УДК 517.927.4 EDN: ASTQNU DOI: 10.31429/vestnik-20-1-6-11

О существовании положительного решения периодической краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет, ул. Магомеда Гаджиева 43-а, Махачкала, 367000, Россия
Абдурагимов Гусен Эльдерханович; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается периодическая краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. С помощью специальных топологических средств, основанных на теории индекса неподвижной точки в полуупорядоченных пространствах, доказано существование по меньшей мере одного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведены соответствующие примеры.

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус, функция Грина.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Абдурагимов Г. Э. О существовании положительного решения периодической краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 6–11. EDN: ASTQNU. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-6-11

Поступила 22 февраля 2023 г. После доработки 20 марта 2023 г. Принято 23 марта 2023 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

On the Existence of a Positive Solution to a Periodic Boundary Value Problem for One Non-linear Second-order Functional Differential Equation

G. E. Abduragimov

Dagestan State University, st. Magomed Gadzhiev 43-a, Makhachkala, 367000, Russia
Gusen E. Abduragimov; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Abstract. The boundary value problem is considered

$$
\begin{aligned}
&x''(t) + \rho^2 x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1,\\
&x(0) = x(1),\\
&x'(0) = x'(1),
\end{aligned}
$$

where $0 < \rho < \pi$, T — linear positive continuous operator.
This problem was reduced to an equivalent integral equation, and using some properties of the Green's function of the operator $-d^2/dx^2$ with the corresponding periodic boundary conditions, the invariance of a completely continuous integral operator in the chosen cone of the space of continuous functions was established. Further, under power-law growth restrictions on the function f, relying on the well-known Krasnosel'skii theorem on the index of fixed points of an operator, the existence of at least one positive solution of the problem under consideration was proved. At the end of the article, an example of a boundary value problem for an integro-differential equation with a sublinear power right side f is given, illustrating the fulfillment of sufficient conditions for the existence of at least one positive solution.

Keywords: positive solution, boundary value problem, cone, Green's function.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Abduragimov, G. E., On the existence of a positive solution to a periodic boundary value problem for one non-linear second-order functional differential equation. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 6–11. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-6-11

Received 22 February 2023. Revised 20 March 2023. Accepted 23 March 2023. Published 31 March 2023.

The author declare no competing interests.

Введение

Краевым задачам для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассматриваются вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т.д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М.Г. Крейна, Л.В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М.А. Красносельским и его учениками Л.А. Ладыженским, И.А. Бахтиным, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорным и др.

Довольно хорошо изучены периодические краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь достаточно распространенным приемом для получения достаточных условий существования и кратности положительных решений является известная теорема Красносельского о неподвижной точке конусного сжатия (растяжения) [1–4]. В этих работах получены соответствующие результаты, опирающиеся на свойство неотрицательности функции Грина. В [5] на основе теоремы Красносельского о неподвижной точке установлено существование положительного решения сублинейных и суперлинейных периодических краевых задач. В [6] при условиях более слабых, чем суб- и супер линейность доказано существование по меньшей мере двух положительных решений. В [7] изучена нелинейная краевая задача для знакопеременной функции Грина.

Насколько известно автору, вопросам существования положительных решений периодических нелинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка посвящено немного работ. Наличие линейного оператора в уравнении не всегда позволяет корректно реализовать схемы доказательства, основанные на принципе неподвижной точки Красносельского. В настоящей работе предпринята попытка в какой-то степени устранить обозначенный пробел. С помощью леммы об индексе неподвижной точки [8] в полуупорядоченных пространствах получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения периодической краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения второго порядка. Полученные результаты являются продолжением исследований автора, посвященных данной тематике.

