

УДК 517.927.4

EDN: CYWMKY DOI: 10.31429/vestnik-20-3-6-12

О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка

Г. Э. Абдурагимов  

Дагестанский государственный университет, ул. Магомеда Гаджиева 43-а, Махачкала, 367000, Россия

✉ Абдурагимов Гусен Эльдерханович; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Аннотация. Рассматривается краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. С помощью принципа Лере–Шаудера доказано существование положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи. Полученные результаты продолжают исследования автора, посвященные вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Абдурагимов Г. Э. О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 6–12. EDN: CYWMKY. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-6-12

Поступила 23 июня 2023 г. После доработки 6 июля 2023 г. Принято 1 августа 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

On the Existence of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for a Nonlinear Functional-Differential Equation of Fractional Order

G. E. Abduragimov  

Dagestan State University, st. Magomed Gadzhiev 43-a, Makhachkala, 367000, Russia

✉ Gusen E. Abduragimov; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Abstract. The following boundary value problem for a non-linear functional-differential equation of fractional order is considered:

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} x(t) + f(t, (Tx)(t)) &= 0, & 0 < t < 1, & \quad \alpha \in (2, 3], \\ x(0) = x'(0) &= 0, \\ x(1) &= 0. \end{aligned}$$

Using special topological tools of nonlinear analysis, we prove the existence of a positive solution to this problem. An example is given that illustrates the fulfillment of sufficient conditions for the unique solvability of the problem. The results obtained complement the author's research on the existence and uniqueness of positive solutions to boundary value problems for non-linear functional-differential equations.

Keywords: functional-differential equation of fractional order, positive solution, boundary value problem, Green's function.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Abduragimov, G. E., On the existence of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 6–12. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-6-12

Received 23 June 2023. Revised 6 July 2023. Accepted 1 August 2023. Published 29 September 2023.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Дробные дифференциальные уравнения представляют большой интерес. Это вызвано как интенсивным развитием самой теории дробного исчисления, так и приложений. Например, они возникают в реологии, динамических процессах в самоподобных и пористых структурах, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов, потоках жидкости, электрических сетях, химической физики вязкоупругости и многих других областях науки. В последнее время появились работы, посвященные существованию решений дробных дифференциальных уравнений с использованием методов нелинейного анализа (теоремы о неподвижной точке, теория Лерэ–Шаудера, метод разложения Адомиана — Adomian Decomposition Method (ADM) и др.) [1–4]. Особенно большое внимание привлекли краевые задачи для дробных дифференциальных уравнений [5–12]. Как известно, задача решения краевых задач имеет первостепенное значение в различных областях прикладной математики. В последнее время, кажется, появился новый интерес к исследованию краевых задач для дробных дифференциальных уравнений.

Несмотря на бурное развитие теории дробно-дифференциальных уравнений отметим, что статей, в которых подробно рассматривались бы краевые задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений дробного порядка, сравнительно мало. В настоящей статье предпринята попытка в определенной степени восполнить этот пробел. С помощью специальных топологических средств нелинейного анализа в полуупорядоченных пространствах получены достаточные условия существования по крайней мере одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. В заключение приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты. Среди последних исследований автора можно выделить, например, работы [13, 14].

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через C пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ — $C[0, 1]$, $\mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — пространство $\mathbb{L}_p(0, 1)$ и $\mathbb{W}^3$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0, 1]$ со второй абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{\alpha} x(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$x(1) = 0, \quad (1.3)$$

где $\alpha \in (2, 3]$ — некоторое действительное число, D_{0+}^{α} — дробная производная Римана–Лиувилля, $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна, монотонно возрастает по второму аргументу и удовлетворяет условию Каратеодори (т.е. $f(t, u)$ измерима по t при всех $u \geq 0$ и непрерывна по u при почти всех $t \in [0, 1]$).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.4)$$

где $G(t, s)$ — функция Грина оператора $-D_{0+}^{\alpha} x(t)$ с краевыми условиями (1.2), (1.3):

