ на отрезке $n \in [0, 10]$ для параметра $\alpha = 0,5$ (бифуркационная диаграмма). Собственная функция $v_*(\eta)$ монотонно убывает от единицы до нуля с ростом переменной η на полуоси $[0, \infty)$. На рис. 2 кривая 1 изображает зависимость $U = U_*(n)$ при $\alpha = 0,5$. Функция $U_*(n)$ равна значению $U_* \approx 0,7912$ при $n = 0$, затем с ростом параметра n убывает и достигает минимума при $n \approx 0,1112$, далее монотонно возрастает до значения $U_* \approx 1,2855$ при $n = 10$.

Компоненты u_*, w_* собственного вектора удовлетворяют второй краевой задаче на собственные значения, которая не содержит компоненту v_* и рассчитана численно при $n \in [0, 10]$. Найденные при этом собственные значения $U^*(n)$ параметра U для каждого значения параметра n оказались меньше соответствующего собственного числа $U_*(n)$ задачи (4.1), т.е. $U^*(n) < U_*(n)$. В результате получаем, что $u_* = w_* = 0$ для $U = U_*(n)$.

5. Режимы вращения

Компоненты H_r и $h_{\theta 0}$ вращательных режимов представим по формулам

$$H_r = r^{(2n+1)/3}(H'(\eta) + U), \quad h_{\theta 0} = r^{(2n+1)/3}G(\eta).$$

Компонента H_z получается заменой функции H_0 у компоненты H_{z0} в формулах (3.1) на функцию $H(\eta)$. Используя уравнения и граничные условия (2.1)–(2.2), для функций $H(\eta)$, $G(\eta)$ выводим краевую задачу

$$H^{(3)} = \frac{2n+1}{3} (H'^2 + 2UH') - \frac{n+5}{3} (H + \eta U) H'' - G^2, \quad (5.1)$$

$$G'' = \frac{2n+4}{3} G(H' + U) - \frac{n+5}{3} G'(H + \eta U),$$

$$H(0) = 0, \quad H''(0) = \alpha(n+1), \quad G'(0) = 0; \quad H'(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 0.$$

Решение задачи (5.1) при фиксированном значении параметра n для значений параметра α из промежутка $(0, 1)$ можно найти, если решить эту задачу при $\alpha = 0,5$ и далее выполнить перерасчет полученного решения по формулам

$$\begin{aligned} H(\eta) &= (2\alpha)^{1/3} H_1(\xi), \quad G(\eta) = (2\alpha)^{2/3} G_1(\xi), \\ U &= (2\alpha)^{2/3} U_1, \quad \xi = (2\alpha)^{1/3} \eta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь H_1, G_1, U_1 — решение задачи (5.1) при $\alpha = 0,5$.

Вращательные режимы рассчитывались численно интегрированием краевой задачи (5.1). Параметр V , введенный ранее, рассчитывается по формуле $V = U + H'(0)$. Кривые 3 и 4 на рис. 1 изображают зависимость параметра V от параметра U для вращательных режимов соответственно при $n = 2$ и $n = 5$ для $\alpha = 0,5$. Точки B и C — точки бифуркаций соответственно для $n = 2$ и $n = 5$, которые изображены также и на бифуркационной диаграмме 1 рис. 2. От точек бифуркаций ответвляются по два вращательных режима, у которых окружные компоненты скорости отличаются только знаком, а радиальные компоненты так же, как и осевые компоненты скорости, совпадают между собой.

Численные расчеты и формулы (5.2) приводят к бифуркационным значениям параметра U для $n = 2$ в виде $U_* \approx 1,4386\alpha^{2/3}$. При $n = 5$ приведем значение $U_* \approx 1,7201\alpha^{2/3}$.

Расчет окружной компоненты скорости показал, что наибольшего значения эта компонента достигает на свободной границе. При удалении от границы окружная компонента монотонно убывает и исчезает при выходе из области пограничного слоя.

6. Асимптотика вращательных режимов вблизи точки бифуркации

Представим компоненты вектора скорости $H_r, h_{\theta 0}, H_z$ в виде суммы компонент скорости основного режима и возмущений

$$H_r = r^{(2n+1)/3}(H'_0(\eta) + U + u_r), h_{\theta 0} = r^{(2n+1)/3}u_{\theta}, H_z = r^{(n-1)/3}u_z + H_{z0}.$$

Здесь u_r, u_{θ}, u_z — возмущения. Введем линейные операторы

$$K = \frac{4n+2}{3}(H'_0 + U)E - \frac{n+5}{3}(H_0 + \eta U)\frac{d}{d\eta} + \frac{n-1}{3}\eta H''_0 E,$$

$$L_{\theta} = \frac{2n+4}{3}(H'_0 + U)E - \frac{n+5}{3}(H_0 + \eta U)\frac{d}{d\eta}.$$

Здесь E — единичный оператор.

