

УДК 536.2

EDN: ZLIGVC DOI: 10.31429/vestnik-20-1-65-75

Прогнозирование эффективной теплопроводности сферопластиков

И. В. Лавров¹, А. В. Бардушкин¹, А. П. Сычев^{2,3✉}, В. Б. Яковлев¹

¹ Институт нанотехнологий микроэлектроники РАН, ул. Нагатинская, 16а, корп. 11, Москва, 115487, Россия

² Ростовский государственный университет путей сообщения, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2, Ростов-на-Дону, 344038, Россия

³ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

✉ Сычев Александр Павлович; ORCID 0000-0001-6344-108X; e-mail: alekc_sap@mail.ru

Аннотация. Решается задача прогнозирования эффективной теплопроводности образца сферопластика в форме диска с поддерживающимися на противоположных гранях его оснований постоянными значительно различающимися температурами. Предложена двухэтапная схема расчета. Первый этап состоит в вычислении эффективной теплопроводности малой макроскопической области образца, температуру в которой можно считать приближенно равной некоторой средней температуре в этой области. На втором этапе вычисляется эффективная теплопроводность образца референтной среды (такой же формы, как и у исходного образца сферопластика), у которого локальная теплопроводность в каждой точке равна эффективной теплопроводности в соответствующей малой макроскопической области исходного образца сферопластика, содержащей эту точку.

Для модельных сферопластиков (композиции на основе эпоксидной смолы ЭД-20 с аминным отвердителем ПО-300 и сферическими микросферами с оболочкой из боросиликатного стекла, заполненными газообразным азотом) проведены расчеты их эффективной теплопроводности. Численное моделирование учитывало изменение объемной доли микросфер и величины безразмерного структурного параметра, представляющего собой отношение толщины оболочки микросферы к ее радиусу.

Ключевые слова: эффективная теплопроводность, матрица, включение, обобщенное приближение эффективного поля, приближение Максвелла-Гарнетта, приближение самосогласования, сферопластик, микросфера, моделирование.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 122040800154-7.

Цитирование: Лавров И. В., Бардушкин А. В., Сычев А. П., Яковлев В. Б. Прогнозирование эффективной теплопроводности сферопластиков // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 65–75. EDN: ZLIGVC. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-65-75

Поступила 8 марта 2023 г. После доработки 17 марта 2023 г. Принято 23 марта 2023 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Prediction of the Effective Thermal Conductivity of Spheroplastics

I. V. Lavrov¹, A. V. Bardushkin¹, A. P. Sychev^{2,3✉}, V. B. Yakovlev¹

¹ Institute of Nanotechnology Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Nagatinskaya st., 16a, build. 11, Moscow, 115487, Russia

² Rostov State Transport University, Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya Sq., 2, Rostov-on-Don, 344038, Russia

³ Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

✉ Aleksandr P. Sychev; ORCID 0000-0001-6344-108X; e-mail: alekc_sap@mail.ru

Abstract. The paper solves the problem of predicting the effective thermal conductivity of a disk-shaped spheroplastic sample with constant, significantly different temperatures maintained on opposite faces of its bases. A two-stage calculation scheme is proposed. The first stage consists in calculating the effective thermal conductivity of a small macroscopic region of the sample, the temperature in which can be considered approximately equal to some average temperature in this region. At the second stage, the effective thermal

conductivity of the reference medium sample (of the same shape as that of the original spheroplastic sample) is calculated, in which the local thermal conductivity at each point is equal to the effective thermal conductivity in the corresponding small macroscopic region of the original spheroplastic sample containing this point.

Compositions based on epoxy resin ED-20 with amine hardener PO-300 and spherical microspheres with a shell of borosilicate glass filled with gaseous nitrogen are considered.

Model calculations of the effective thermal conductivity of thin layers of a spheroplastic sample at different temperatures and different sizes of microspheres depending on their volume fraction in the material are carried out. The calculations were performed on the basis of the generalized effective-field approximation for a matrix composite with inclusions in the shell. It has been established that with an increase in the volume fraction of microspheres in the material, the thermal conductivity of the spheroplastic layer can either decrease or increase depending on the ratio between the wall thickness and the radius of the microsphere. Numerical simulation of the effective thermal conductivity for a disk-shaped spheroplastic sample at temperatures of 150°C and 25°C applied to its opposite bases has been carried out. The calculations took into account the value of the dimensionless structural parameter, which is the ratio of the microsphere shell thickness to its radius. It is shown that the effective thermal conductivity of a spheroplastic sample significantly depends on the volume fraction of microspheres and the value of the structural parameter. It has been established that an increase in the volume fraction of microspheres, depending on the ratio between their wall thickness and radius, leads to both an increase and a decrease in the thermal conductivity of the epoxy compositions under consideration.

Keywords: effective thermal conductivity, matrix, inclusion, generalized effective-field approximation, Maxwell-Garnett approximation, self-consistency approximation, spheroplastic, microsphere, modeling.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on project No. 122040800154-7.

