

УДК 519.63

EDN: OВХКЕМ DOI: 10.31429/vestnik-20-2-28-36

## Вариационные алгоритмы ассимиляции данных измерений и идентификации входных параметров модели переноса примеси

В. С. Кочергин <sup>✉</sup>, С. В. Кочергин 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: [vskoher@gmail.com](mailto:vskoher@gmail.com)

*Аннотация.* В работе на основе вариационного подхода приведены алгоритмы и подходы при решении задач идентификации входных параметров численного моделирования переноса примеси. Построены алгоритмы идентификации начального поля концентрации, коэффициентов модели. Предложен алгоритм поиска местоположения источника загрязнения. Построен модифицированный алгоритм, основанный на методе оценки, имеющий преимущества при определенных условиях. На основе метода линеаризации в случае поиска некоторых постоянных величин возможна реализация соответствующего упрощенного алгоритма.

*Ключевые слова:* вариационный подход, идентификация параметров, сопряженная задача, ассимиляция данных.

*Финансирование.* Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

*Цитирование:* Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вариационные алгоритмы ассимиляции данных измерений и идентификации входных параметров модели переноса примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 2. С. 28–36. EDN: OВХКЕМ. DOI: 10.31429/vestnik-20-2-28-36

Поступила 5 июня 2023 г. После доработки 13 июня 2023 г. Принято 15 июня 2023 г. Публикация 30 июня 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Variational Algorithms for Assimilation of Measurement Data and Identification of Input Parameters of the Impurity Transfer Model

V. S. Kochergin<sup>✉</sup>, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: [vskoher@gmail.com](mailto:vskoher@gmail.com)

*Abstract.* Due to the constant development of technical capabilities for obtaining information (including from satellites) about the state of the ocean and seas, the development of modern methods of mathematical modeling of water circulation, it is necessary to create and apply reliable algorithms for assimilation of such information in dynamic models. One of the approaches to solving such a problem is a method based on variational principles, solving conjugate problems and iterative search for the minimum of the prediction quality functional. The model parameters found in this case allow us to obtain a solution that is best consistent with the measurements due to the minimization of the functional. The use of the solution of the conjugate problem (at each iteration of the only one) when constructing gradients in the parameter space, as well as the convexity of the functional, makes it possible to reliably identify the input parameters of the model. Such parameters in the problem of passive impurity transfer can be the initial concentration fields, the flows of matter at the bottom and surface, the power of point sources, the sedimentation rate of particles, turbulent diffusion coefficients and velocity fields. Algorithms for solving the problems of identification of the input parameters of the impurity transfer model are constructed using the variational approach. Algorithms for identifying the initial concentration field and the coefficients of the model are

given. An algorithm for identifying the location of the pollution source is proposed. A modified assimilation algorithm based on the evaluation method is proposed, which has advantages over the standard approach under certain conditions. Based on the linearization method, in the case of searching for some constants, it is possible to implement the corresponding modified algorithm. The results can be used to identify the input parameters of a numerical impurity transfer model based on measurement data.

*Keywords:* variational approach, parameter identification, adjoint problem, data assimilation.

*Funding.* The work was carried out for the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal studies”).

*Cite as:* Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Variational algorithms for assimilation of measurement data and identification of input parameters of the impurity transfer model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 28–36. DOI: 10.31429/vestnik-20-2-28-36 Received 5 June 2023. Revised 13 June 2023. Accepted 15 June 2023. Published 30 June 2023.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Основы вариационного подхода ассимиляции данных измерений заложены в работах [1–4] и в монографической литературе [5–9]. Интересную трансформацию прошло применение сопряженных уравнений в вычислительной математике. Изначально аппарат сопряженных уравнений применялся при определении понятия «ценности нейтронов» при расчете ядерных реакторов. Впоследствии этот формализм получил широкое применение в метеорологии [1–4, 10–12], а в дальнейшем и при решении океанологических задач [13–26]. Достаточно полный обзор по данной тематике представлен в работе [27]. В связи с интенсивным развитием технических возможностей получения информации (в том числе со спутников) о состоянии океана и морей, развитием методов математического моделирования циркуляции вод требуется создание и применение надежных алгоритмов ассимиляции такой информации в динамических моделях. Одним из подходов к решению такой задачи является метод, основанный на вариационных принципах, решении сопряженных задач и итерационном поиске минимума функционала качества прогноза. Найденные при этом параметры модели позволяют получать решение, наилучшим образом согласованное с измерениями в силу минимизации функционала. При реализации такого подхода в случае нелинейных ограничений, накладываемых моделью, требуется производить линейризацию на некотором интервале времени. В случае линейных ограничений, например, при решении задач переноса пассивной примеси, таких проблем поиска глобального минимума нет из-за выпуклой структуры функционала качества и линейности ограничений, которые не меняют выпуклость общего функционала. Использование решения сопряженной задачи (на каждой итерации единственного) при построении градиентов в пространстве параметров, а также выпуклость функционала позволяют корректно идентифицировать параметры модели. Такими параметрами в задаче переноса пассивной примеси могут быть начальные поля концентрации, потоки вещества на дне и поверхности, мощность точечных источников, скорость седиментации частиц, коэффициенты турбулентной диффузии и поля скорости.