Подставляя введенные функции $H_r, h_{\theta 0}, H_z$ в задачу (2.1)–(2.2), получаем нелинейную краевую задачу для возмущений

$$u''_r = K u_r - H''_0 u_z + \frac{2n+1}{3}u_r^2 + \frac{n-1}{3}\eta u_r u'_r - u_z u'_r - u_{\theta}^2,$$

$$u''_{\theta} = L_{\theta} u_{\theta} + u_{\theta} u'_z - u_z u'_{\theta} + \eta \frac{n-1}{3}(u_r u'_{\theta} - u_{\theta} u'_r), \quad (6.1)$$

$$u'_z = \frac{2n+4}{3}u_r + \frac{n-1}{3}\eta u'_r,$$

$$u'_r(0) = 0, \quad u'_{\theta}(0) = 0, \quad u_z(0) = 0; \quad u_r(\infty) = 0, \quad u_{\theta}(\infty) = 0.$$

В окрестности точки бифуркации U_* введем малый параметр по формуле $\delta = U - U_*$. Очевидно, что $\delta \rightarrow 0$ при $U \rightarrow U_*$. В той же окрестности введем второй параметр $\varepsilon_1 = u_{\theta}(0)$. Здесь $u_{\theta}(0)$ — функция параметров U, α, n , которая обращается в ноль в точке бифуркации при $U = U_*$. Функция $u_{\theta}(0)$ пропорциональна амплитуде окружной компоненты скорости вращательного режима на свободной границе. Очевидно, что в малой окрестности точки бифуркации параметр ε_1 мал и $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $U \rightarrow U_*$.

При $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ в окрестности точки бифуркации U_* построим решение задачи (6.1) в виде асимптотических рядов по степеням параметра ε_1

$$u_r = \varepsilon_1^2 u_1 + \dots, \quad u_{\theta} = \varepsilon_1 v_* + \varepsilon_1^2 v_1 + \varepsilon_1^3 v_2 + \dots, \quad u_z = \varepsilon_1^2 w_1 + \dots \quad (6.2)$$

Здесь учтено, что $u_* = w_* = 0$ при $U = U_*$. Параметр δ также представим в виде асимптотического ряда

$$\delta = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1^2 V_2 + \dots \quad (6.3)$$

Отметим, что выбор параметра ε_1 в виде $\varepsilon_1 = u_\theta(0)$, а также формула в (6.2) для функции u_θ и соотношение $v_*(0) = 1$ приводят к соотношениям $v_1(0) = 0$ и $v_2(0) = 0$ на свободной границе.

Подставляем асимптотические ряды (6.2)–(6.3) в краевую задачу (6.1) для нелинейных возмущений и приравняем к нулю сумму коэффициентов при ε_1 . Функции основного режима также разлагаем в ряд по степеням ε_1 в окрестности точки бифуркации, например $H_0(\eta, U) + \eta U = H_* + \eta U_* + \varepsilon_1 V_1 (\eta + \partial H_0 / \partial U|_{U=U_*}) + \dots$. Здесь учтено, что $U = U_* + \delta$. Через H_* обозначено значение функции H_0 в точке бифуркации.

В первом приближении получаем краевые задачи для определения функций u_1, v_1, w_1 и параметра V_1 . Функция v_1 определяется из краевой задачи

$$v''_1 = L_* v_1 + V_1 E_1, v'_1(0) = 0, v_1(\infty) = 0. \quad (6.4)$$

с дополнительным начальным условием $v_1(0) = 0$, которое следует из условия выбора параметра ε_1 . Отметим, что через L_* обозначен оператор L_θ , определенный в точке бифуркации $U = U_*$. Через E_1 обозначено дифференциальное выражение в точке $U = U_*$

$$E_1 = \frac{2n+4}{3} \left(1 + \partial^2 H_0 / \partial \eta \partial U|_{U=U_*} \right) v_* - \frac{n+5}{3} (\eta + \partial H_0 / \partial U|_{U=U_*}) v'_*$$