Cite as: Lavrov, I. V., Bardushkin, A. V., Sychev, A. P., Yakovlev, V. B., Prediction of the effective thermal conductivity of spheroplastics. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 65–75. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-65-75

Received 8 March 2023. Revised 17 March 2023. Accepted 23 March 2023. Published 31 March 2023.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CCBY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

Сферопластиками (или также синтактными материалами) называют композиционные материалы с полимерным или кремнийорганическим связующим и погруженным в него наполнителем в виде полых шаровых включений, называемых микросферами [1–4]. Размер микросфер варьируется от 1 до 500 мкм, хотя для уменьшения удельного веса также могут использоваться и микросферы большего размера — до 40 мм. Стенки микросфер могут быть полимерными, стеклянными, углеродными, керамическими, металлическими [5]. Сферопластики, как правило, имеют низкую плотность, при этом в зависимости от материала стенок микросфер могут обладать достаточно высокой прочностью и низкой теплопроводностью, что оправдывает их использование в качестве теплоизоляционных материалов [2, 6].

Теплопроводящие характеристики сферопластика как неоднородного материала определяются его эффективной теплопроводностью. Как уже упоминалось в работе [7], задача вычисления эффективной теплопроводности неоднородных материалов по сравнению задачами вычисления эффективных электропроводящих и диэлектрических характеристик неоднородных сред имеет существенную особенность, связанную с зависимостью теплопроводящих характеристик компонентов неоднородной среды от температуры как потенциала температурного поля. Это имеет следствием то, что при большой разнице температур на границах образца неоднородной среды различные макроскопические части этого образца имеют существенно различающиеся значения эффективной теплопроводности, несмотря на статистически однородную структуру всей среды. Для таких случаев в [7] было предложено понятие эффективной теплопроводности образца, которая зависит не только от материального состава и структуры неоднородной среды, но и от самого температурного поля $T(\mathbf{r})$, в которое

помещен образец. Тензор \mathbf{k}^* эффективной теплопроводности образца неоднородной среды в [7] определяется с помощью традиционного уравнения

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \mathbf{k}^* \langle \mathbf{H} \rangle, \quad (1)$$

где $\langle \mathbf{H} \rangle$ — средняя по образцу напряженность температурного поля $\mathbf{H} = -\nabla T$; $\langle \mathbf{q} \rangle$ — средний по образцу вектор плотности теплового потока, локально определяющийся законом Фурье

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, T(\mathbf{r})) = \mathbf{k}(\mathbf{r}, T(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $\mathbf{k}(\mathbf{r}, T(\mathbf{r}))$ — тензор теплопроводности данного неоднородного материала в точке \mathbf{r} образца. Его значение является случайной кусочно-непрерывной функцией точки \mathbf{r} , а также функцией температуры, являющейся в стационарном случае также функцией точки.

Заметим, что в настоящей работе в связи с особенностью решаемой задачи используется специальное обозначение \mathbf{H} для напряженности температурного поля, принятое в [8]. В других работах встречаются иные обозначения для напряженности температурного поля, например, в монографии [9] используется обозначение \mathbf{E} , а, например, в монографии [10] вовсе не вводится понятие напряженности температурного поля, вместо этого используется термин «температурный градиент», соответственно этому и закон Фурье записывается в виде $\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla T$.

Для нахождения тензора эффективной теплопроводности образца неоднородной среды при значительной разнице температур на границах образца в [7] предложена процедура, состоящая из двух этапов. На первом этапе производится разбиение всего образца на малые макроскопические области V_i , такие, что температуру во всех точках данной области V_i можно считать приблизительно равной средней температуре $\langle T \rangle_{V_i}$ в этой области. Затем вычисляется эффективная теплопроводность $\mathbf{k}_i^*(\langle T \rangle_{V_i})$ каждой из областей V_i в зависимости от средней температуры в этой области, используя известные методы вычисления эффективных характеристик неоднородной среды с учетом ее структурных особенностей и материального состава; при этом значения теплопроводности компонентов следует брать соответствующими температуре $\langle T \rangle_{V_i}$.

На втором этапе вычисляется эффективная теплопроводность такого же по форме образца референтной среды, у которого локальная теплопроводность $\mathbf{k}^r(\mathbf{r}_i)$ в точке \mathbf{r}_i равна эффективной теплопроводности в некоторой малой макроскопической области V_i исходного образца неоднородной среды, содержащей точку \mathbf{r}_i , т.е.

$$\mathbf{k}^r(\mathbf{r}_i) = \mathbf{k}_i^*(\langle T \rangle_{V_i}). \quad (3)$$

В итоге эффективная теплопроводность всего образца исходной неоднородной среды принимается равной эффективной теплопроводности образца референтной среды, в котором теплопроводность определяется формулой (3). Как уже отмечалось в [7], зависимость локальной теплопроводности референтной среды от точки в случае статистически однородного исходного материала можно считать непрерывной и даже дифференцируемой в силу сглаживающего эффекта усреднения по малой макроскопической области V_i вокруг текущей точки \mathbf{r}_i .

В настоящей работе производится прогнозирование эффективной теплопроводности образца статистически однородного изотропного сфероластика по упомянутой двухэтапной схеме. Образец данного сфероластика, как и в [7], берется в форме диска с поддерживающимися на противоположных гранях его оснований постоянными температурами. Включения в сфероластике (микросферы) считаются сферическими со сферической полостью, заполненной газом, размеры всех микросфер и толщина их стенок предполагаются приблизительно одинаковыми и достаточно малыми, чтобы пренебречь конвективным переносом тепла в них. Поправка к теплопроводности газа в полостях вследствие лучистого переноса тепла в них производится на основе результата, полученного в [11]. Вычисление эффективной теплопроводности сфероластика в малой области с приблизительно одинаковой температурой производится на

основе обобщенного приближения эффективного поля для неоднородных сред с включениями в оболочке [12]. Для нахождения эффективной теплопроводности образца референтной среды используются результаты, полученные в [7].

