

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-20-2-6-17

Исследование равновесия анизотропного цилиндрического тела методом граничных состояний

Д. А. Иванычев  

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: ivanychev_da@stu.lipetsk.ru

Аннотация. В работе представлена модель построения упругих полей для анизотропного цилиндрического тела конечной или бесконечной длины. Цилиндр находится в равновесии под действием сил, приложенных к его боковой и торцовым поверхностям. Материал цилиндра обладает прямолинейной анизотропией общего вида. Модель строится на основе энергетического метода граничных состояний. Базис пространства внутренних состояний формируется согласно фундаментальной системе многочленов Вейерштрасса. Механические характеристики раскладываются в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса, где в качестве коэффициентов выступают скалярные произведения, имеющие энергетический смысл. Приведено решение краевой задачи теории упругости для цилиндра нетривиальной в плане формы из гипотетического анизотропного материала. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задач, результат представлен в графическом виде.

Ключевые слова: метод граничных состояний, прямолинейная анизотропия, сложное сопротивление, задача Сен-Венана.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Иванычев Д. А. Исследование равновесия анизотропного цилиндрического тела методом граничных состояний // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 2. С. 6–17. DOI: 10.31429/vestnik-20-2-6-17

Поступила 27 апреля 2023 г. После доработки 8 мая 2023 г. Принято 9 июня 2023 г. Публикация 28 июня 2023 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Investigation of the Equilibrium of an Anisotropic Cylindrical Body by the Method of Boundary States

D. A. Ivanychev  

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: ivanychev_da@stu.lipetsk.ru

Abstract. The paper presents a model for constructing elastic fields for an anisotropic cylindrical body of finite or infinite length. The cylinder is in equilibrium under the action of forces applied to its side and end surfaces. The material of the cylinder has a rectilinear anisotropy of the general form. The model is based on the energy method of boundary states. The basis of the space of internal states is formed according to the fundamental system of Weierstrass polynomials. The mechanical characteristics are expanded in a Fourier series in terms of the elements of an orthonormal basis, where the coefficients are scalar products that have an energy meaning. The solution of the boundary value problem of the theory of elasticity for a cylinder of a non-trivial shape from a hypothetical anisotropic material is presented. Explicit and indirect signs of convergence of the solution of problems are presented and the result is presented in graphical form.

Keywords: boundary state method, rectilinear anisotropy, complex resistance, Saint-Venant problem.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Ivanychev, D. A., Investigation of the equilibrium of an anisotropic cylindrical body by the method of boundary states. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 6–17. DOI: 10.31429/vestnik-20-2-6-17

Received 27 April 2023. Revised 8 May 2023. Accepted 9 June 2023. Published 28 June 2023.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

В механике деформированного твердого тела определение характеристик напряженно-деформированного состояния стержня при его одновременном кручении, изгибе и растяжении составляет сложную задачу даже для изотропного тела, так как имеет место несимметричное распределение напряжений, депланация поперечных сечений и т.д. Теория изгиба анизотропных стержней с разной степенью анизотропии изучена в полной мере. В настоящее время ведутся исследования в области решения задач теории упругости для слоистых, неоднородных, пластических сред, а также сред с анизотропией сложного вида. Например, в работе [1] рассматривается не прямолинейная, а ромбоэдрическая цилиндрическая анизотропия. Методом однородных решений строится решение задач Сен-Венана кручения и растяжения для кругового цилиндра. В работе показано, что для данного типа анизотропии крутильная деформация сопровождается продольной, в то же время растяжение не сопровождается кручением. Работа [2] посвящена исследованию пространственного напряженно-деформированного состояния трехслойной балки двутаврового сечения на основе GN-теории изгиба слоистых балок. Исследование кручения многослойного призматического стержня из ортотропных слоев проводилось в работе [3]. Граничные условия задавались на торцах тела и приводили к осевой силе, скручивающему и изгибающим моментам. Выполнен анализ распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях многослойного анизотропного стержня. В работе [4] рассматривались формы равновесия трехмерных областей, заполненных неоднородным анизотропным упругим материалом. Проведен асимптотический анализ задач о деформации тонких упругих анизотропных неоднородных пластин и стержней. В работе [5] метод жестких функций применен для определения напряженно-деформированного состояния многослойных анизотропных стержней и плит в постановке Сен-Венана. Показаны преимущества метода по сравнению с классическими методами расчета пластин и стержней. В работе [6] предложена простейшая теория для неоднородного анизотропного стержня, находящегося в равновесии под действием объемных и поверхностных сил. Теория основана на гипотезе плоских сечений и на гипотезе о независимости деформирования продольных волокон тела. Построению итерационной теории расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля посвящена работа [7]. Теория основана на способе последовательного удовлетворения условиям равновесия и совместности деформаций. Решена задача кручения для стержня, составленного из анизотропных пластин. В работе [8] рассмотрено развитие вариационных подходов к решению задач изгиба балок. Использовались критерии критических уровней внутренней энергии деформации, развиваемые авторами. В работе [9] теория переменного нагружения Москвитина применена к задачам переменного изгиба трехслойных упругопластических стержней прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем, находящимся в нейтронном потоке. Проведен численный анализ при различных видах распределения нагрузки. Исследованию собственных затухающих колебаний анизотропных коробчатых стержней из композиционных материалов посвящена работа [10]. Исследуются формы колебаний при различном виде расположения армирующих волокон.