## 1. Модель переноса примеси

Рассмотрим модель [28] переноса пассивной примеси в  $\sigma$ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial (W - W_S)C}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \quad (1.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q, \quad Q = Q_S \delta(t - 0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q_B(x, y, \sigma), \end{aligned} \quad (1.3)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (1.4)$$

где  $t$  — время;  $x_0, y_0$  — координаты точечного источника;  $C$  — концентрация примеси;  $Q(t)$  — точечный источник переменной по времени мощности;  $Q_B$  — мощность источника на дне;  $W_S$  — скорость седиментации примеси;  $U, V, W$  — компоненты поля скорости;  $A_H$  и  $K$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно;  $H$  — глубина,  $\mathbf{n}$  — нормаль к боковой границе. Будем считать, что точечный источник находится на поверхности моря. При задании источника на дне и на боковой границе задача решается аналогично.

При проведении соответствующих выкладок использовался аналог уравнения неразрывности в  $\sigma$ -координатах

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.5)$$

## 2. Вариационный алгоритм идентификации

В работах [29–35] на основе вариационного метода решен ряд задач по идентификации входных параметров численного моделирования переноса примеси. Рассмотрим математическую сторону их реализации. Пусть данные измерений поступают в моменты времени  $t_m \in [0, T]$ , тогда задача ассимиляции данных измерений  $C_{t_m}^{\text{ИЗМ}}$  состоит в нахождении экстремума выпуклого квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} (P(RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{ИЗМ}}), P(RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{ИЗМ}}))_{M_t}, \quad (2.1)$$

где  $M$  — область интегрирования модели на интервале времени  $[0, T]$ ,  $R$  — оператор проектирования в точки наблюдений,  $P$  — оператор расширения нулями функций невязок заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (2.1) со связями, накладываемыми моделью (1.1)–(1.3), эквивалентна поиску минимума выпуклого функционала

$$\begin{aligned} I = I_0 + \left[ \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial(W - W_S)C}{\partial \sigma} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \\ + \left( \frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \\ + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_S(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), C^* \right)_{S_t^0} + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_B, C^* \right)_{S_t^H}, \quad (2.2) \end{aligned}$$

где  $M_t = M \times [0, T]$ ,  $S_t^0 = S^0 \times [0, T]$ ,  $S_t^H = S^H \times [0, T]$ ,  $S^H$  — дно, а  $S^0$  — поверхность моря.

Интегрируя вариацию функционала (2.2) по частям с учетом аналога уравнения неразрывности в  $\sigma$ -координатах (1.5) и краевых условий, можно получить вариации функционала по отношению к различным параметрам модели переноса.

Из определения стационарности функционала по отношению к вариациям тех или иных параметров [29, 30, 33–35] и определения градиента имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{Q_S(t)} I &= C^*(x_0, y_0, 0, t), \quad \nabla_{C_0} I = C^*(x, y, \sigma, 0), \\ \nabla_{W_S} I &= \int_{M_t} \frac{\partial C}{\partial \sigma} C^* dM_t, \quad \nabla_{Q_B} I = \int_0^T C^*(x, y, -1, t) dt, \\ \nabla_{A_H} I &= \int_0^T \iiint_M \left( \frac{\partial C^*}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C^*}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dx dy d\sigma dt, \\ \nabla_K I &= \int_0^T \iiint_M \left( \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right) dx dy dz dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $C^*$  — множители Лагранжа являются решением сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial(W - W_S)C^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \\ - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = -P(RC_{t_m} - C_{t_m}^{нзм}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.5)$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (2.6)$$