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \leq s \leq t, \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

Лемма. [15] Ядро $G(t, s)$ обладает свойствами

1. $G(t, s) > 0$, $(t, s) \in [0, 1] \times (0, 1)$;
2. $G(t, s) = G(1 - s, 1 - t)$, $(t, s) \in [0, 1] \times (0, 1)$;
3. $\frac{h(t)h(1-s)}{\Gamma(\alpha)} \leq G(t, s) \leq \frac{(\alpha-1)h(t)}{\Gamma(\alpha)}$, $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, где $h(t) = t^{\alpha-1}(1-t)$;
4. $\frac{h(t)h(1-s)}{\Gamma(\alpha)} \leq G(t, s) \leq \frac{(\alpha-1)h(1-s)}{\Gamma(\alpha)}$, $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Определение 1. Функцию $\beta_1 \in C$ будем называть *нижним решением* задачи (1.1)–(1.3), если она удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} -D_{0+}^{\alpha}\beta_1(t) &\leq f(t, (T\beta_1)(t)), & 0 < t < 1, \\ \beta_1(0) &\leq 0, & \beta_1'(0) \leq 0, & \beta_1(1) \leq 0. \end{aligned}$$

Определение 2. Функцию $\beta_2 \in C$ будем называть *верхним решением* задачи (1.1)–(1.3), если она удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} -D_{0+}^{\alpha}\beta_2(t) &\geq f(t, (T\beta_2)(t)), & 0 < t < 1, \\ \beta_2(0) &\geq 0, & \beta_2'(0) \geq 0, & \beta_2(1) \geq 0. \end{aligned}$$

Определение 3. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) будем подразумевать функцию $x \in \mathbb{W}^3$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

Предположим, что функция $f(t, u)$ при $t \in [0, 1]$ и любых неотрицательных u удовлетворяет условию

$$f(t, u) \leq a(t) + bu^{p/q}, \quad (1.5)$$

где $a \in \mathbb{L}_q$, $b > 0$, $1 < q < \infty$.

Запишем уравнение (1.4) в операторном виде

$$x = GNTx,$$

где $N: \mathbb{L}_p \rightarrow \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G: \mathbb{L}_q \rightarrow C$ — оператор, определяемый функцией Грина $G(t, s)$.

Несложно проверить, что оператор A , определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и монотонен.

Теорема. Предположим, что выполнено неравенство (1.5), а также следующие условия:

1. $1 < p < q < \infty$;
2. $f(t, \lambda u) \geq \lambda^{\frac{p}{q}} f(t, u)$, $(t, u) \in [0, 1] \times [0, \infty)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$;
3. $0 < \min \left\{ 1, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(1-s) f(s, (Th)(s)) ds \right\} \leq \max \left\{ 1, \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(a(s) + b(Th)^{\frac{p}{q}}(s) \right) ds \right\}$.

Тогда существует по крайней мере одно положительное решение краевой задачи (1.1)–(1.3).

Доказательство. Решение задачи (1.1)–(1.3) совпадает с неподвижной точкой оператора A , поэтому достаточно показать существование неподвижной точки оператора A .

Обозначим через a_1 и a_2 соответственно левые и правые части неравенства условия 3 теоремы и покажем вначале, что функции $\beta_1(t) = \lambda_1 g(t)$ и $\beta_2(t) = \lambda_2 g(t)$ являются соответственно нижним и верхним решениями задачи (1.1)–(1.3), где

$$0 < \lambda_1 \leq \min \left\{ \frac{1}{a_2}, a_1^{\frac{p}{q-p}} \right\}, \quad \lambda_2 \geq \max \left\{ \frac{1}{a_1}, a_2^{\frac{p}{q-p}} \right\}$$

и

$$g(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Th)(s)) ds.$$

Легко видеть, что $g(t)$ является положительным решением задачи

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha g(t) + f(t, (Th)(t)) &= 0, & 0 < t < 1, \\ g(0) = g'(0) &= 0, \\ g(1) &= 0. \end{aligned}$$