Метод граничных состояний в решении задач сложного сопротивления для анизотропных стержней применялся в работе [11]. Решению задачи Сен-Венана для анизотропных протяженных стержней с продольными круговыми вырезами посвящена работа [12]. Более общая теория решения задачи Сен-Венана для анизотропного цилиндрического тела изложена в работе [13].

Целью настоящей работы является построение аналитического решения обобщенной задачи Сен-Венана для анизотропных протяженных тел, ограниченных цилиндрической поверхностью. Ее достижению отвечает система взаимосвязанных процедур: постановка задачи о равновесии, обезразмеривание геометрических и физических характеристик тела, выбор метода решения, верификация полученных упругих полей, графическая иллюстрация результата.

1. Постановка задачи

Рассматривается равновесие конечного анизотропного тела, ограниченного, в общем случае некруговой, цилиндрической поверхностью. Ось анизотропии анизотропного тела совпадает с геометрической осью z декартовой системы координат, проходящей через центр тяжести

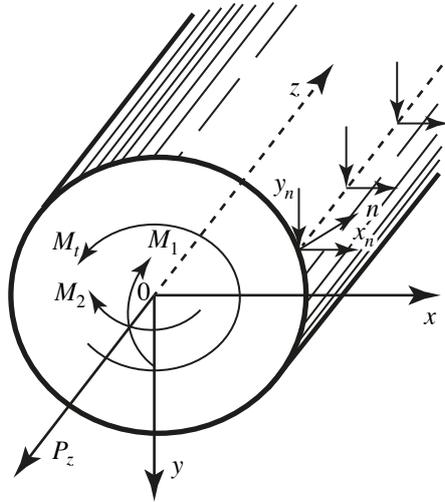


Рис. 1. Протяженный цилиндр

Fig. 1. Extended cylinder

поперечного сечения (рис. 1). На боковой поверхности цилиндра заданы распределенные силы, не меняющиеся вдоль образующей; на торцевых заданы усилия, приводящие к растягивающим или сжимающим силам, а также к скручивающим и изгибающим моментам. Массовые силы отсутствуют. Область тела не имеет вырезов и пустот. Материал однороден.

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле под действием приложенной нагрузки.

2. Дифференциальные и интегральные соотношения для анизотропной среды

Уравнения равновесия [14]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Обобщенный закон Гука (с очевидными сокращениями) [15]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy}; \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Соотношения Коши [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия на торцах цилиндрического тела [15]:

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_{xz} dx dy = 0; \quad \iint_S \sigma_{zy} dx dy = M_1; \quad \iint_S \tau_{yz} dx dy = 0; \quad \iint_S \sigma_z x dx dy = M_2; \\ \iint_S \sigma_z dx dy = P_z; \quad \iint_S (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy = M_t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора перемещения; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}$ — компоненты тензора деформаций; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений; a_{ij} — константы деформации материала, причем $a_{ij} = a_{ji}$; S — область поперечного сечения цилиндрического тела; P_z — осевая сила, M_1, M_2 — изгибающие моменты, M_t — скручивающий момент, к которым приведут усилия на торцах (рис. 1).

3. Метод решения

Для построения решения используется энергетический метод граничных состояний (МГС). Фундамент метода граничных состояний [16] составляют понятия пространств внутренних Ξ и граничных Γ состояний

$$\Xi = \{\xi_k\}_N; \quad \Gamma = \{\gamma_k\}_N,$$

где ξ_k, γ_k — базисные элементы в этих пространствах, $k = 1, 2, \dots, N$; N — число базисных элементов.

Каждый элемент ξ_k в пространстве внутренних состояний Ξ представляет собой допустимое внутреннее состояние

$$\xi_k = \{\mathbf{u}^k, \hat{\varepsilon}^k, \hat{\sigma}^k\}$$

(в правой части выражения индекс k помещен наверх).

В пространстве граничных состояний каждый элемент γ_k представляет собой определенное граничное состояние, которое соответствует элементу ξ_k ,

$$\gamma_k = \{\mathbf{u}_s^k, \mathbf{p}^k\},$$

где $\mathbf{u}_s^k = \{u_s^k, v_s^k, w_s^k\}$ — вектор перемещения точек границы; $\mathbf{p}^k = \{p_r^k, v_\theta^k, p_z^k\}$ — вектор усилия на границе.

Скалярное произведение в пространстве Ξ можно определить с помощью выражения для внутренней энергии упругого деформирования (например, для 1-го и 2-го состояний):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \hat{\varepsilon}^1 \hat{\sigma}^2 dV,$$

где V — область тела.