Введем вспомогательную функцию $\varphi(\eta)$ как собственное решение краевой задачи: $\varphi'' = (n+3)(H'_* + U_*)\varphi + (n+5)(H_* + \eta U_*)\varphi'/3, \varphi'(0) = 0, \varphi(\infty) = 0$. Условие нормировки возьмем в виде $\varphi(0) = 1$. Умножим уравнение в формулах (6.4) на функцию $\varphi(\eta)$, проинтегрируем по переменной η обе части этого уравнения на полуоси $[0, \infty)$. Далее с помощью интегрирования по частям переносим производные от функции v_1 на функцию $\varphi(\eta)$ и учитываем краевую задачу для $\varphi(\eta)$. В результате получаем «условие разрешимости» задачи (6.4) в виде соотношения $V_1 J_1 = 0$. Здесь введен интеграл $J_1 = \int_0^\infty E_1 \varphi(\eta) d\eta$. Интеграл J_1 рассчитан численно при $\alpha = 0,5$ для $n \in [0, 10]$. С ростом параметра n функция $J_1(n)$ монотонно убывает от значения $-2,3936$ при $n = 0$ до величины $-8,4186$ при $n = 10$. Учитывая, что J_1 не обращается в ноль, из соотношения $V_1 J_1 = 0$ следует, что $V_1 = 0$. Решение задачи (6.4) при $V_1 = 0$ представим в виде $v_1 = c_1 v_*(\eta)$. Учитывая, что $v_1(0) = 0$ и $v_*(0) = 1$, выводим, что $c_1 = 0$, а значит, и $v_1 = 0$.

Приведем краевую задачу для расчета функций u_1, w_1

$$u''_1 = K_* u_1 - H''_* w_1 - v_*^2, w'_1 = \frac{2n+4}{3} u_1 + \frac{n-1}{3} \eta u'_1,$$

$$u'_1(0) = 0, w_1(0) = 0, u_1(\infty) = 0.$$

Здесь K_* оператор K в точке бифуркации. Последняя задача решалась численно для различных значений параметров задачи.

Функция $v_2(\eta)$ определяется из краевой задачи

$$v''_2 = L_* v_2 + V_2 E_1 + \frac{2n+4}{3} v_* u_1 - w_1 v'_* + \frac{n-1}{3} \eta u_1 v'_*, \quad v'_2(0) = 0, \quad v_2(\infty) = 0,$$

с дополнительны условием $v_2(0) = 0$. «Условие разрешимости» этой задачи, полученное по аналогии с «условием разрешимости» задачи (6.4), приводит к формуле

$$V_2 = -\frac{1}{J_1} \int_0^\infty ((2n+4)v_* u_1/3 - w_1 v'_* + \eta(n-1)u_1 v'_*/3) \varphi(\eta) d\eta.$$

Численный расчет показал, что коэффициент V_2 отрицателен и не обращается в ноль при $n \in [0, 10]$. На рис. 2 кривая 2 изображает график коэффициента $N = -V_2$ в зависимости от параметра n при $\alpha = 0,5$.

Зависимость параметра ε_1 от параметра $\delta = U - U_*$ определяется с помощью формулы, которая выводится из (6.3)

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\delta/V_2} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

В окрестности точки бифуркации при $U < U_*$ главный член асимптотики окружной компоненты скорости определяется формулой

$$v_\theta \approx \pm r^{(2n+1)/3} \sqrt{(U - U_*)/V_2} v_*(\eta) + \dots$$

Полученные соотношения показывают, что в точке бифуркации от основного режима ответвляется пара вращательных режимов, которые отличаются между собой только направлением вращения, причем вращательные режимы возникают при $U < U_*$.

Заключение

Рассмотрена задача о возникновении вращательных режимов течений жидкости в полубесконечном горизонтальном слое при локальном распределении температуры на свободной поверхности. Показано, что при неравномерном охлаждении границы по степенному закону от радиальной координаты, может возникать в результате бифуркации пара вращательных режимов в области пограничного слоя вблизи свободной поверхности, причем вне этого слоя вращение отсутствует. При нагреве границы вращение не возникает.

Литература [References]

1. Napolitano, L.G., Marangoni boundary layers. *Proc. of the 3rd European Symposium on Material Science in Space, Grenoble (France), 24–27 April 1979. Europ. Space Agency.*, 1979, pp. 313–315.
2. Пухначев, В.В., Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони. *Доклады АН СССР*, 1984, т. 279, № 5, с. 1061–1064. [Pukhnachev, V.V., Group Analysis of the Equations of the Nonstationary Marangoni Boundary Layer. *Doklady akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1984, vol. 279, no. 5, pp. 1061–1064. (in Russian)]
3. Batishchev, V.A., Kuznetsov, V.V., Pukhnachev, V.V., Marangoni boundary layers. *Progress in Aerospace Sciences*, 1984, vol. 26, pp. 353–370.
4. Batishchev, V.A., Emergence of fluid rotation in the Marangoni boundary layers in the region of local cooling of the free boundary. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 407–415.
5. Tanaka, S., Kawamura, H., Ueno, I., Schwabe, D., Flow structure and dynamic particle accumulation in thermocapillary convection in a liquid bridge. *Physics of Fluids*, 2006, vol. 18, iss. 6, p. 067103.
6. Вишик, М.А., Люстерник, Л.А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук*, 1957, т. 12, № 5(77), с. 3–102. [Vishik, M.A., Lyusternik, L.A., Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Advances in mathematics*, 1957, vol. 12, no. 5(77), pp. 3–102. (in Russian)]