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через C — пространство $C[0,1]$, $\mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на [0,1] с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \rho^2 x(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x(1), \tag{1.2}$$

$$x'(0) = x'(1), \tag{1.3}$$

где $0 < \rho < \pi$, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\,\cdot\,,0) \equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in \mathbb{W}^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2)–(1.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) \mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.4}$$

где

$$G(t,s)=\frac{1}{2\rho(1-\cos\rho)}\begin{cases}\sin\rho(t-s)+\sin\rho(1-t+s), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ \sin\rho(s-t)+\sin\rho(1-s+t), & t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Несложно проверить, что функция Грина оператора $-\mathrm{d}^2/\,\mathrm{d}t^2$ с краевыми условиями (1.2)–(1.3) обладает следующими свойствами

1. $G(t,s)\geqslant 0,\ (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$;
2. $\min_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} G(t,s)=\dfrac{\sin\rho}{2\rho(1-\cos\rho)}$;
3. $\max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} G(t,s)=\dfrac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}$.

Предположим, что $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u)\leqslant a(t)+bu^{p/q},\quad t\in[0,1],\quad u\geqslant 0, \tag{1.5}$$

где $b>0$, $a(t)\in\mathbb{L}_q$ $(1<q<\infty)$ — неотрицательная $(a(t)\neq 0)$ на $[0,1]$ функция.

В операторной форме уравнение (1.4) можно переписать в виде

$$x=GNTx,$$

где $N\colon\mathbb{L}_p\to\mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G\colon\mathbb{L}_q\to C$.

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)\,(s)\right)\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен [9, с. 161].

Обозначим через K конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1} x(t\geqslant\gamma\|x\|_C.$$

где $\gamma=\cos(\rho/2)>0$.

Пусть $K_r=\{x\in K:\|x\|_C<r\}$ и $\partial K_r=\{x\in K:\|x\|_C=r\}$, где $r>0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение

Лемма 1. [8] Пусть E — банахово пространство и $K\subset E$ замкнутый выпуклый конус в E. Пусть $A:K\to K$ — вполне непрерывный оператор и пусть $i(A,K_r,K)$ обозначает неподвижную точку оператора A.

(i) Если $\mu Au\neq u$ для всех $u\in\partial K_r$ и $0<\mu\leqslant 1$, то

$$i(A,K_r,K)=1.$$

(ii) Если $\inf_{u\in\partial K_r}\|Au\|>0$ для всех $u\in\partial K_r$ и $\mu Au\neq u$ для всех $u\in\partial K_r$, и $\mu\geqslant 1$, то

$$i(A,K_r,K)=0.$$

Лемма 2. Оператор A оставляет инвариантным конус K.

Доказательство. В силу вышеприведенных свойств функции Грина имеем

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1}(Ax)(t)=\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)\,(s)\right)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\sin\rho}{2\rho(1-\cos\rho)}\int\limits_0^1 f\left(s,(Tx)\,(s)\right)\mathrm{d}s.$$

С другой стороны

$$\|Ax\|_C = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |(Ax)(t)| \leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)} \int_0^1 f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right) \mathrm{d}s.$$

Отсюда

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1} (Ax)(t) \geqslant \gamma\|Ax\|_C.$$

□

Теорема 1. Предположим, что наряду с (1.5) выполнены условия:

1) $p \neq q$;

2) $(T1)(t) \leqslant 1$, $t \in [0,1]$;

3) $f(t,u) > \alpha r$, $(t,u) \in [0,1]\times[0,r]$, где $\alpha = \dfrac{2\rho(1-\cos\rho)}{\sin\rho} > 1$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Вначале покажем, что

$$\inf_{x\in\partial K_r} \|Ax\|_C > 0.$$

Действительно, в силу условий настоящей теоремы и соответствующих свойств функции Грина для $x \in \partial K_r$ имеем

$$(Ax)(t) \geqslant \frac{\sin\rho}{2\rho(1-\cos\rho)} \int_0^1 f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right) \mathrm{d}s > \frac{\sin\rho}{2\rho(1-\cos\rho)}\alpha r = r.$$

Далее докажем, что $\mu Ax \neq x$ для всех $x \in \partial K_r$ и $\mu \geqslant 1$.