Скалярное произведение в пространстве Γ можно определить через работу поверхностных сил на перемещениях точек границы

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_S \mathbf{p}^1 \mathbf{u}_s^2 dS,$$

где S — поверхность тела.

Пространства внутренних и граничных состояний обладают свойством изоморфизма. Каждый элемент одного пространства взаимно однозначно соответствует элементу второго пространства. Данное свойство позволяет изучение внутреннего состояния свести к изучению состояния на границе тела.

После построения базиса внутренних состояний и его ортонормирования [17], проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего $\xi = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$ и граничного $\gamma = \{\mathbf{u}_s, \mathbf{p}\}$ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k; \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{\mathbf{u}}^k; \quad \hat{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{\sigma}^k; \quad \hat{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{\varepsilon}^k; \quad \mathbf{u}_s = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{u}_s^k; \quad \mathbf{p} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{p}^k.$$

В случае первой основной задачи, в которой заданы усилия на границе тела, коэффициенты Фурье c_k определяются из выражения

$$c_k = \int_S \mathbf{p}_v \mathbf{u}_s^k dS, \quad (3.2)$$

где \mathbf{u}_s^k — вектор перемещения в k -ом базисном элементе базиса граничных состояний.

4. Общее решение задачи

С.Г. Лехницким [15] получено общее решение задачи об упругом равновесии однородного цилиндрического анизотропного тела под действием усилий, распределенных равномерно по боковой поверхности тела. На торцах цилиндра действуют усилия, приводящиеся к осевым силам, скручивающим и изгибающим моментам. Данная задача интерпретируется как обобщенная задача Сен-Венана. Область поперечного сечения может быть конечной или бесконечной, односвязной или многосвязной; протяженность тела может быть конечной или бесконечной.

Общее решение при отсутствии объемных сил, выражающее компоненты вектора перемещений и тензора напряжений через три комплексных потенциала Лехницкого, имеет вид

$$\begin{aligned} u &= -\frac{A}{2}z^2 - \vartheta yz + U; \quad U = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k) + U_0 \right]; \\ v &= -\frac{B}{2}z^2 - \vartheta xz + V; \quad V = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k) + V_0 \right]; \\ w &= (Ax + By + C)z + W; \quad W = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k(z_k) + W_0 \right]; \\ \sigma_x &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3^2 \lambda_3 \Phi_3'(z_3)]; \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) + \lambda_3 \Phi_3'(z_3)]; \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'(z_3)]; \\ \tau_{yz} &= -2 \operatorname{Re}[\lambda_1 \Phi_1'(z_1) + \lambda_2 \Phi_2'(z_2) + \Phi_3'(z_3)] - \frac{\partial \psi_0}{\partial x}; \\ \tau_{xz} &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \lambda_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \lambda_2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3 \Phi_3'(z_3)] + \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \\ \tau_{zx} &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \lambda_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \lambda_2 \Phi_2'(z_2) + \mu_3 \Phi_3'(z_3)] + \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \\ \sigma_z &= \frac{1}{a_{33}}(Ax + By + C) - \frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} p_k &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k + \lambda_k(\beta_{15}\mu_k - \beta_{14}); \\ q_k &= \beta_{12}\mu_k - \beta_{26} + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} + \lambda_k \left(\beta_{25}\mu_k - \frac{\beta_{24}}{\mu_k} \right); \\ r_k &= \beta_{14}\mu_k - \beta_{46} + \frac{\beta_{24}}{\mu_k} + \lambda_k \left(\beta_{45}\mu_k - \frac{\beta_{44}}{\mu_k} \right); \\ &(k = 1, 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_3 &= \lambda_3 (\beta_{11}\mu_3^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_3) + \beta_{15}\mu_3 - \beta_{14}; \\
 q_3 &= \lambda_3 \left(\beta_{12}\mu_3 + \frac{\beta_{22}}{\mu_3} - \beta_{26} \right) + \beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_3}; \\
 r_3 &= \lambda_3 \left(\beta_{14}\mu_3 + \frac{\beta_{24}}{\mu_3} - \beta_{46} \right) + \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_3},
 \end{aligned}$$

$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}$ ($i, j = 1, 2, 4, 5, 6$) — приведенные коэффициенты деформации, ψ_0 — частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений, U_0, V_0, W_0 — частные решения дифференциальных уравнений [15], соответствующие ψ_0 ;

$$\psi_0 = \frac{-2\vartheta + (Aa_{34} - Ba_{35}) (\beta_{55}x^2 + 2\beta_{45}xy + \beta_{44}y^2)}{4a_{33} (\beta_{44}\beta_{55} - \beta_{45}^2)}.$$

Постоянные A, B, C, ϑ определяются из условий равновесия на торцах:

$$\begin{aligned}
 CS - \iint (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}) dx dy &= P_z a_{33}; \\
 BI_1 - \iint (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy} + a_{35}\tau_{xz}) y dx dy &= M_1 a_{33}; \\
 AI_2 - \iint (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy} + a_{34}\tau_{yz}) x dx dy &= M_2 a_{33}; \\
 \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy &= M_t.
 \end{aligned}$$