В силу (1.5) и свойства 3 леммы 1 имеем

$$\int_0^1 G(t, s) f(s, (Th)(s)) ds \leq h(t) \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(a(s) + b(Th)^{\frac{p}{q}}(s) \right) ds.$$

С другой стороны ввиду свойства 3 леммы имеем

$$\int_0^1 G(t, s) f(s, (Th)(s)) ds \geq h(t) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(1-s) f(s, (Th)(s)) ds.$$

Объединив последние неравенства, окончательно получим

$$a_1 h(t) \leq g(t) \leq a_2 h(t), \quad 0 < t < 1,$$

где числа a_1 и a_2 определены выше.

В силу линейности оператора T это неравенство равносильно

$$a_1 (Th)(t) \leq (Tg)(t) \leq a_2 (Th)(t), \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1 a_1 \leq \frac{(T\beta_1)(t)}{(Th)(t)} \leq \lambda_1 a_2 \leq 1, \quad \frac{1}{\lambda_2 a_2} \leq \frac{(Th)(t)}{(T\beta_2)(t)} \leq \frac{1}{\lambda_2 a_1} \leq 1.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} f(t, (T\beta_1)(t)) &= f\left(t, \frac{(T\beta_1)(t)}{(Th)(t)} (Th)(t)\right) \geq \left(\frac{(T\beta_1)(t)}{(Th)(t)}\right)^{\frac{p}{q}} f(t, (Th)(t)) \geq \\ &\geq (\lambda_1 a_1)^{\frac{p}{q}} f(t, (Th)(t)) \geq \lambda_1 f(t, (Th)(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 f(t, (Th)(t)) &= \lambda_2 f\left(t, \frac{(Th)(t)}{(T\beta_2)(t)} (T\beta_2)(t)\right) \geq \\ &\geq \lambda_2 \left(\frac{(Th)(t)}{(T\beta_2)(t)}\right)^{\frac{p}{q}} f(t, (T\beta_2)(t)) \geq \lambda_2 (\lambda_2 a_2)^{-\frac{p}{q}} f(t, (T\beta_2)(t)) \geq f(t, (T\beta_2)(t)). \end{aligned}$$

Итак,

$$-D_{0+}^{\alpha}\beta_1(t) = \lambda_1 f(t, (Th)(t)) \leq f(t, (T\beta_1)(t)), \quad 0 < t < 1,$$

$$-D_{0+}^{\alpha}\beta_2(t) = \lambda_2 f(t, (Th)(t)) \geq f(t, (T\beta_2)(t)), \quad 0 < t < 1.$$

Очевидно, $\beta_1(t) = \lambda_1 g(t)$ и $\beta_2(t) = \lambda_2 g(t)$ удовлетворяют краевым условиям (1.2)–(1.3) и, следовательно, являются нижним и верхним решениями задачи (1.1)–(1.3) соответственно.

Далее покажем, что краевая задача

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) + \rho(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.6)$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad (1.7)$$

$$x(1) = 0 \quad (1.8)$$

где

$$\rho(t, (Tx)(t)) = \begin{cases} f(t, (T\beta_1)(t)), & \text{если } x(t) \leq \beta_1(t), \\ f(t, (Tx)(t)), & \text{если } \beta_1(t) \leq x(t) \leq \beta_2(t), \\ f(t, (T\beta_2)(t)), & \text{если } \beta_2(t) \leq x(t) \end{cases}$$

имеет решение.

Определим оператор $\tilde{A}: C \rightarrow C$ следующим образом:

$$(\tilde{A}x)(t) = \int_0^1 G(t, s) \rho(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Очевидно, $\tilde{A}$ непрерывен в C .

Из монотонности функции $f(t, u)$ по u следует, что

$$f(t, (T\beta_1)(t)) \leq \rho(t, (Tx)(t)) \leq f(t, (T\beta_2)(t)), \quad t \in [0, 1].$$

С помощью теоремы Арцела-Асколи несложно показать, что оператор $\tilde{A}$ вполне непрерывен. Таким образом, на основании принципа Лере-Шаудера $\tilde{A}$ имеет неподвижную точку, т.е. краевая задача (1.6)–(1.8) имеет решение.