Например, при определении скорости седиментации примеси [34] значение параметра ищется итерационно

$$W_S^{n+1} = W_S^n + \tau \nabla_{W_S} I, \quad (2.7)$$

где  $\tau$  — итерационный параметр, который находится из соотношения

$$\tau = \frac{(P(RC_{t_m} - C_{t_m}^{нзм}), PR\delta C_{t_m})_{M_t}}{(PR\delta C_{t_m}, PR\delta C_{t_m})_{M_t}}, \quad (2.8)$$

где  $\delta C$  — решение соответствующей задачи в вариациях. Аналогично строится итерационный процесс для идентификации других параметров численного моделирования

Алгоритм определения параметров в целом состоит в следующем:

- при интегрировании модели (1.1)–(1.4) запоминаются невязки прогноза для моментов времени  $t_m \in [0, T]$ ;
- решается сопряженная задача (2.4)–(2.6) и строятся соответствующие градиенты функционала (2.3) в зависимости от поставленной задачи;
- интегрируется задача в вариациях;
- находится итерационный параметр  $\tau$ ;
- осуществляется итерационный спуск в пространстве параметров для минимизации функционала (2.2).

### 3. Метод оценки и алгоритм идентификации местоположения источника

Умножая (1.1)–(1.4) на  $C^*$  и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности (1.5) в  $\sigma$ -координатах, выбирая  $C^*$  как решение следующей сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - \\ - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = g, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.2)$$

$$t = T : C^* = 0, \quad (3.3)$$

получим

$$\int_S Q C^* dS = \int_S C g dS, \quad (3.4)$$

где  $S$  — поверхность моря,  $g = \delta(t - t_m) \delta(x - x_n) \delta(y - y_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $N$  — общее количество точек измерений. Учитывая представления для  $Q$  и  $g$  из формулы (3.4) имеем

$$Q_S C_n^{m*}(0, x_0, y_0, 0) = C(t_m, x_n, y_n, 0), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Для нахождения координат источника [32] загрязнения, необходимо решить  $N$  сопряженных задач (3.1)–(3.3). Тогда можно определить некоторую область  $\Omega = \cap L_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , где  $L_n$  — области существенных значений  $C_n^*$ . Также при идентификации пятна загрязнения полезна априорная информация об этой области. Задание точек  $(x_i, y_i)$  на границе пятна загрязнения, позволяет найти область  $\Omega$ , а значения концентрации в областях максимальных значений улучшает обусловленность решаемой задачи. Таким образом, по информации  $N$  измерений (для различных моментов времени  $t_m$ ) строится система из  $N$  уравнений. Значения  $Q_S$  определяются из системы (3.5) на основе метода вариационной фильтрации [36], который успешно применяется при решении аналогичных задач. Для переопределенной системы (3.5) в случае наличия ошибок измерений необходима фильтрация данных с учетом всей информации, имеющейся в  $N$  уравнениях. В результате работы такой процедуры уравнения новой системы сортируются по рангу. В итоге в верхних строках системы оказываются уравнения с наилучшей информативностью.

#### 4. Модификация вариационного метода ассимиляции данных измерений

Данные измерений имеются чаще всего не во всех узлах области, поэтому необходимое количество сопряженных задач для формулы оценки уменьшается вследствие того, что оценка значений поля концентрации производится только в точках измерений. Для того чтобы найти концентрацию  $\bar{C}$ , требуется решить  $k$  сопряженных задач, где  $k$  — количество точек измерений. По этим же решениям сопряженных задач оценивается и решение задачи в вариациях. Таким образом, вместо решения основной задачи и задачи в вариациях производится оценка полей, а для построения градиентов интегрируется соответствующая сопряженная задача на каждой итерации.

При численной реализации вариационного алгоритма идентификации основное время счета занимает решение основной, сопряженной задач и задачи в вариациях. Пусть  $t_p$  — процессорное время интегрирования модели на  $[0, T]$ , тогда суммарное время реализации стандартного алгоритма идентификации  $t_s = 3Jt_p$ , где  $J$  — число итераций, необходимое для достижения минимума функционала. При реализации модифицированного алгоритма общее время счета  $t_m = t_p(J + k/R)$ , где  $k$  — количество данных измерений, а  $R$  — количество используемых процессоров. Для того чтобы  $t_m$  было меньше  $t_s$ , необходимо выполнение следующего условия:

$$R > \frac{k}{2J}.$$

Применение модифицированного [31] вариационного алгоритма ассимиляции позволяет осуществлять поиск оптимальных входных параметров моделирования с использованием многопроцессорной вычислительной техники, что улучшает оперативность оценки полей загрязняющих веществ.