Здесь I_1, I_2 — главные моменты инерции поперечного сечения (относительно осей x и y); z_1, z_2, z_3 — обобщенные комплексные переменные: $z_1 = x + \mu_1 y, z_2 = x + \mu_2 y, z_3 = x + \mu_3 y$; μ_1, μ_2, μ_3 — различные комплексные корни характеристического уравнения [15];

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(z_1) &= \frac{dF_1}{dz_1}; & \Phi_2(z_2) &= \frac{dF_2}{dz_2}; & \Phi_3(z_3) &= \frac{dF_3}{dz_3}; \\
 \Phi_1'(z_1) &= \frac{d\Phi_1}{dz_1}; & \Phi_2'(z_2) &= \frac{d\Phi_2}{dz_2}; & \Phi_3'(z_3) &= \frac{d\Phi_3}{dz_3}; \\
 F &= 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3)]; \\
 \psi &= 2 \operatorname{Re} \left[\lambda_1 F_1'(z_1) + \lambda_2 F_2'(z_2) + \frac{1}{\lambda_3} F_3'(z_3) \right],
 \end{aligned}$$

где F и ψ — функции напряжений.

Три комплексные переменные z_1, z_2, z_3 сопряжены аффинными преобразованиями с учетом отсутствия жесткого поворота сечения.

5. Базис внутренних состояний

Главной особенностью метода граничных состояний является выбор способа конструирования счетного базиса внутренних состояний. Для формирования базиса используются общие или частные решения задач теории упругости, также допустимо использовать фундаментальное решение для среды.

Базисные элементы пространства внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для трех потенциалов Лехницкого (4.1). Для ограниченного односвязного сечения можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_1(z_1) \\ \Phi_2(z_2) \\ \Phi_3(z_3) \end{matrix} \right\| \in \left\{ \left\| \begin{matrix} z_1^k \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ z_2^k \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ z_3^k \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} iz_1^k \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ iz_2^k \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ iz_3^k \end{matrix} \right\|, \dots \right\}, \tag{5.1}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Придавая трем аналитическим функциям последовательно значения (5.1), вычисляются все компоненты упругого состояния, формируя тем самым базис Ξ .

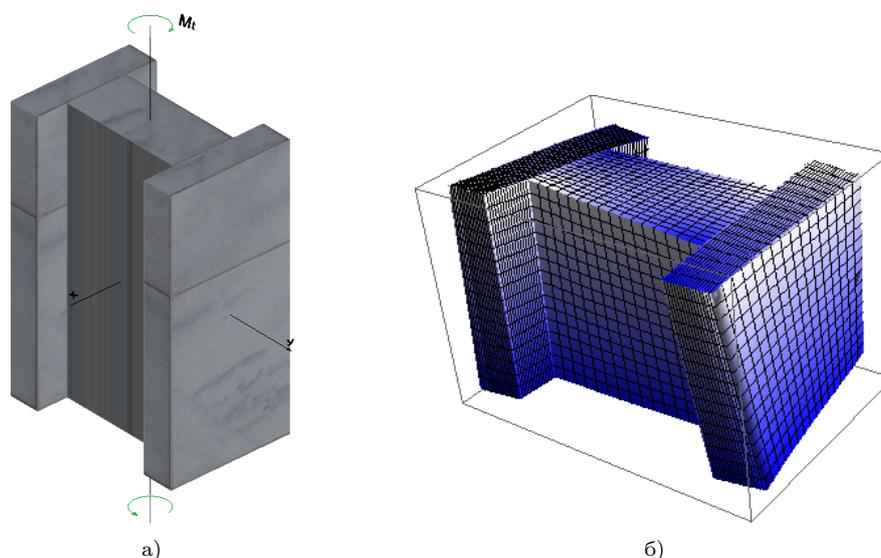


Рис. 2. Граничные условия и контур деформированного тела

Fig. 2. Boundary conditions and the contour of a deformed body

6. Решение задачи

Рассмотрим частную задачу кручения анизотропного цилиндра, поперечное сечение которого задано в форме двутавра (рис. 2). Предполагается самый общий случай анизотропии, когда число технических констант материала равно 21. Область тела: $D = D_1 + D_2 + D_3$,

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid -1,5 \leq x \leq -0,5, -1 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2\};$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid -0,5 \leq x \leq 0,5, -1,5 \leq y \leq 1,5, -2 \leq z \leq 2\};$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \mid 0,5 \leq x \leq 1,5, -1 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}.$$

На торцах заданы усилия

$$\begin{cases} p_x = -y; p_y = x; p_z = 0; z = -2; \\ p_x = y; p_y = -x; p_z = 0; z = 2. \end{cases}$$

На боковой поверхности усилия отсутствуют.