1. Постановка задачи

Рассмотрим образец объемом V статистически однородного композиционного материала, представляющего собой полимерную матрицу с погруженными в нее микросферами, представляющими собой стеклянную оболочку, внутри которой содержится газ. Пусть все микросферы имеют сферическую форму с радиусом R_1 и толщиной оболочки h ; таким образом, радиус полости внутри микросферы равен $R_2 = R_1 - h$. Также будем считать, что микросферы случайным образом распределены по объему образца. Полная объемная доля f микросфер в материале считается известной. Будем считать, что данный образец имеет форму кругового диска радиусом R и толщиной l . Пусть к границе S данного образца приложено постоянное во времени однородное температурное поле напряженностью \mathbf{H}_0 , при этом на одном основании образца поддерживается температура T_0 (обозначим это основание как S_0), а на другом (обозначим его S_1) — температура T_1 ($T_0 > T_1$). В результате в образце установятся некоторое постоянное температурное поле $T(\mathbf{r})$ и постоянное распределение тепловых потоков, векторы плотности которых \mathbf{q} связаны с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ температурного поля по формуле (2).

Теплопроводность матрицы — скалярная величина с известным законом зависимости от температуры: $k_m = k_m(T)$. Также известными считаются температурные зависимости теплопроводностей оболочек микросфер $k_1 = k_1(T)$ и газа, заполняющего полости внутри микросфер: $k'_2 = k'_2(T)$. Размеры полостей будем считать достаточно малыми, чтобы в данном температурном поле можно было пренебречь конвективным теплопереносом, в частности, чтобы выполнялось условие для числа Грасгофа [2]. Вклад лучистого переноса в сферических полостях в полный теплоперенос в них учитывается в форме эквивалентного коэффициента теплопроводности [2, 11]

$$k''_2(T) = 4\varepsilon\sigma_0 R_2 T^3, \quad (1.1)$$

где ε — коэффициент поглощения материала полости (для абсолютно черного тела $\varepsilon = 1$), $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м \cdot К) — постоянная Стефана–Больцмана, T — среднее значение абсолютной температуры в окрестности полости. При этом предполагается, что в окрестности полости относительное изменение температуры мало [2], а газ, заполняющий полость, является диатермичным, т.е. не излучающим и прозрачным для теплового излучения [2, 13]. Полный коэффициент теплопроводности в полости является суммой коэффициента теплопроводности газа и эквивалентного коэффициента теплопроводности вследствие лучистого переноса тепла

$$k_2(T) = k'_2(T) + k''_2(T).$$

Выберем декартову систему координат xyz следующим образом: ее начало возьмем в центре грани S_0 , ось z направим вдоль оси диска по направлению к грани S_1 , оси x и y направим в плоскости грани S_0 перпендикулярно друг другу. Тогда напряженность \mathbf{H}_0 приложенного температурного поля будет направлена вдоль оси z , т.е. будет в системе координат xyz иметь следующие компоненты: $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$, причем

$$H_0 = (T_0 - T_1)/h. \quad (1.2)$$

Ставится задача найти главную компоненту k_z^* тензора эффективной теплопроводности образца, соответствующую оси z данной системы координат, которая определяется уравнением, являющимся следствием уравнения (1)

$$\langle q \rangle_z = k_z^* \langle H \rangle_z,$$

где $\langle H \rangle_z$ и $\langle q \rangle_z$ — z -компоненты средних по образцу векторов напряженности температурного поля и плотности теплового потока, причем, очевидно, что

$$\langle q \rangle_z = \langle q_z \rangle, \quad \langle H \rangle_z = \langle H_z \rangle.$$

Искомая величина k_z^* будет зависеть как от структуры и материального состава неоднородного материала, так и от значений температуры на гранях S_0 и S_1 , т.е. $k_z^*(T_0, T_1)$.

Вычисление k_z^* будем производить в два этапа: 1) нахождение эффективной теплопроводности $\tilde{k}_z^*(z, T)$ плоского слоя образца толщиной Δz , ограниченного плоскостями, проходящими через точки $(0, 0, z)$ и $(0, 0, z + \Delta z)$ и перпендикулярными оси z , температуру всех точек которого можно считать приблизительно одинаковой и равной $T(z)$; 2) нахождение эффективной теплопроводности всего образца как упорядоченной совокупности плоских тонких слоев с заданными значениями их теплопроводностей.

2. Вычисление эффективной теплопроводности тонкого слоя образца сферопластика с фиксированным значением температуры

Рассмотрим тонкий макроскопический плоский слой данного образца сферопластика, заключенный между плоскостями, проходящими через точки $(0, 0, z)$ и $(0, 0, z + \Delta z)$ и перпендикулярными к оси кругового диска. Поскольку слой тонкий, температуру во всех его точках можно считать примерно одинаковой. Таким образом, коэффициенты теплопроводности матрицы, оболочек микросфер и полный эффективный коэффициент теплопроводности полостей микросфер принимаются равными $k_m(T)$, $k_1(T)$ и $k_2(T)$, где T — температура слоя.