## 5. Метод линеаризации

В случае, когда параметр подлежащий идентификации — константа процедура его идентификации существенно упрощается. Задаче (1.1)–(1.4) в случае идентификации  $Q_S$  поставим в соответствие следующую задачу в вариациях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\delta C}{\delta Q_S} + \frac{\partial DU}{\partial x} \frac{\delta C}{\delta Q_S} + \frac{\partial DV}{\partial y} \frac{\delta C}{\delta Q_S} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} \frac{\delta C}{\delta Q_S} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\delta C}{\delta Q_S} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\delta C}{\delta Q_S} + \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial}{\partial D} \frac{\delta C}{\delta Q_S} \end{aligned} \quad (5.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial \delta C}{\partial n} = 0, \quad (5.2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = \delta(t - 0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ \sigma = -1 : \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

и начальными данными

$$\frac{\delta C}{\delta Q_S}(0, x, y, \sigma) = 0. \quad (5.4)$$

Будем считать, что

$$C = \tilde{C} + \frac{\delta C}{\delta Q_S} (Q_S - Q_{\text{ист}}), \quad (5.5)$$

где  $\tilde{C}$  — некоторая первоначальная оценка концентрации.

Тогда функционал (2.1) можно записать в виде

$$I_0 = \frac{1}{2} \left[ P \left( R(\tilde{C} + \frac{\delta C}{\delta Q_S} (Q_S - Q_{\text{ист}})) - C_{t_m}^{\text{изм}} \right), P \left( R(\tilde{C} + \frac{\delta C}{\delta Q_S} (Q_S - Q_{\text{ист}})) - C_{t_m}^{\text{изм}} \right) \right]_{M_t}. \quad (5.6)$$

Откуда из условия стационарности можно получить формулу для оценки искомого параметра в следующем виде:

$$Q_{\text{ист}} = Q_S + \frac{\left( P \left( R\tilde{C} - C_{t_m}^{\text{изм}} \right), PR \frac{\delta C}{\delta Q_S} \right)_{M_t}}{\left( PR \frac{\delta C}{\delta Q_S}, PR \frac{\delta C}{\delta Q_S} \right)_{M_t}}. \quad (5.7)$$

Аналогично решается задача при определении других неизвестных параметров модели по данным измерений. Например, в работе [37] такой подход применен для идентификации мощности заглубленного источника загрязнения.

## Заключение

На основе вариационного подхода к задаче ассимиляции данных измерений построены алгоритмы и процедуры идентификации различных входных параметров модели переноса пассивной примеси за счет ассимиляции данных измерений. Процедуры используют решения соответствующих сопряженных задач при организации итерационного процесса поиска оптимальных параметров и определении координат возможных источников загрязнения. В случае небольшого количества данных измерений определенными преимуществами обладает модифицированный алгоритм ассимиляции. При определении параметров, которые являются постоянными, возможно применение метода линеаризации. В целом представленные алгоритмы реализованы при решении различных задач, в том числе при ассимиляции спутниковой информации.