После построения базиса внутренних состояний согласно (3.2), проводится его ортонормирование. Ниже приведены выражения (с округлением) для трех компонент вектора перемещения первого базисного элемента ортонормированного базиса внутренних состояний

$$u = [-387,693x - 36,884x^2 + 123,476xy + 65,5468y^2 + 879yz + 16,954z^2] \cdot 10^{-5};$$

$$v = [718,341x - 78,966x^2 + 1421,426xy + 27,606y^2 - 879xz - 14,784z^2] \cdot 10^{-5};$$

$$w = [78,07x - x^2 - 138,05y - 0,52xy + 1,21y^2 - 186,7z - 33,9xz + 29,57yz] \cdot 10^{-5}.$$

На данном этапе формируется пространство граничных состояний Γ и вычисляются коэффициенты Фурье (3.2). Окончательно искомые поля механических характеристик восстанавливаются по зависимостям (3.1).

Задача решена приближенно, использовались 240 элементов ортонормированного базиса. Полученные характеристики упругого поля строго удовлетворяют соотношениям (2.1)–(2.4). На рис. 2 справа представлен контур тела в деформированном состоянии (в силу малости деформаций, контур представлен в увеличенном масштабе).

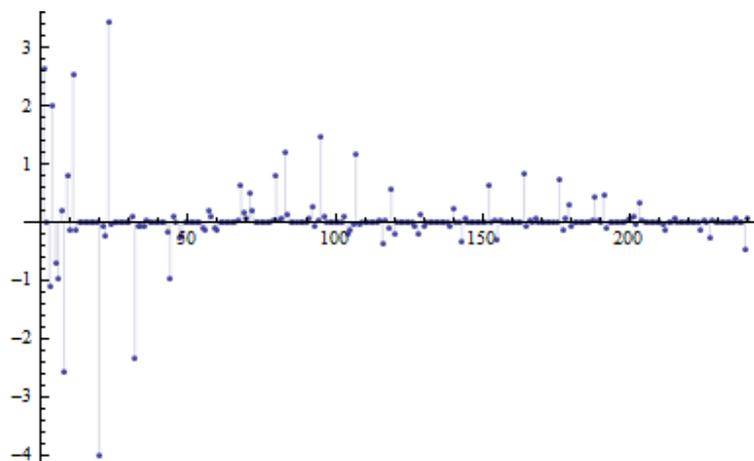


Рис. 3. Значения коэффициентов Фурье

Fig. 3. Fourier coefficient values

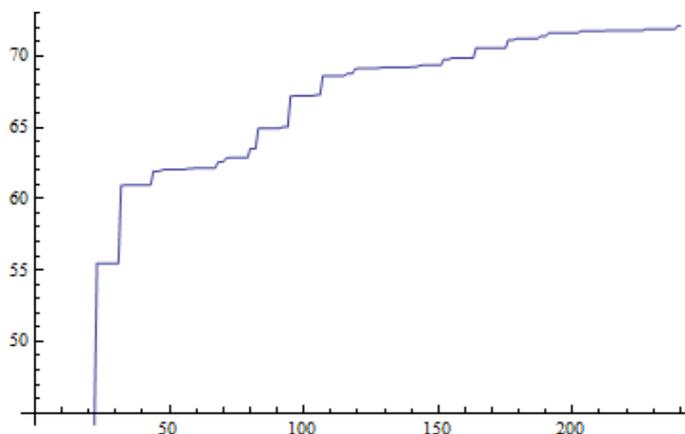


Рис. 4. Сумма Бесселя

Fig. 4. Bessel sum

Сложность задачи заключается во временных затратах на процесс ортонормирования базиса внутренних состояний и на вычисление коэффициентов Фурье, значения которых в графическом виде приведены на рис. 3.

На рис. 4 представлен график насыщения суммы Бесселя $\sum_1^{240} c_j^2$, которая является косвенным признаком сходимости решения.

На рис. 5 представлены изолинии компонент тензора напряжений на торцовой поверхности $z = 2$.

На рис. 6 представлены изолинии компонент вектора перемещения для того же сечения.

Интегральное значение заданного крутящего момента — 74,667, полученного в результате решения — 74,693. Погрешность вычислений по интегральной оценке составила 3 %. Данная погрешность преодолевается путем увеличения числа используемых элементов ортонормированного базиса.

Выводы

Метод граничных состояний успешно реализован в части решения задачи кручения анизотропных цилиндрических тел; решение сводится к рутинному вычислению определенных

