УДК 539.3 EDN: VRQONY DOI: 10.31429/vestnik-20-2-37-41

Об особенностях концентрации контактных напряжений в угловой точке клиновидной литосферной плиты

А. В. Павлова[1]✉, **О. В. Евдокимова**[1], **О. М. Бабешко**[1], **Д. А. Хрипков**[1], **А. С. Мухин**[1], **И. С. Телятников**[2], **В. А. Бабешко**[1]

[1] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
[2] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

✉ Павлова Алла Владимировна; ORCID 0000-0002-7729-2860; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Аннотация. В работе изучается контактная задача о взаимодействии деформируемой плиты клиновидной в плане формы с упругим многослойным основанием. Исследуются особенности концентрации контактных напряжений в угловой точке. Известно, что контактные напряжений в вершине клина при действии абсолютно жесткого штампа меняются от нуля до единицы. В сейсмологии это может быть причиной провоцирования землетрясения за счет разрушения литосферной плиты. В работе получены условия, позволяющие оценивать концентрацию контактных напряжений в угловой точке литосферной плиты. В основе исследования лежит метод блочного элемента, позволяющий исследовать контактные задачи с деформируемым штампом.

Ключевые слова: контактная задача, клиновидные деформируемый и абсолютно жесткий штампы, особенности концентрации напряжений.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научного проекта № МФИ-20.1/6.

Цитирование: Павлова А. В., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Хрипков Д. А., Мухин А. С., Телятников И. С., Бабешко В. А. Об особенностях концентрации контактных напряжений в угловой точке клиновидной литосферной плиты // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 2. С. 37–41. EDN: VRQONY. DOI: 10.31429/vestnik-20-2-37-41

Поступила 19 июня 2023 г. После доработки 26 июня 2023 г. Принято 27 июня 2023 г. Публикация 30 июня 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On the Peculiarities of the Concentration of Contact Stresses at the Angular Point of a Wedge-Shaped Lithospheric Plate

A. V. Pavlova[1]✉, **O. V. Evdokimova**[1], **O. M. Babeshko**[1], **D. A. Khripkov**[1], **A. S. Mukhin**[1], **I. S. Telyatnikov**[2], **V. A. Babeshko**[1]

[1] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

✉ Alla V. Pavlova; ORCID 0000-0002-7729-2860; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Abstract. The paper studies the contact problem for a deformable stamp on the interaction of a wedge-shaped lithospheric plate with a deformable multilayer base. The issue of studying the concentration of contact stresses at an angular point in the contact area is being studied. It is known that the contact stresses at the top of the wedge under the action of an absolutely rigid die vary from zero to one. In seismology, this may be the cause of provoking an earthquake due to the destruction of the lithospheric plate. In this work, conditions are obtained that allow us to estimate the concentration of contact stresses at the angular point of the lithospheric plate. The research is based on the block element method, which allows us to investigate contact problems with a deformable stamp.

Keywords: contact problem, wedge-shaped deformable and absolutely rigid stamps, stress concentration features.

Funding. The study was financially supported by the Kuban Science Foundation (project No. MFI-20.1/6).

Cite as: Pavlova, A. V., Evdokimova, O. V., Babeshko, O. M., Khripkov, D. A., Mukhin, A. S., Telyatnikov, I. S., Babeshko, V. A., On the peculiarities of the concentration of contact stresses at the angular point of a wedge-shaped lithospheric plate. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 37–41. DOI: 10.31429/vestnik-20-2-37-41

Received 19 June 2023. Revised 26 June 2023. Accepted 27 June 2023. Published 30 June 2023.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

Исследованию поведения контактных напряжений в угловой точке в контактных задачах о действии абсолютно жесткого штампа на деформируемую среду посвящен ряд работ, например, работы [1–3].

Из этих работ известно, что в случае воздействия на основание абсолютно жестким штампом клиновидной в плане формы контактные напряжения имеют степенную особенность с показателем 0,5 на гладкой границе и с изменяющимся показателем в угловой точке штампа. Показатель изменяется от нуля до единицы в зависимости от угла раствора клина. Встает вопрос о поведении контактных напряжений при переходе к деформируемой литосферной плите клиновидной формы. Высокая концентрация напряжений в угловой точке литосферной плиты может быть причиной ее разрушения и вызывать землетрясения. В основе исследования лежит метод блочного элемента, позволяющий исследовать контактные задачи с деформируемым штампом. В работе получены условия, позволяющие оценивать концентрацию контактных напряжений в угловой точке литосферной плиты.