## Литература [References]

1. Sasaki, Y., A fundamental study of the numerical prediction based on the variational principle. *Journal of the Meteorological Society of Japan, Ser. 2*, 1955, vol. 33, iss. 6, pp. 262–275.
2. Sasaki, Y., Some basic formations in numerical variational analysis. *Mon. Wea. Rev.*, 1970, vol. 98, pp. 875–883.
3. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In: Marchuk, G.I. (ed.), *Modelling and Optimization of Complex System*. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf., Springer, New York, 1978, pp. 240–252.
4. Пененко, В.В., Методы численного моделирования атмосферных процессов. Гидрометеоздат, Ленинград, 1981. [Penenko, V.V., *Metody chislennogo modelirovaniya atmosferykh protsessov = Methods for numerical simulation of atmospheric processes*. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1981. (in Russian)]
5. Лионс, Ж.Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. Мир, Москва, 1972. [Lions, J.L., *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisuyemyimi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi = Optimal control of systems described by partial differential equations*. Mir, Moscow, 1972. (in Russian)]
6. Лионс, Ж.Л., *Управление сингулярными распределенными системами*. Наука, Москва, 1987. [Lions, J.L., *Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami = Control of Singular Distributed Systems*. Nauka, Moscow, 1987. (in Russian)]
7. Лионс, Ж.Л., *Ценность. Сопряженная функция*. Атомиздат, Москва, 1972. [Lyons, J.L., *Tsennost'. Sopryazhennaya funktsiya = Value. Associated function*. Atomizdat, Moscow, 1972. (in Russian)]
8. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. Наука, Москва, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical Modeling in the Problem of the Environment*. Nauka, Moscow, 1982. (in Russian)]
9. Марчук, Г.И., Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана. *Метеорология и гидрология*, 1974, № 2, с. 17–34. [Marchuk, G.I., Basic and conjugate equations of the dynamics of the atmosphere and ocean. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorology and Hydrology*, 1974, no. 2, pp. 17–34. (in Russian)]
10. Talagrand, O., Courtier, P., Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. Part I: Theory. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 1987, vol. 113, pp. 1311–1328.
11. Le Dimet, F.-X., Talagrand, O., Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations. Theoretical aspects. *Tellus, ser. A.*, 1986, vol. 38A, pp. 97–110.
12. Le Dimet, F., Nouailler, A., Assimilation of dynamical data in a limited area model. In: Sasaki, Y. (ed.), *Variational Methods in Geosciences*, Elsevier, 1985, pp. 181–185.
13. Тимченко, И.Е., Кочергин, С.В., Вариационный метод прогноза вертикальных распределений температуры. В: *Методы и аппаратура для океанологических исследований*, 1982, с. 122–126. [Timchenko, I.E., Kochergin, S.V., Variational method for forecasting vertical temperature distributions. In: *Metody i apparatura dlya okeanologicheskikh issledovaniy = Methods and equipment for oceanological research*, 1982, pp. 122–126. (in Russian)]
14. Климок, В.И., Кочергин, С.В., Усвоение спутниковых данных в численной модели динамики океана. В: *Численное решение задач динамики океана*. Новосибирск, 1982, с. 15–23. [Klimok, V.I., Kochergin, S.V., Assimilation of satellite data in a numerical model of ocean dynamics. In: *Chislennoe reshenie zadach dinamiki okeana = Numerical solution of ocean dynamics problems*. Novosibirsk, 1982, pp. 15–23. (in Russian)]
15. Yu, L., O'Brien, J.J., On the initial condition in parameter estimation. *J. Phys. Oceanogr.*, 1992, vol. 22, pp. 1361–1364.
16. Malanotte-Rizzoli, P., Holland W.R., Data constraints applied to models of the ocean general circulation. Part II: The transient, Eddy-Resolving Case. *Journal of Physical Oceanography*, 1988, vol. 18, iss. 8, pp. 1093–1107.
17. Robinson, A.R., Carton, J.A., Pinardi, N., Mooers, Ch.N.K., Dynamical forecasting and dynamical interpolation: an experiment in the California current. *Journal of Physical Oceanography*, 1986, vol. 16, iss. 9, pp. 1561–1579.

18. Elsberry, R.L., Warrenfelt, L.L., Data assimilation tests with an oceanic mixed-layer model. *Journal of Physical Oceanography*, 1982, vol. 12, iss. 8, pp. 839–850.
19. Yu, L., Malanotte-Rezzoli, P., Inverse modeling of seasonal variations in the North Atlantic Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, 1998, vol. 28, p. 902.
20. Yu, L., O'Brien, J.J., Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile. *J. Phys. Oceanogr.*, 1991, vol. 21, pp. 709–719.
21. Марчук, Г.И., Агошков, В.М., Шутяев, В.П., *Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики*. Наука, Москва, 1993. [Marchuk, G.I., Agoshkov, V.M., Shutyaev, V.P., *Sopryazhennyye uravneniya i metody vozmushcheniy v nelineynykh zadachakh matematicheskoy fiziki = Adjoint equations and perturbation methods in nonlinear problems of mathematical physics*. Nauka, Moscow, 1993. (in Russian)]
22. Агошков, В.И., Лебедев, С.А., Пармузин, Е.И., Численное решение проблемы вариационного усвоения оперативных данных наблюдений о температуре поверхности океана. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2009, т. 45, № 1, с. 76–107. [Agoshkov, V.I., Lebedev, S.A., Parmuzin, E.I., Numerical solution of the problem of variational assimilation of operational observational data on ocean surface temperature. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana = Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 76–107. (in Russian)]
23. Агошков, В.И., Пармузин, Е.И., Шутяев, В.П., Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана. *ЖВМиМФ*, 2008, т. 48, № 8, с. 1371–1391. [Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Shutyaev, V.P., Numerical algorithm for variational assimilation of observational data on ocean surface temperature. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1371–1391. (in Russian)]
24. Агошков, В.И., Пармузин, Е.И., Шутяев, В.П., Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности её решения. *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2013, т. 49, № 6, с. 643–654. [Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Shutyaev, V.P., Observational data assimilation in the Black Sea circulation problem and sensitivity analysis of its solution. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana = Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 643–654. (in Russian)]
25. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of a pollution source power in the Kazantip bay applying the variation algorithm. *Physical Oceanography*, 2015, no. 2, pp. 69–76.
26. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Станичный, С.В., Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море. *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*, 2020, т. 17, № 2, с. 40–48. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Stanichny, S.V., Variational assimilation of satellite data on the surface concentration of suspended matter in the Sea of Azov. *Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa = Modern problems of remote sensing of the Earth from space*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 40–48. (in Russian)]
27. Shutyaev, V.P., Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 2019, vol. 55, pp. 17–31. DOI: [10.1134/S0001433819010080](https://doi.org/10.1134/S0001433819010080)
28. Иванов, В.А., Фомин, В.В., *Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша*. ЭКОСИ-гидрофизика, Севастополь, 2008. [Ivanov, V.A., Fomin, V.V., *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone more – susha = Mathematical modeling of dynamic processes in the sea – land zone*. ECOSY-Hydrophysics, Sevastopol, 2008. (in Russian)]
29. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование решения сопряженных задач при идентификации входных параметров модели переноса и планировании эксперимента. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 2, с. 42–47. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using the solution of adjoint problems in identifying the input parameters of the transport model and planning the experiment. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 42–47. (in Russian)] EDN: ZHXFNL
30. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Вариационные алгоритмы идентификации мощности точечного