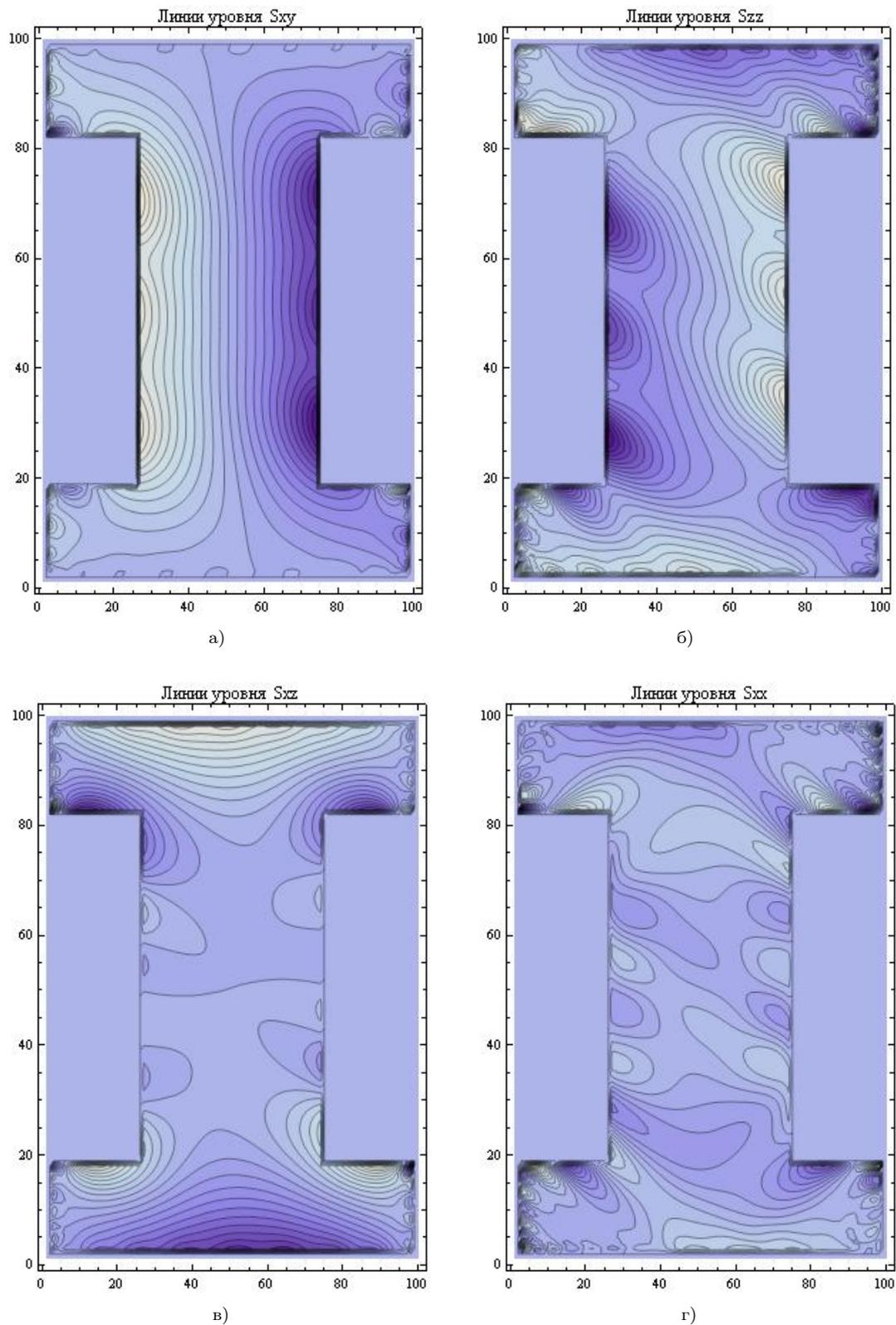


Рис. 5. Компоненты тензора напряжений: а – τ_{xy} , б – σ_z , в – τ_{xz} , г – σ_x