В самом деле, если существуют $\tilde{x} \in \partial K_r$ и $\tilde{\mu} \geqslant 1$ такие, что $\tilde{\mu}A\tilde{x} = \tilde{x}$, то $\tilde{x}$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\mu}\int_0^1 G(t,s) f\left(s, (T\tilde{x})\left(s\right)\right) \mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Имеем

$$\tilde{\mu}\int_0^1 G(t,s) f\left(s, (T\tilde{x})\left(s\right)\right)\, ds \geqslant \frac{\sin\rho}{2\rho(1-\cos\rho)} \int_0^1 f\left(s, (T\tilde{x})\left(s\right)\right) \mathrm{d}s >$$
$$> \frac{\sin\rho}{2\rho(1-\cos\rho)}\alpha r = r = \|\tilde{x}\|_C, \quad t \in [0,1].$$

Поскольку $\|\tilde{x}\|_C \geqslant \tilde{x}(t)$ для всех $t \in [0,1]$, приходим к противоречию $\tilde{x}(t) > \tilde{x}(t)$. Отсюда, в силу леммы 1

$$i(A, K_r, K) = 0. \tag{1.6}$$

Пусть теперь R — некоторое положительное число такое, что $R > r$. Допустим, что существуют $\tilde{x} \in \partial K_R$ и $0 < \tilde{\mu} \leqslant 1$ такие, что $\tilde{\mu}A\tilde{x} = \tilde{x}$. Тогда

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\mu}\int_0^1 G(t,s) f\left(s, (T\tilde{x})\left(s\right)\right) \mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1.7}$$

В силу (1.5) и приведенных выше свойств функции Грина имеем

$$\tilde{\mu}\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(T\tilde{x})(s)\right)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\int\limits_0^1 f\left(s,(T\tilde{x})(s)\right)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\int\limits_0^1 \left(a(s)+b\,(T\tilde{x})^{\frac{p}{q}}(s)\right)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\left(\int\limits_0^1 a(s)\,\mathrm{d}s + b\int\limits_0^1 (T\tilde{x})^{\frac{p}{q}}(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\left(\|a\|_{\mathbb{L}_q}+b\|T\tilde{x}\|^{\frac{p}{q}}_{\mathbb{L}_p}\right) \leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\|a\|_{\mathbb{L}_q}+b\frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\tau^{\frac{p}{q}}\|\tilde{x}\|^{\frac{p}{q}}_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\|a\|_{\mathbb{L}_q}+b\frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\rho(1-\cos\rho)}\tau^{\frac{p}{q}}R^{\frac{p}{q}-1}\frac{1}{\gamma}\tilde{x}(t), \quad t\in[0,1],$$

где τ — норма оператора T.

Ввиду (1.7) последнее неравенство можно записать в виде

$$\tilde{x}(t) \leqslant H + LR^{p/q-1}\tilde{x}(t), \quad t\in[0,1], \tag{1.8}$$

где

$$H = \frac{\sin(\rho/2)}{\rho(1-\cos\rho)}\|a\|_{\mathbb{L}_q}, \quad L = \frac{b\tau^{\frac{p}{q}}\sin(\rho/2)}{\gamma\rho(1-\cos\rho)}.$$

Предположим, что $0 < LR^{p/q-1} < 1$. Тогда при $\tilde{x}\in\partial K_R$ из (1.8) получим

$$\gamma\|\tilde{x}\|_C \leqslant \tilde{x}(t) \leqslant \frac{H}{1-LR^{p/q-1}}, \quad t\in[0,1].$$

Откуда

$$\|\tilde{x}\|_C \leqslant \frac{H}{\gamma\left(1-LR^{p/q-1}\right)}.$$

Пусть $R > \dfrac{H}{\gamma\left(1-LR^{p/q-1}\right)}$, т.е.

$$\gamma LR^{p/q} - R\gamma + H < 0. \tag{1.9}$$

Тогда $\mu Au \neq u$ для всех $u\in\partial K_R$ и $0<\mu\leqslant 1$. Следовательно, в силу леммы 1

$$i(A,K_R,K) = 1. \tag{1.10}$$

Потребовав $r < R$, из (1.6) и (1.10) получим

$$i(A,K_R\backslash\bar{K_r},K) = i(A,K_R,K) - i(A,K_r,K) = 1.$$

Следовательно, вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $K_R\backslash\bar{K_r}$, что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) такого, что $r < \|x\|_C < R$. □

В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий выполнение условий теоремы 1.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения

$$x''(t) + \frac{\pi^2}{9}x(t) + \beta\sqrt{\int\limits_0^1 x(s)\,ds} = 0, \qquad 0<t<1, \tag{1.11}$$

$$x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \tag{1.12}$$

где $\beta > 0$.