Обобщенное приближение эффективного поля (ОПЭП) для случая матричного композита с включениями в виде одинаковых микросфер дает следующее выражение для эффективной теплопроводности тонкого плоского слоя [14]:

$$k^*(T) = \left[\frac{(1-f)k_m(T)}{2k^c + k_m(T)} + f k_1(T) (2k_1(T) + k_2(T) + 2v(k_2(T) - k_1(T))) \lambda_{20} \right] \times \left[\frac{(1-f)}{2k^c + k_m(T)} + f (2k_1(T) + k_2(T) - v(k_2(T) - k_1(T))) \lambda_{20} \right]^{-1}, \quad (2.1)$$

где

$$\lambda_{20} = [(2k^c + k_1(T))(2k_1(T) + k_2(T)) + 2v(k_1(T) - k^c)(k_2(T) - k_1(T))]^{-1}.$$

Здесь k^c — параметр (теплопроводность) среды сравнения; v — доля полости в полном объеме микросферы.

Выбор значения для параметра k^c среды сравнения в (2.1) обусловлен качественной структурой композита и ее количественными характеристиками. Например, при небольшой полной объемной доле включений ($f \leq 0,3$) целесообразно за параметр среды сравнения взять теплопроводность матрицы, т.е.

$$k^c = k_m, \quad (2.2)$$

в этом случае из выражения (2.1) получим аналог приближения Максвелла–Гарнетта, применяющегося для расчета эффективной диэлектрической проницаемости матричных композитов [15, 16]. При более высокой объемной доле включений и условии, что взаимное расположение компонентов в объеме образца имеет вид статистической смеси, целесообразно использовать идею самосогласования, т.е. принять за параметр среды сравнения саму эффективную теплопроводность тонкого слоя

$$k^c = k^*(T). \quad (2.3)$$

В этом случае (2.1) принимает форму уравнения, которое можно решить, например, методом простых итераций.

Таким образом, эффективная теплопроводность $\tilde{k}_z^*(z, T)$ плоского слоя образца сферопластика между плоскостями, проходящими через точки $(0, 0, z)$ и $(0, 0, z + \Delta z)$ и перпендикулярными к оси кругового диска, с температурой T вычисляется по формуле (2.1), где параметр среды сравнения k^c позволяет дополнительно варьировать тип приближения.

Таблица 1. Температурная зависимость теплопроводности ЭД-20 с аминным отвердителем ПО-300 при 100 %-й конверсии [18]

Table 1. Temperature dependence of thermal conductivity of ED-20 with amine hardener PO-300 at 100 % conversion [18]

$T, ^\circ\text{C}$	25	50	75	100	125	150	175
$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,29

3. Вычисление эффективной теплопроводности образца референтной среды

Рассмотрим образец материала, который назовем референтным по отношению к исходному сферопластику, с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры по такому же закону, как и эффективная теплопроводность данного сферопластика. Форма образца референтной среды — также диск радиусом R и толщиной l . В данном случае равенство (3), связывающее локальную теплопроводность образца референтного материала с эффективной теплопроводностью сферопластика, следует записать в виде

$$k^r(T(z)) = \tilde{k}_z^*(z, T), \quad (3.1)$$

так как теплопроводность референтного материала зависит от температуры, а температура в образце меняется послойно в зависимости от z .

Пусть к образцу референтного материала приложено такое же температурное поле, как и к образцу исходного синтактного материала, т.е.

$$T|_{z=0} = T_0, \quad T|_{z=h} = T_1, \quad T|_{r=R} = T_0 - H_0 z, \quad (3.2)$$

где H_0 определяется выражением (1.2), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, т.е. третье из условий задает распределение температуры на боковой границе диска. Зависимость коэффициента теплопроводности референтного материала от температуры $k^r(T)$ считается известной как результат решения задачи нахождения эффективной теплопроводности тонкого слоя образца сферопластика согласно (3.1). В этом случае для эффективной теплопроводности образца референтной среды получим [7]

$$k^{r*} = \frac{1}{T_0 - T_1} \int_{T_1}^{T_0} k^r(T) dT. \quad (3.3)$$

Таким образом, эффективная теплопроводность исходного образца сферопластика может быть вычислена, используя формулы (3.3), (3.1), где эффективная теплопроводность тонкого слоя изотропного синтактного материала вычисляется по формуле (2.1). Следует заметить, что, согласно (3.3), толщина диска l не влияет на значение эффективной теплопроводности образца (в предположении отсутствия теплообмена на боковой границе).

4. Некоторые результаты модельных расчетов

На основе выражений (2.1)–(2.3) и (3.3) проведены расчеты эффективной теплопроводности образца сферопластика в форме диска с эпоксидным связующим ЭД-20 с аминным отвердителем ПО-300 и микросферами с оболочкой из боросиликатного стекла, заполненными газообразным азотом, в зависимости от объемной доли микросфер. Радиусы микросфер варьировались от 5 до 250 мкм, толщина стенок всех микросфер принималась равной 1 мкм. Значения температуры на противоположных основаниях диска принимались равными $T_0 = 150^\circ\text{C}$ и $T_1 = 25^\circ\text{C}$. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности ЭД-20 и газообразного азота приведены в табл. 1 и 2. Для промежуточных значений температуры проводилась интерполяция табличных значений. Температурная зависимость коэффициента теплопроводности боросиликатного стекла в диапазоне температур от 300 К до 700 К возрастает почти по линейному закону от 1,1 до 1,6 Вт/(м·К) [17].