Fig. 5. Stress tensor components: a – τ_{xy} , б – σ_z , в – τ_{xz} , г – σ_x

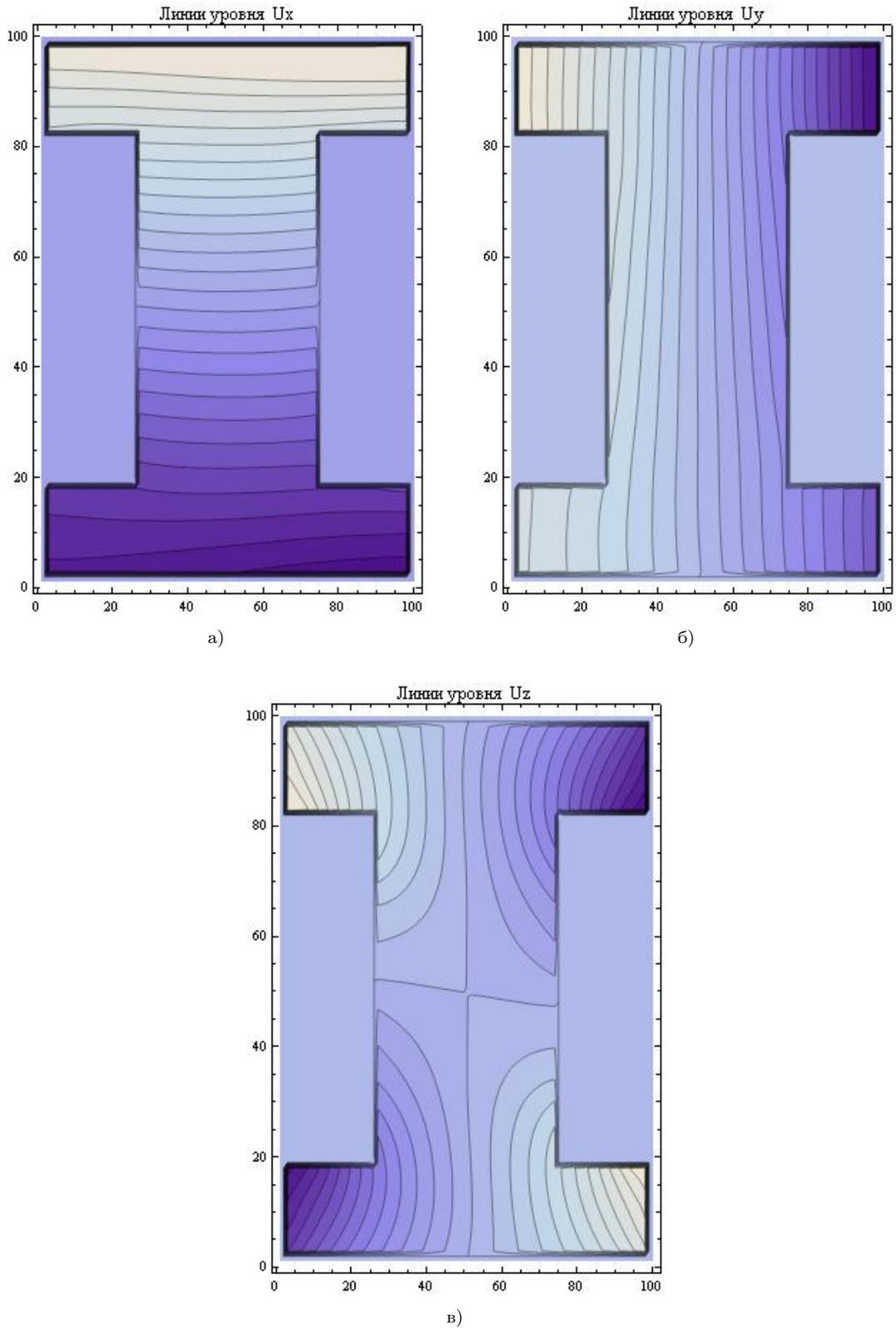


Рис. 6. Компоненты вектора перемещения: а – u , б – v , в – w

Fig. 6. Displacement vector components: а – u , б – v , в – w

интегралов. Построено конкретное решение задачи кручения для тела сложного контура. При решении данных задач требуется достаточно «длинный» отрезок базиса.

Следует отметить, что сингулярность геометрии тела не сказывается на сходимости решения задач кручения, изгиба и растяжения стержней. Однако, если на боковой поверхности будут заданы усилия, то сингулярные точки в геометрии поперечного сечения цилиндрического тела будут оказывать сильное негативное влияние на сходимость рядов вблизи этих точек.

Полученное решение имеет аналитический вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния деталей, применяемых в машиностроении.

Литература [References]