Наконец, докажем что задача (1.6)–(1.8) имеет положительное решение.

Предположим, что $x^*(t)$ — положительное решение задачи (1.6)–(1.8). Ввиду монотонности $f(t, u)$ по второму аргументу имеем

$$f(t, (T\beta_1)(t)) \leq \rho(t, (Tx^*)(t)) \leq f(t, (T\beta_2)(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Следовательно,

$$-D_{0+}^{\alpha}z(t) \geq f(t, (T\beta_2)(t)) - \rho(t, (Tx^*)(t)) \geq 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$z(0) = z'(0) = 0,$$

$$z(1) = 0,$$

где $z(t) = \beta_2(t) - x^*(t)$. Легко видеть, что $z(t) \geq 0$, т.е. $x^*(t) \leq \beta_2(t)$, $t \in [0, 1]$. Аналогично, $\beta_1(t) \leq x^*(t)$, $t \in [0, 1]$. Следовательно, x^* — положительное решение краевой задачи (1.1)–(1.3). $\square$

В заключение приведем простой пример, иллюстрирующий выполнение условий Теоремы.

Пример. Рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения

$$D_{0+}^{5/2}x(t) + t + \sqrt{\int_0^1 x(s) ds} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.9)$$

$$x(0) = x'(0) = x(1) = 0. \quad (1.10)$$

Здесь, очевидно, $\alpha = 5/2$, $p/q = 1/2$ и $f(t, u) = t + u^{1/2}$. Проверим выполнение условия 2 Теоремы. Действительно, для любых $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\lambda^{1/2} f(t, u) = \lambda^{1/2} t + \lambda^{1/2} u^{1/2} \leq t + (\lambda u)^{1/2} = f(t, \lambda u).$$

В рассматриваемом примере линейный оператор $T: C \rightarrow \mathbb{L}_q$ определен равенством

$$(Tx)(t) = \int_0^1 x(s) ds.$$

В частности,

$$(Th)(t) = \int_0^1 h(s) ds = \int_0^1 s^{3/2} (1-s) ds = \frac{4}{35}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(1-s) f(s, (Th)(s)) ds = \frac{1}{\Gamma(5/2)} \int_0^1 s(1-s)^{3/2} \left(s + \frac{2}{\sqrt{35}} \right) ds = \frac{64}{945\sqrt{\pi}} + \frac{32}{3\sqrt{42875\pi}} < 1.$$

Отсюда следует справедливость условия 3. Следовательно, в силу Теоремы краевая задача (1.9)–(1.10) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

Замечание. Методом неопределенных коэффициентов можно показать, что точным решением задачи (1.9)–(1.10) является функция

$$x(t) = at^{3/2} + bt^{5/2} + ct^{7/2},$$

где

$$a = \frac{4 \left(2\sqrt{\pi} \left(3 + \sqrt{9 + 350\sqrt{\pi}} \right) + 75\pi \right)}{2625\pi^{3/2}}, \quad b = -\frac{8 \left(\sqrt{9 + 350\sqrt{\pi}} + 3 \right)}{2625\pi}, \quad c = -\frac{4}{35\sqrt{\pi}}.$$

Соответствующие расчеты коэффициентов произведены в среде Mathcad.

Заключение

В работе рассмотрена двухточечная краевая задача с однородными граничными условиями для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. В условиях монотонного подлинейного роста правой части рассматриваемого уравнения с помощью известного принципа Лере–Шаудера доказано существование, по крайней мере, одного положительного решения рассматриваемой задачи на конусном отрезке $\beta_1(t) \leq x(t) \leq \beta_2(t)$, где $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ — соответственно нижнее и верхнее решения.