1. Постановка задачи и метод исследования

Представленное исследование основано на анализе имеющегося метода решения проблемы о действии клиновидного деформируемого штампа на многослойную среду [4]. При этом анализируется связь контактной задачи для абсолютно жесткого штампа и деформируемого штампа. Этот подход, как будет показано ниже, позволяет получить искомые результаты.

Будем рассматривать линейно упругую многослойную среду конечной толщины, на верхней границе которой расположен деформируемый штамп, занимающий область клина в виде первого квадранта. На лицевой поверхности многослойной среды располагается декартова система координат с осью ox_3, направленной по внешней нормали, остальные оси расположены в касательной плоскости. Принимая во внимание возможность и применение универсального метода моделирования [5], позволяющего представлять решения граничной задачи для деформируемого штампа из материала сложной реологии в виде разложений по решениям граничных задач для уравнений простых реологий, применим в дальнейшем этот подход. Он опирается на использование метода блочного элемента. Будем считать, что материал деформируемого штампа описывается уравнением Гельмгольца, рассматриваемым в первом квадранте, а штамп действует на среду без трения.

2. Граничная задача для деформируемого штампа

Рассмотрим граничную задачу для уравнения Гельмгольца, моделирующего материал деформируемого штампа простой реологии

$$(\Delta + k^2)\psi(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \quad k = c\omega, \quad c = \text{const}. \tag{2.1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\psi(x_1, x_2)$ — решение граничной задачи для уравнения Гельмгольца, $q(x_1, x_2)$ описывает воздействие на штамп со стороны многослойной среды в области контакта, $t(x_1, x_2)$ внешнее воздействие на штамп сверху, ω — частота колебаний. Для уравнения Гельмгольца ставится граничная задача Дирихле в предположении, что на границах задаются краевые условия вида

$$\psi(0, x_2) = \psi_1(x_2), \quad \psi(x_1, 0) = \psi_2(x_1). \tag{2.2}$$

Опуская детали, изложенные в [4], выпишем решение граничной задачи (2.1), (2.2) которое имеет вид

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \frac{\omega(\alpha_1, \alpha_2)\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)}.$$

Здесь $\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)$ — внешняя форма граничной задачи в методе блочного элемента. Построенное решение для деформируемого штампа должно сопрягаться с решением контактной задачи для абсолютно жесткого штампа и формировать интегральное уравнение для контактной задачи с деформируемым штампом

3. Интегральное уравнение для абсолютно жесткого штампа

Это интегральное уравнение выводится методами, изложенными в работах [3, 4], и имеет вид

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\phi(\xi_1, \xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = f(x_1, x_2), \quad 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant \infty,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \mathrm{e}^{-i\langle \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x} \rangle}\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2, \quad \langle \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K(u) = \frac{R(u)}{P(u)}, \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

$$K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(u)}{P_n(u)}, \quad R_n(u) = (u^2 - z_n^2), \quad P_n(u) = (u^2 - \xi_n^2),$$

$$K(u) = \frac{1}{u}(1 + o(1)), \quad u \to \pm\infty.$$

Здесь z_n, ξ_n — вещественные нули и полюса символа ядра интегрального уравления $K(u)$ соответственно. Принятые здесь обозначения заимствованы из [4].

Решение ϕ интегрального уравнения контактной задачи для абсолютно жесткого штампа, полученное в [4], имеет вид

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{\gamma_3} \int\limits_{\gamma_4} \frac{K_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{K_{+1}(\lambda, \beta_2)(\eta_1 - \lambda)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{K(\eta_1, \eta_2)} \mathrm{e}^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\beta_2\, \mathrm{d}\eta_1\, \mathrm{d}\eta_2 +$$
$$+ \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{\gamma_3} \int\limits_{\gamma_4} \frac{K_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{K_{+2}(\beta_1, \lambda)(\eta_2 - \lambda)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} \mathrm{e}^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\beta_1\, \mathrm{d}\eta_1\, \mathrm{d}\eta_2 +$$
$$+ \int\limits_{\gamma_3} \int\limits_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}\, \mathrm{d}\eta_1\, \mathrm{d}\eta_2.$$