Таблица 2. Температурная зависимость теплопроводности газообразного азота [19]

Table 2. Temperature dependence of the thermal conductivity of gaseous nitrogen [19]

$T, ^\circ\text{C}$	-73	27	127	327
$k, 10^{-3} \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	18,3	25,7	32,4	44,6

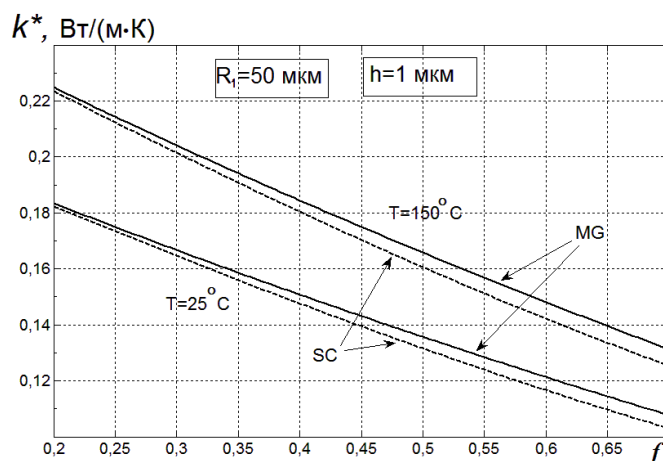


Рис. 1. Зависимости эффективной теплопроводности тонкого слоя сфероластика на основе отвержденной ЭД-20 от объемной доли микросфер при средних температурах слоя $T = 25^\circ\text{C}$ и $T = 150^\circ\text{C}$, полученные по формулам (2.1), (2.2) (MG) или по формулам (2.1), (2.3) (SC). Радиус микросфер 50 мкм, толщина их стенок 1 мкм

Fig. 1. Dependences of the effective thermal conductivity of a thin layer of spheroplast based on cured ED-20 on the volume fraction of microspheres at average layer temperatures $T = 25^\circ\text{C}$ and $T = 150^\circ\text{C}$, obtained by the formulas (2.1), (2.2) (MG) or formulas (2.1), (2.3) (SC). The radius of the microspheres is $50 \mu\text{m}$, the thickness of their walls is $1 \mu\text{m}$

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 1–3.

Приведенные на рис. 1 зависимости показывают, что эффективная теплопроводность слоя сфероластика существенно зависит от его температуры (теплопроводность слоя при 150°C примерно на 20 % превышает его теплопроводность при 25°C). Также данные зависимости показывают, что при повышении объемной доли микросфер теплопроводность сфероластика понижается. Это является естественным следствием значительно более высокой теплопроводности связующего по сравнению с теплопроводностью газа, поскольку при данных параметрах ($R_1 = 50 \mu\text{m}$, $h = 1 \mu\text{m}$), задающих размер микросферы и размер полости в ней, объемная доля оболочки в микросфере намного меньше объемной доли газообразной полости в ней

$$1 - v \approx 0,06 \ll v \approx 0,94.$$

Заметим, что при данном размере полости внутри микросфер и при данных температурах вклад лучистого теплопереноса в полную теплопроводность полости является незначительным. Следует также отметить, что величины теплопроводности слоя, полученные различными вариантами ОПЭП — обобщенным приближением Максвелла–Гарнетта и методом самосогласования — дают относительно близкие значения, особенно при невысоких долях микросфер в материале.

Приведенные на рис. 2 кривые показывают, что при увеличении объемной доли микросфер в материале теплопроводность слоя сфероластика может как уменьшаться, так и увеличиваться в зависимости от соотношения между толщиной стенки и радиусом микросферы. Так, в случае фиксированной толщины стенок микросфер $h = 1 \mu\text{m}$ при величинах радиусов микросфер $R_1 < 10,67 \mu\text{m}$ при увеличении объемной доли микросфер в материале эффектив-

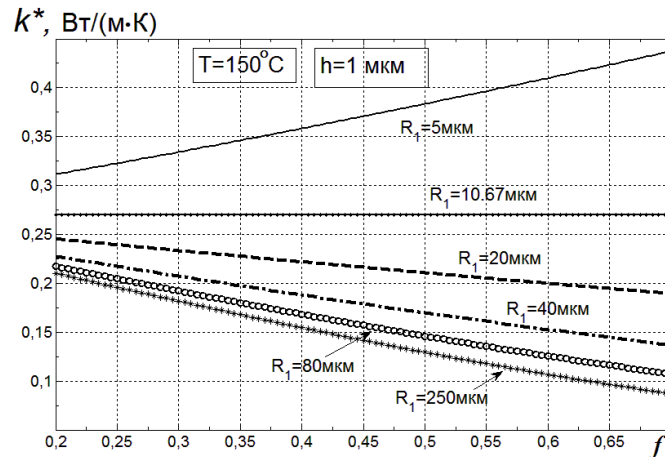


Рис. 2. Зависимости эффективной теплопроводности тонкого слоя сферопластика на основе отвержденной ЭД-20 от объемной доли микросфер при различных величинах радиуса микросфер (указаны рядом с кривыми). Температура слоя $T = 150^\circ\text{C}$, толщина стенок микросфер 1 мкм.