Здесь, очевидно, $\rho = \pi/3$, $f(t,u) = \beta\sqrt{u}$ и в качестве T взят соответствующий линейный интегральный оператор. В неравенстве (1.5) положим $a(t) = 0$ и $b = \beta$. Выполнение первых двух условий 1 легко видеть. Непосредственно устанавливаем, что $\alpha = 2\pi/(3\sqrt{3}) > 1$. Потребуем теперь выполнения условия 3 теоремы 1

$$\beta\sqrt{ru} > \alpha r, \quad u \in [0, r]. \tag{1.13}$$

Легко видеть, что решением этого неравенства является интервал $\left((\alpha r/\beta)^2, \infty\right)$. В то же время неравенство (1.13) должно быть выполнено для всех $u \in [0, r]$. Отсюда вытекает, что $r < (\beta/\alpha)^2 = 27/(4\pi^2)\beta^2$.

Для нахождения R рассмотрим неравенство (1.9). Несложно проверить, что $\gamma = \sqrt{3}/2$, $H = 0$, $L = 2\sqrt{3}/\pi\beta$. Решением (1.9) в рассматриваемом случае является интервал $\left(12/\pi^2\beta^2, \infty\right)$.

Очевидно, для любых $\beta > 0$ обеспечено условие $0 < r < R$ и, следовательно, в силу теоремы 1 краевая задача (1.11)–(1.12) имеет по меньшей мере бы одно положительное решение такое, что $r < \|x\|_C < R$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена периодическая краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. С помощью специальных топологических средств в полуупорядоченных пространствах получены достаточные условие существования положительного решения. Приведен соответствующий пример, иллюстрирующий выполнение полученных результатов. В дальнешем планируется изучить вопросы единственности положительного решения данной краевой задачи.

Литература [References]

1. Graef, J. R., Kong, L., Wang, H., Existence, multiplicity and dependence on a parameter for a periodic boundary value problem. *J. Differ. Equ.*, 2008, vol. 245, pp. 1185–1197. DOI: 10.1016/j.jde.2008.06.012
2. Jiang, D., Chu, J., O'Regan, D., Agarwal, R. P., Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary value problems with repulsive singular forces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, vol. 286, pp. 563–576. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00493-1
3. Jiang, D., Chu, J., Zhang, M., Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations. *J. Differ. Equ.*, 2005, vol. 211, pp. 282–302. DOI: 10.1016/j.jde.2004.10.031
4. Torres, P. J., Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem. *J. Differ. Equ.*, 2003, vol. 190, pp. 643–662. DOI: 10.1016/S0022-0396(02)00152-3
5. Graef, J. R., Kong, L., Wang, H., A periodic boundary value problem with vanishing Green's function. *Appl. Math. Lett.*, 2008, vol. 21, pp. 176–180. DOI: 10.1016/j.aml.2007.02.019
6. Webb, J., Boundary value problems with vanishing Green's function. *Commun. Appl. Anal.*, 2009, vol. 13, no. 4, pp. 587–596.
7. Ma, R., Nonlinear periodic boundary value problems with sign-changing Green's function. *Electron. Nonlinear Anal.*, 2009, vol. 74, pp. 1714–1720. DOI: 10.1016/j.na.2010.10.043
8. Guo, D., Lakshmikantham, V., *Nonlinear problems in abstract cones.* Academic Press, New York, 1988.
9. Крейн, С. Г., *Функциональный анализ.* Наука, Москва, 1972. [Crane, S.G., *Funktsional'nyy analiz = Functional analysis.* Nauka, Moscow, 1982. (in Russian)]