Литература [References]

1. Delbosco, D., Rodino, L., Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, vol. 204, no. 2, pp. 609–625. DOI: [10.1006/jmaa.1996.0456](https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0456)
2. Zhang, S., The existence of a positive solution for nonlinear fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, vol. 252, no. 2, pp. 804–812. DOI: [10.1006/jmaa.2000.7123](https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7123)
3. Zhang, S., Existence of positive solutions for some class of nonlinear fractional equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, vol. 278, no. 1, pp. 136–148. DOI: [10.1016/S0022-247X\(02\)00583-8](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00583-8)
4. Jafari, H., Daftardar-Gejji, V., Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.*, 2006, vol. 180, no. 2, pp. 700–706. DOI: [10.1016/j.amc.2006.01.007](https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.01.007)

5. Karaca, I. Y., Oz, D., Existence of solutions for a fractional order boundary value problem. *Ukr. Math. J.*, 2021, vol 72, pp. 1907–1920.
6. Bachar, I., Maagli, H., Eltaeb, H., Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional nonlinear boundary value problems under mild assumptions. *Adv. Differ. Equ.*, 2021, vol. 22, pp. 1–11. DOI: [10.1186/s13662-020-03176-w](https://doi.org/10.1186/s13662-020-03176-w)
7. Caballero, J., Harjani, J., Sadarangani, K., Existence and uniqueness of positive solutions for a class of singular fractional differential equation with infinite-point boundary value conditions. *RACSAM*, 2021, vol. 115, no. 48, pp. 1–9. DOI: [10.1007/s13398-020-00994-1](https://doi.org/10.1007/s13398-020-00994-1)
8. Sang, Y., He, L., Existence of an approximate solution for a class of fractional multi-point boundary value problems with the derivative term. *Bound. Value Probl.*, 2021, vol. 20, pp. 1–28. DOI: [10.1186/s13661-021-01497-7](https://doi.org/10.1186/s13661-021-01497-7)
9. Sang, Y., He, L., Wang, Y., Ren, Y., Shi, N., Existence of positive solutions for a class of fractional differential equations with the derivative term via a new fixed point theorem. *Adv. Differ. Equ.*, 2021, vol. 156, pp. 1–17. DOI: [10.1186/s13662-021-03318-8](https://doi.org/10.1186/s13662-021-03318-8)
10. Chabane F., Benbachir M., Hachama M., Samei M.E., Existence of positive solutions for p-Laplacian boundary value problems of fractional differential equations. *Bound. Value Probl.*, 2022, vol 65, pp. 1–38. DOI: [10.1186/s13661-022-01645-7](https://doi.org/10.1186/s13661-022-01645-7)
11. Dilna, N., Gromyak, M., Leshchuk, S., Unique solvability of the boundary value problems for nonlinear fractional differential equations. *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 265, pp. 577–588. DOI: [10.1007/s10958-022-06072-8](https://doi.org/10.1007/s10958-022-06072-8)
12. Liu, Y., Yan, C., Jiang, W., Existence of the positive solutions for boundary value problems of mixed differential equations involving the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives. *Bound. Value Probl.*, 2023, vol. 9, pp. 1–15. DOI: [10.1186/s13661-023-01696-4](https://doi.org/10.1186/s13661-023-01696-4)
13. Абдуррагимов, Г. Э., О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, № 194, с. 3–7. [Abduragimov, G.E., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order. *Itogi nauki i tekhn. ser. Sovrem. mat. i yeye pril. Temat. obz. = Results of science and technology. Ser. Modern mat. and her app. Subject. review*, 2021, vol. 194, pp. 3–7. (in Russian)] DOI: [10.1016/j.jmaa.2005.02.052](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.02.052)
14. Абдуррагимов, Г. Э., О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. *Вестник российских университетов. Математика*, 2022, т. 27, № 138, с. 129–135. [Abduragimov, G.E., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 129–135. (in Russian)] DOI: [10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135](https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135)
15. Xu, X., Jiang, D., Yuan, C., Multiple positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 2009, vol. 71, no. 10, pp. 4676–4688. DOI: [10.1016/j.na.2009.03.030](https://doi.org/10.1016/j.na.2009.03.030)