Все кривые получены по формулам (2.1), (2.3) (ОПЭП в варианте самосогласования)

Fig. 2. Dependences of the effective thermal conductivity of a thin layer of spheroplast based on cured ED-20 on the volume fraction of microspheres at different microsphere radii (indicated next to the curves). Layer temperature $T = 150^\circ\text{C}$, microsphere wall thickness 1 μm . All curves were obtained by the formulas (2.1), (2.3) (OPEP in the self-consistency version)

ная теплопроводность слоя, находящегося при температуре $T = 150^\circ\text{C}$, повышается, а при $R_1 > 10,67\ \mu\text{m}$ — понижается, причем тем быстрее, чем больше радиус микросфер. Если же радиус микросфер $R_1 = \tilde{R}_1|_{150^\circ\text{C}} \approx 10,67\ \mu\text{m}$, то изменение их объемной доли в материале не влияет на его теплопроводность. Это объясняется с помощью понятия нейтрального включения [14, 20], которое в случае помещения его в матрицу с однородным полем не вызывает снаружи возмущения этого поля. Условие, при котором возмущенное сферической частицей с оболочкой поле равно нулю, имеет вид [14]

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \frac{(k_m - k_1)(2k_1 + k_2)}{(k_2 - k_1)(2k_1 + k_m)}. \quad (4.1)$$

Для выполнения условия (4.1) существенно то, что теплопроводность оболочки должна быть либо выше теплопроводностей матрицы и газа в полости одновременно, либо ниже их также одновременно. Для данного материала имеет место второй вариант условий.

Интегральные зависимости теплопроводности всего образца сферопластика от объемной доли микросфер при различных величинах радиусов микросфер, которые приведены на рис. 3, имеют вид, аналогичный зависимостям для тонкого слоя сферопластика, находящегося при фиксированной температуре. Только теперь граничная величина радиуса микросфер $R_1 = \tilde{R}_1^{\text{обп}} \approx 12\ \mu\text{m}$, при которой эффективная теплопроводность образца не зависит от доли включений в материале, отличается от аналогичной величины для слоя с фиксированной температурой $\tilde{R}_1|_{150^\circ\text{C}}$. Это объясняется тем, что целый образец состоит из множества слоев, находящихся при различных температурах, а граничное значение радиуса микросферы, определяемое уравнением (4.1), зависит от температуры слоя, поскольку от нее зависят коэффициенты теплопроводности компонентов неоднородного материала. Заметим также, что значения эффективной теплопроводности образца приблизительно равны средним от теплопроводностей слоев, находящихся при максимальной и минимальной температурах, это показывают зависимости, приведенные на рис. 1 и зависимость на рис. 3 для величины радиуса микросфер 50 мкм.

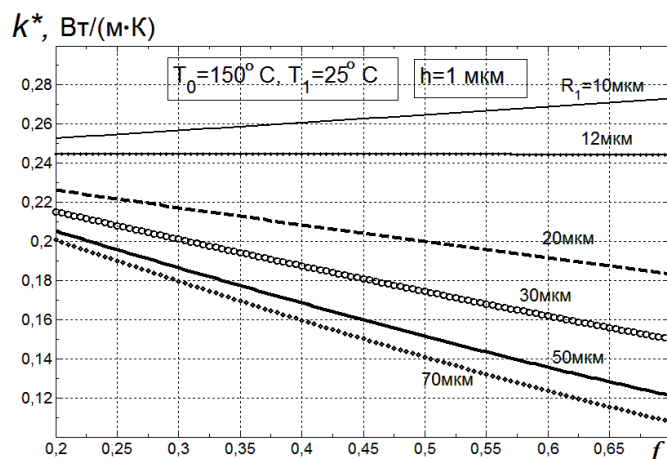


Рис. 3. Зависимости эффективной теплопроводности образца сфероластика в форме диска на основе отвержденной ЭД-20 с микросферами, заполненными газообразным азотом, объемной доли микросфер при различных величинах радиуса микросфер (указаны рядом с кривыми) при приложенных температурах к основаниям $T_0 = 150\text{ }^\circ\text{C}$ и $T_1 = 25\text{ }^\circ\text{C}$. Толщина стенок микросфер 1 мкм. Все кривые получены по формулам (3.3), (2.1), (2.3)

Fig. 3. Dependences of the effective thermal conductivity of a disk-shaped spheroplastic sample based on cured ED-20 with microspheres filled with gaseous nitrogen, the volume fraction of microspheres at different microsphere radius (indicated next to the curves) when temperatures applied to the bases is $T_0 = 150\text{ }^\circ\text{C}$ and $T_1 = 25\text{ }^\circ\text{C}$. The wall thickness of the microspheres is 1 μm . All curves are obtained by the formulas (3.3), (2.1), (2.3)

Результаты модельных расчетов рассматриваемых образцов сфероластиков при $T_0 = 150\text{ }^\circ\text{C}$, $T_1 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ показали, что эффективная теплопроводность существенно зависит от объемной доли микросфер f и соотношения между толщиной их стенок и радиусом h/R_1 (рис. 3). Установлено, что при $h/R_1 > 1/12$ увеличение объемной доли микросфер приводит к увеличению теплопроводности сфероластика. Если же $h/R_1 < 1/12$, то увеличение объемной доли микросфер существенно снижает теплопроводность всего материала.

Заключение

Перечислим основные результаты настоящей работы.

1. Предложенная в [7] двухэтапная схема вычисления эффективной теплопроводности неоднородных сред применена для расчета эффективной теплопроводности образца сфероластика в форме диска с поддерживающимися на противоположных гранях его оснований постоянными значительно различающимися температурами.