1. Устинов, Ю.А., Две задачи Сен-Венана для кругового анизотропного цилиндра. *Вестник СПбГУ. Сер. 1*, 2011, вып. 1, с. 76–81. [Ustinov, Yu.A., Two Saint-Venant problems for a circular anisotropic cylinder. *Vestnik SPbGU = Bulletin of St. Petersburg State University. Ser. 1*, 2011, iss. 1, pp. 76–81. (in Russian)]
2. Горынин, Г.Л., Горынина, О.Г., Исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойного двутавра в пространственной постановке. *Вестник СибАДИ*, 2012, вып. 5 (27), с. 49–54. [Gorynin, G.L., Gorynina, O.G., Study of the stress-strain state of a three-layer I-beam in a spatial formulation. *Vestnik SibADI = The Russian Automobile and Highway Industry Journal*, 2012, iss. 5, pp. 49–54. (in Russian)]
3. Нурибегов, А.У., Кручение многослойного призматического анизотропного стержня, составленного из ортотропных материалов. *Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика*, 2009, № 4, с. 63–75. [Nurimbetov, A.U., Torsion of a multilayer prismatic anisotropic rod composed of orthotropic materials. *Vestnik RUDN Seriya Matematika. Informatika. Fizika = Bulletin of RUDN University Series Mathematics. Computer science. Physics*, 2009, no. 4, pp. 63–75. (in Russian)]
4. Зимин, Б.А., Зорин, И.С., К вопросу о формах равновесия неоднородных анизотропных упругих пластин и стержней. *Вестник СПбГУ. Сер. 1*, 2015, т. 2 (60), вып. 4, с. 600–605. [Zimin, B.A., Zorin, I.S., On the question of the forms of equilibrium of inhomogeneous anisotropic elastic plates and rods. *Vestnik SPbGU = Bulletin of St. Petersburg State University. Ser. 1*, 2015, vol. 2 (60), pp. 600–605. (in Russian)]
5. Немировский, Ю.В., Горынин, Г.Л., Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней и плит. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4 (4), с. 1654–1656. [Nemirovskiy, Yu.V., Gorynin, G.L., Method of rigidity functions in problems of calculation of multilayer rods and plates. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Bulletin of the Nizhny Novgorod University named N.I. Lobachevsky*, 2011, no. 4 (4), pp. 1654–1656. (in Russian)]
6. Горбачёв, В.И., Мельник, Т.М., О постановке задач в общей теории Бернулли-Эйлера неоднородных анизотропных стержней. *Вестник московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2018, № 1, с. 43–52. [Gorbachov, V.I., Mel'nik, T.M., On the formulation of problems in the general theory of Bernoulli-Euler of inhomogeneous anisotropic rods. *Vestnik moskovskogo universiteta = Bulletin of Moscow University*, 2018, no. 1, pp. 43–52. (in Russian)]
7. Аллаhverдов, Б.М., Полинкевич, К.Ю., Итерационный способ расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение. *Международный научно-исследовательский журнал*, 2017, № 01(55), ч. 4, с. 12–18. [Allakhverdov, B.M., Polinkevich, K.Yu., An iterative method for calculating thin-walled anisotropic bars of an open profile for torsion. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal = International research journal*, 2017, no. 01(55), pt. 4., pp. 12–18. (in Russian)] DOI: [10.23670/IRJ.2017.55.027](https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.55.027)
8. Ступишин, Л.Ю., Мошкевич, М.Л., Решение задач об изгибе балки на основе вариационного критерия критических уровней энергии. *Вестник МГСУ*, 2021, т. 16, вып. 3, с. 306–316. [Stupishin, L.Yu., Moshkevich, M.L., Solution of beam bending problems based on variational criterion of critical energy levels. *Vestnik MGSU*, 2021, vol. 16, iss. 3, pp. 306–316. (in Russian)] DOI: [10.22227/1997-0935.2021.3.306-316](https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.3.306-316)
9. Старовойтов, Э.И., Леоненко, Д.В., Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2017, т. 17, вып. 2, с. 196–208. [Starovoytov, E.I., Leonenko D.V., Variable bending of a three-layer rod with a compressible filler in a neutron flux. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya*

seriya. Sereriya Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208. (in Russian)] DOI: [10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208)

10. Рябов, В.М., Ярцев, Б.А., Собственные затухающие колебания анизотропных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов. 2. Численный эксперимент. *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2016, т. 3 (61), вып. 3, с. 429–439. [Ryabov, V.M., Yartsev, B.A., Natural damped oscillations of anisotropic box-shaped rods made of polymer composite materials. 2. Numerical experiment. *Vestnik SPbGU = Bulletin of St. Petersburg State University. Ser. 1*, 2016, vol. 3 (61), iss. 3, pp. 429–439. (in Russian)] DOI: [10.21638/11701/spbu01.2016.311](https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.311)
11. Иванычев, Д.А., Метод граничных состояний в задачах кручения анизотропных стержней сложного сечения. *Вести высших учебных заведений Черноземья*, 2013, № 1, с. 34–38. [Ivanychev, D.A., Boundary state method in problems of torsion of anisotropic bars of complicated section. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedeniy Chernozem'ya. Nauchno-tehnicheskii i proizvodstvennyi zhurnal = News of higher educational institutions of the Chernozem region. Scientific, technical and industrial journal*, 2013, no. 1, pp. 34–38. (in Russian)]
12. Иванычев, Д.А., Решение обобщенной задачи Сен-Венана для полых анизотропных стержней. *Наука и бизнес: пути развития*, 2014, № 5 (35), с. 66–69. [Ivanychev, D.A., Solution of the generalized Saint-Venant problem for hollow anisotropic rods. *Nauka i biznes: puti razvitiya = Science and business: ways of development*, 2014, no. 5 (35), pp. 66–69. (in Russian)]
13. Иванычев, Д.А., *Метод граничных состояний в задачах теории анизотропной упругости*. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr, Saarbrucken, 2011. [Ivanychev, D.A., *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii anizotropnoy uprugosti = Boundary state method in problems of the theory of anisotropic elasticity*. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr, Saarbrucken, 2011. (in Russian)]
14. Лехницкий, С.Г., *Анизотропные пластинки*. ГИТТЛ, Москва, 1957. [Lexniczkij, S.G., *Anizotropnyye plastinki = Anisotropic plates*. GITTL, Moscow, 1957. (in Russian)]
15. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Наука, Москва, 1977. [Lexniczkij, S.G., *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela = Theory of elasticity of anisotropic body*. Nauka, Moscow, 1977. (in Russian)]
16. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dalnevostochnyy matematicheskij zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (in Russian)]
17. Саталкина Л.В., Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. В *Сб. тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. ЛГТУ, Липецк, 2007, с. 130–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. In: *Sbornik tezisov dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirantov Lipeckzogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta = Collection of theses of reports of the scientific conference of students and graduate students of Lipetsk State Technical University*, Lipeczk, LGTU, 2007, pp. 130–131. (in Russian)]