4. Интегральные уравнения для деформируемого штампа

Как сказано выше, интегральное уравнение контактной задачи для деформируемого штампа получается в результате сопряжения перемещений и напряжений на нижнем основании деформируемого штампа с перемещениями и контактными напряжениями основания в области контакта. В результате решения соответствующего уравнения, интегральное уравнение для деформируемого штампа принимает вид

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty m(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = f(x_1, x_2), \quad 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant \infty,$$

$$m(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} M(\alpha_1, \alpha_2) \mathrm{e}^{-i\langle \alpha \mathbf{x} \rangle} \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2, \quad M(\alpha_1, \alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)},$$

$$M(u) = K(u) + \frac{1}{(u^2 - k^2)}.$$

Из последних соотношений, очевидно, вытекает важное свойство

$$K(u) = \frac{1}{u}(1 + o(1)), \quad M(u) = \frac{1}{u}(1 + o(1)), \quad u \to \pm\infty.$$

Решение q интегрального уравнения контактной задачи, полученное в [4], имеет вид

$$q(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{\gamma_3} \int\limits_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{M_{+1}(\lambda_1, \beta_2)(\eta_1 - \lambda_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{M(\eta_1, \eta_2)} \mathrm{e}^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} \, \mathrm{d}\lambda_1 \, \mathrm{d}\beta_2 \, \mathrm{d}\eta_1 \, \mathrm{d}\eta_2 +$$
$$+ \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{\gamma_3} \int\limits_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{M_{+2}(\beta_1, \lambda_2)(\eta_2 - \lambda_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} \mathrm{e}^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} \, \mathrm{d}\lambda_2 \, \mathrm{d}\beta_1 \, \mathrm{d}\eta_1 \, \mathrm{d}\eta_2 +$$
$$+ \int\limits_{\gamma_3} \int\limits_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} \mathrm{e}^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} \, \mathrm{d}\eta_1 \, \mathrm{d}\eta_2.$$

5. Об особенностях концентрации контактных напряжений в вершине клиновидной плиты

В работе [3] представлено исследование концентрации контактных напряжений в контактных задачах с абсолютно жестким штампом в клиновидной области. Доказано, что показатели главных членов степенных разложений концентрации контактных напряжений зависят только от параметров поведения функций $uK(u)$, $uM(u)$, $u \to \pm\infty$, и не зависят от остальных параметров. Форма клиновидной области может иметь гладкую границу, отклоняющуюся от клина. Важно, чтобы в малой окрестности вершины область контакта вырождалась в клин с прямолинейными границами.

Тогда концентрации контактных напряжений в вершине для абсолютно жесткого и деформируемого штампов совпадают.

Выводы

В работе установлено, что при рассмотрении поведения литосферных плит клиновидной в плане формы, лежащих на деформируемом основании, концентрация контактных напряжений под плитой в угловой точке границы такая же, как если бы плита была абсолютно жесткой. Последнее свойство остается в силе, если литосферная плита имеет не одну, а несколько угловых точек границы.

Литература [References]

1. Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины. *МТТ*, 1992, № 4. с. 82–88. [Glushkov, E.V., Glushkova, N.V. On the features of the elastic stress field in the vicinity of the vertex of a wedge-shaped spatial crack. *Mekhanika tverdogo tela = Solid mechanics*, 1992, no. 4, pp. 82–88. (in Russian)]
2. Рвачев, В.Л., Проценко, В.С., *Контактные задачи теории упругости для неклассических областей.* Наукова думка, Киев, 1977. [Rvachev, V.L., Protsenko, V.S., *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Contact problems of elasticity theory for non-classical regions.* Naukova dumka, Kyiv, 1977. (in Russian)]
3. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., *Динамика неоднородных линейно упругих сред.* Наука, Москва, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, J.F., *Dinamika neodnorodnykh lineyno uprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear elastic media.* Nauka, Moscow, 1989. (in Russian)]

4. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Зарецкая, М.В., Евдокимов, В.С., О контактной задаче с деформируемым штампом в четверти плоскостию. *ПММ*, 2023, т. 87, № 2, с. 302–312. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Zaretskaya, M.V., Evdokimov, V.S., On a contact problem with a deformable stamp in a quarter plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and mechanics*, 2023, vol. 87, no. 2, pp. 302–312. (in Russian)] EDN: TYZHJI DOI: 10.31857/S0032823523020030
5. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *ДАН*, 2021, т. 499, с. 30–35. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 30–35. (in Russian)] DOI: 10.31857/S2686740021040039