2. Проведены модельные расчеты эффективной теплопроводности тонких слоев данного образца при различных температурах и различных размерах микросфер в зависимости от их объемной доли в материале. Вычисления проводились по соотношению (2.1), полученному в работе с использованием метода ОПЭП для матричного композита с включениями в оболочке. Установлено, что при увеличении объемной доли микросфер в материале теплопроводность слоя сфероластика может как уменьшаться, так и увеличиваться в зависимости от соотношения между толщиной стенки и радиусом микросферы.

3. Проведено моделирование эффективной теплопроводности для образца сфероластика в форме диска при приложенных к его противоположным основаниям температурах, равных $150\text{ }^\circ\text{C}$ и $25\text{ }^\circ\text{C}$. Расчеты учитывали величину безразмерного структурного параметра, представляющего собой отношение толщины оболочки микросферы к ее радиусу. Результаты модельных расчетов показали, что эффективная теплопроводность образца сфероластика существенно зависит от объемной доли микросфер, а также от соотношения между радиусом микросфер и толщиной их стенок. При большой относительной толщине стенок микросфер

увеличение их объемной доли приводит к увеличению теплопроводности всего материала. Если же стенки достаточно тонкие, то увеличение объемной доли микросфер существенно снижает теплопроводность сферопластика.

Литература [References]

1. Трофимов, А.Н., *Высокотехнологичные эпоксидные связующие, полимерные композиты и инновационные технологии получения радиопрозрачных изделий специального назначения из конструкционных стеклопластиков*: дисс. д-ра техн. наук, 05.17.06. Москва, 2018. [Trofimov, A.N., *High-tech epoxy binders, polymer composites and innovative technologies for the production of special-purpose radio-transparent products from structural fiberglass*: Diss. Ph.D. in Tech. Sci., 05.17.06. Moscow, 2018. (in Russian)]
2. Зарубин, В.С., Кувыркин, Г.Н., Савельева, И.Ю., Математическая модель теплопереноса в сферопластике. *Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал*, 2016, № 4, с. 42–58. [Zarubin, V.S., Kuvyrkin, G.N., Savel'eva, I.Yu., A Mathematical Model of Heat Transfer in Spheroplastic. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye. MGTU im. N.E. Baumana. Elektronnyy zhurnal = Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU*, 2016, no. 4, pp. 42–58. (in Russian)] EDN: [XKOKMZ DOI: 10.7463/mathm.0416.0846276](#)
3. Чухланов, В.Ю., Селиванов, О.Г., Исследование диэлектрических свойств синтактических пен на основе кремнийорганического связующего. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 2014, № 8, с. 26–29. [Chukhlanov, V.Yu., Selivanov, O.G., Investigation of the dielectric properties of syntactic foams based on an organosilicon binder. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy = International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2014, no. 8, pp. 26–29. (in Russian)] EDN: [SFWCBB](#)
4. Михайлов, В.А., Синтактные материалы с высокими диэлектрическими свойствами на основе кремнийорганического полимера. *Успехи современного естествознания*, 2015, № 12, с. 47–50. [Mikhailov, V.A., Syntactic materials with high dielectric properties based on organosilicon polymer. *Uspekhi sovremennogo yestestvoznaniya = Successes of Modern Natural Science*, 2015, no. 12, pp. 47–50. (in Russian)] EDN: [VLCYLF](#)
5. Чухланов, В.Ю., Панов, Ю.Т., Синявин, А.В., Ермолаева, Е.В., *Газонаполненные пластмассы*. Изд-во Владимирского государственного университета, Владимир, 2008. [Chukhlanov V.Yu., Panov, Yu.T., Sinyavin, A.V., Ermolaeva, E.V., *Gazonapolnennyye plastmassy = Gas-filled plastics*. Vladimir State University Publ., Vladimir, 2008. (in Russian)]
6. Яковенко, Т.В., Яруллина, Г.К., Гарустович, И.В., Шишилов, О.Н., Мельников, Н.О., Сферопластики как термоизолирующие защитные материалы промышленного назначения. *Успехи в химии и химической технологии*, 2016, т. XXX, № 8, с. 71–73. [Yakovenko, T.V., Yarullina, G.K., Garustovich, I.V., Shishilov, O.N., Melnikov, N.O., Spheroplastics as thermally insulating protective materials for industrial use. *Uspekhi v khimii i khimicheskoy tekhnologii = Advances in Chemistry and Chemical Technology*, 2016, vol. XXX, no. 8, pp. 71–73. (in Russian)] EDN: [XEBLUF](#)
7. Лавров, И.В., Бардушкин, В.В., Яковлев, В.Б., Бардушкин, А.В., Прогнозирование эффективной теплопроводности пенополимерных материалов. *Тепловые процессы в технике*, 2022, т. 14, № 7, с. 290–300. [Lavrov, I.V., Bardushkin, V.V., Yakovlev, V.B., Bardushkin, A.V., Predicting the effective thermal conductivity of foam-polymer materials. *Teplovyye protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*, 2022, vol. 14, no. 7, pp. 290–300. (in Russian)] EDN: [JNPDTU DOI: 10.34759/tpt-2022-14-7-290-300](#)
8. Benveniste, Y., On the effective thermal conductivity of multiphase composites. *J. of Applied Mathematics and Physics*, 1986, vol. 37, pp. 696–713.
9. Лыков, А.В., *Теория теплопроводности*. Высшая школа, Москва, 1967. [Lykov, A.V., *Teoriya teploprovodnosti = Theory of thermal conductivity*. Vysshaya shkola, Moscow, 1967. (in Russian)]
10. Карташов, Э.М., Кудинов, В.А., *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений*. ЛЕНАНД, Москва, 2018. [Kartashov, E.M., Kudinov, V.A., *Analiticheskiye metody teorii teploprovodnosti i yeye prilozheniy = Analytical Methods of the Theory of Heat Conduction and its Applications*. LENAND, Moscow, 2018. (in Russian)]
11. Зарубин, В.С., Кувыркин, Г.Н., Савельева, И.Ю., Радиационно-кондуктивный теплоперенос в шаровой полости. *Теплофизика высоких температур*, 2015, т. 53, № 2, с. 243–249. EDN: [TLOTNN DOI: 10.7868/S0040364415020246](#) [Zarubin, V.S., Kuvyrkin, G.N., Savel'eva, I.Yu., The radiation-