- импульсного источника загрязнения. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 3, с. 62–72. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Variational algorithms for identifying the power of a point impulse pollution source. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 3, p. 62–72. (in Russian)] EDN: ZHLAIX
31. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Модифицированный вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений в модели переноса пассивной примеси. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, № 1, с. 61–67. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Modified variational algorithm for assimilation of measurement data in the passive impurity transport model. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, no. 1, p. 61–67. (in Russian)] EDN: YUKAYK
  32. Дымова О.А., Кочергин В.С., Кочергин С.В. Идентификация местоположения возможного источника загрязнения в акватории Гераклеийского полуострова на основе метода сопряженных уравнений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 72–77. [Dymova O.A., Kochergin V.S., Kochergin S.V. Identification of the location of a possible source of pollution in the water area of the Herakleian Peninsula based on the method of conjugate equations. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 72–77. (in Russian)] EDN: YABSYP DOI: [10.31429/vestnik-15-3-72-77](https://doi.org/10.31429/vestnik-15-3-72-77)
  33. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Вариационные алгоритмы идентификации мощности импульсного источника загрязнения в модели переноса примеси. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 1, ч. 1, с. 62–66. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Variational algorithms for identifying the power of an impulse source of pollution in the impurity transfer model. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 1, part 1, pp. 62–66. (in Russian)] EDN: CXLBCB DOI: [10.31429/vestnik-17-1-1-62-66](https://doi.org/10.31429/vestnik-17-1-1-62-66)
  34. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Вариационный алгоритм идентификации скорости седиментации взвешенного вещества в море. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 4, с. 43–47. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Variational algorithm for identifying the rate of sedimentation of suspended matter in the sea. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 4, pp. 43–47. (in Russian)] EDN: CPAATC DOI: [10.31429/vestnik-17-4-43-47](https://doi.org/10.31429/vestnik-17-4-43-47)
  35. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Вариационные процедуры идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 3, с. 14–18. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Variational procedures for identifying the input parameters of the passive impurity transport model. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 14–18. (in Russian)] EDN: LVLLXX DOI: [10.31429/vestnik-18-3-41-45](https://doi.org/10.31429/vestnik-18-3-41-45)
  36. Страхов, В.Н., Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений — основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии. *Докл. АН СССР*, 1991, т. 320, № 3, с. 595–599. [Strakhov, V.N., The filtering method for systems of linear algebraic equations is the basis for solving linear problems of gravimetry and magnetometry. *Doklady AN SSSR = Report. USSR Academy of Sciences*, 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (in Russian)]
  37. Кочергин, С.В., Фомин, В.В., Вариационная идентификация входных параметров модели распространения загрязняющих веществ от подводного источника. *Морской гидрофизический журнал*, 2019, т. 35, № 6, с. 621–632. [Kochergin, S.V., Fomin, V.V., Variational identification of input parameters for a model of pollutant propagation from an underwater source. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2019, vol. 35, no. 6, pp. 621–632.] DOI: [10.22449/0233-7584-2019-6-621-632](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-6-621-632)