- conductive heat transfer in a spherical cavity. *Teplofizika vysokikh temperature = High Temperature*, 2015, vol. 53, no. 2, pp. 234–239. DOI: [10.1134/S0018151X15020248](https://doi.org/10.1134/S0018151X15020248)]
12. Колесников, В.И., Бардушкин, В.В., Лавров, И.В., Сычев, А.П., Яковлев, В.Б., Обобщённое приближение эффективного поля для неоднородной среды с включениями в оболочке. *Доклады Академии наук*, 2017, т. 476, № 3, с. 280–284. EDN: ZEIMPF DOI: [10.7868/S0869565217270081](https://doi.org/10.7868/S0869565217270081) [Kolesnikov, V.I., Bardushkin, V.V., Lavrov, I.V., Sychev, A.P., Yakovlev, V.B., A Generalized Effective-Field Approximation for an Inhomogeneous Medium with Coated Inclusions. *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 9, pp. 415–419. DOI: [10.1134/S1028335817090087](https://doi.org/10.1134/S1028335817090087)]
 13. Зигель, Р., Хауэлл, Дж., *Теплообмен излучением*. Мир, Москва, 1975. [Siegel, R., Howell, J.R., *Thermal Radiation Heat Transfer*. New Jourk a. o., 1972.]
 14. Лавров, И.В., Бардушкин, В.В., Сычев, А.П., Яковлев, В.Б., Кочетыгов, А.А., Прогнозирование эффективной теплопроводности трибокомпозигов с антифрикционными включениями в оболочке. *Вестник машиностроения*, 2018, № 11, с. 53–57. EDN: VNBTQO [Lavrov, I.V., Bardushkin, V.V., Sychev, A.P., Yakovlev, V.B., Kochetygov, A.A., Predicting the Effective Thermal Conductivity of Tribocomposites with Coated Antifrictional Inclusions. *Russian Engineering Research*, 2019, vol. 39, no. 2. pp. 117–121. DOI: [10.3103/S1068798X19020217](https://doi.org/10.3103/S1068798X19020217)]
 15. Garnett, J.C.M., Colours in metal glasses and in metallic films. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1904, vol. 203, pp. 385–420.
 16. Колесников, В.И., Лавров, И.В., Бардушкин, В.В., Сычев, А.П., Яковлев, В.Б., Обобщенное приближение Максвелла Гарнетта для текстурированных матричных композитов с включениями в оболочке. *Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки*, 2021, т. 498, с. 11–16. EDN: JZRFZH DOI: [10.31857/S268674002103010X](https://doi.org/10.31857/S268674002103010X) [Kolesnikov, V.I., Lavrov, I.V., Bardushkin, V.V., Sychev, A.P., Yakovlev, V.B., The Generalized Maxwell Garnett Approximation for Textured Matrix Composites with Coated Inclusions. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, no. 5, pp. 123–128. DOI: [10.1134/S1028335821050049](https://doi.org/10.1134/S1028335821050049)]
 17. Применко, В.И., Влияние состава на теплопроводность стекла. *Вопросы химии и химической технологии*. Изд-во Харьковского университета, Харьков, 1981, вып. 62, с. 72–74. [Primenko, V.I., Influence of the composition on the thermal conductivity of glass. *Voprosy khimii i khimicheskoy tekhnologii = Questions of chemistry and chemical technology*. Kharkov University Publ., Kharkov, 1981, iss. 62, pp. 72–74. (in Russian)]
 18. Чэнь, Я., Мараховский, П.С., Мальшева, Г.В., Определение теплофизических свойств эпоксидных материалов в процессе их отверждения. *Труды ВИАМ*, 2018, № 9 (69), с. 119–123. [Chen, Ya., Marakhovsky, P.S., Malysheva, G.V., Determination of thermophysical properties of epoxy materials during their curing. *Trudy VIAM = Proceedings of VIAM*, 2018, no. 9 (69), pp. 119–123. (in Russian)] EDN: YAKSVN DOI: [10.18577/2307-6046-2018-0-9-119-123](https://doi.org/10.18577/2307-6046-2018-0-9-119-123)
 19. Григорьева, И.С., Мейлихова, Е.З. (под ред.), *Физические величины: Справочник*. Энергоатомиздат, Москва, 1991. [Grigor'ev, I.S., Meilikhov, E.Z. (eds.), *Physical Quantities: A Handbook*. Energoatomizdat, Moscow, 1991. (in Russian)]
 20. Milton, G. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.