

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В МЕТОДЕ ФАКТОРИЗАЦИИ¹*В. А. Бабешко², О. М. Бабешко³*

ABOUT BOUNDARY CONDITIONS IN THE FACTORIZATION METHOD

Babeshko V. A., Babeshko O. M.

The work gives justification for satisfying defined boundary conditions with the application of factorization method in boundary-value problems. Boundary-value problems are considered in convex domains with a smooth boundary for differential equations in partial derivatives with constant coefficients.

Выполнение граничных условий в методе факторизации предопределено результатом прямого интегрирования или интегрирования дифференциальных уравнений по частям посредством использования дифференциальных внешних форм с последующим внесением в них значений функций на границе [1, 2]. При этом граничных условий оказывается больше, чем традиционно требуется при постановке краевых задач для дифференциальных уравнений. В процессе решения краевых задач методом факторизации встает проблема обеспечения автоморфизма многообразия на себя, что достигается применением различных приемов факторизации относительно области рассмотрения краевой задачи или носителя искомых функций. В результате над соотношениями, образовавшимися в процессе обращения дифференциальной формы, производятся некоторые преобразования, а именно, вычисляются формы – вычеты Ле-

ре, приводящие к алгебраическим уравнениям (в случае обыкновенных дифференциальных уравнений) и к псевдодифференциальным уравнениям меньшей размерности (в случаях краевых задач для уравнений в частных производных) при удовлетворении граничных условий. При решении этих уравнений находятся недостающие граничные значения искомых функций. Покажем, что граничные условия удовлетворяются тогда и только тогда, когда выполняются оговоренные выше алгебраические или псевдодифференциальные уравнения, являющиеся следствием факторизации.

1. Для доказательства удовлетворения граничных условий в методе факторизации будем использовать известный в таких случаях прием «растяжения координатных осей» в окрестности изучаемой точки [3].

В результате этого преобразования проблема сводится к исследованию удовлетво-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-01-00694, 04-01-96822), РФФИ р2003юг (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96584), ФЦНТП (РИ-112/001/301), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, программы «Университеты России» (УР.04.01.102).

²Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

³Бабешко Ольга Мефодиевна, канд. хим. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

ния граничных условий для полупространства.

Ниже будем считать, что рассматривается выпуклое тело с гладкой границей, имеющей дважды непрерывно дифференцируемую кривизну.

Рассмотрим однородную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \\ = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{spmnk} \varphi_{p,x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = 0, \\ s = 1, 2, \dots, P, \\ A_{sqmnk} = \text{const}, \\ \varphi(\mathbf{x}) = \{\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_P(\mathbf{x})\}, \\ \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{K_1} \sum_{p=1}^P B_{spmnk} \varphi_{p,x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = f_s, \\ \mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_{s_0}\}, \\ s = 1, 2, \dots, s_0 < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K. \end{aligned} \quad (1)$$

Краевая задача (1) исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s(\Omega)$, содержащих также классические, вводимых нормами [1]

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_s^2 = \sum \|\varphi_r\|_s^2, \\ \|\varphi_r\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F\varphi_r|^2 (1 + |\alpha|)^{2s} d\alpha, \\ r = 1, 2, \dots, M, \\ |\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3, \\ F\varphi_r = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\mathbf{x}) e^{i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \\ \varphi_r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\varphi_r e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha, \\ \langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{H}_\lambda(\partial\Omega), \quad \lambda > s + 0, 5.$$

Гладкость границы облегчает проведение известных разложений в окрестности изучаемой точки при деформации границ в полупространство.

Воспользуемся общим представлением вектора решения задачи для произвольного выпуклого тела, полученным в [2], которое имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)} \times \\ \times \left[\mathbf{T}_+ (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) \mathbf{K}_r^{-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} - \right. \\ \left. - \mathbf{T}_- (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{K}_r^{-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu} \right] d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\left[\iint \omega \right] = \mathbf{L}_+ + \mathbf{L}_-,$$

$$\mathbf{L}_\pm (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu) e^{-i\alpha_3^\nu x_3^\nu} \rightarrow 0, \quad \text{Im } \alpha_3^\nu \rightarrow \pm\infty,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\pm (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s\pm}^\nu) = \\ = 2\pi i \lim_{\alpha_3^\nu \rightarrow z_{s\pm}^\nu} \mathbf{K}^{-1} (\alpha_3^\nu, -) \times \\ \times \mathbf{L}_\pm (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu) (\alpha_3^\nu - z_{s\pm}^\nu). \end{aligned}$$

Формула (2) построена в системе координат с началом на элементе разбиения единицы ε_ν , при этом ось x_3 направлена по внешней нормали по отношению к телу, оси x_1, x_2 лежат в касательной плоскости.

Устремим в представлении решения $x_3 = -\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$, и введем новый масштаб координат, положив

$$y_1 = \varepsilon^{-1} x_1, \quad y_2 = \varepsilon^{-1} x_2, \quad y_3 = -\varepsilon.$$

В новых осях координат окрестность начала координат деформируется в плоскость $oy_1 y_2$. Переходя в формуле (2) к указанному пределу в новых координатах, получим

$$\mathbf{T}_- (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu) \rightarrow 0$$

(используется система псевдодифференциальных уравнений, из которых получены неизвестные).

Формула (2) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)} \times \\ \times \mathbf{T}_+(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) \mathbf{K}_r^{-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu,$$

совпадающий с формулой для полупространства [2].

Здесь осуществлен возврат к старым координатам при малом x_3 . В дальнейшем ограничимся рассмотрением краевой задачи для одного дифференциального уравнения конечного порядка.

2. Рассмотрим задачу для полупространства, описываемого дифференциальными уравнениями конечного порядка в частных производных с постоянными коэффициентами с произвольными граничными условиями, не имеющими переменных вдоль границы коэффициентов. Двойная факторизация, сводящая систему дифференциальных уравнений к одному, позволяет ограничиться рассмотрением одного дифференциального уравнения произвольного порядка в полупространстве $x_3 \leq 0$.

Применив к дифференциальному уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами и граничным условиям преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 и вводя обозначение $x_3 = x$, приходим к рассмотрению граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}} + \dots + P_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_n \varphi = 0, \\ x \leq 0.$$

Ограничимся простейшими граничными условиями вида

$$\varphi^{(k)}(0) = f_k, \\ k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m < n. \quad (3)$$

Общий случай, когда задаются суммы производных, вытекает из (3).

Воспользуемся любым из методов, приводящих к преобразованию дифференциального уравнения в функциональное, диктуемое методом факторизации. Можно применить прямое интегрирование по частям дифференциального уравнения, умноженного на

$e^{i\alpha x}$, или воспользоваться формулой, содержащей внешнюю форму. В результате приходим к соотношению

$$- [(-i\alpha)^n + P_1(-i\alpha)^{n-1} + \dots + P_n] \Phi = \\ = \left[\sum_{s_1=1}^n (-i\alpha)^{s_1-1} \varphi^{(n-s_1)}(0) + \right. \\ \left. + P_1 \sum_{s_2=1}^{n-1} (-i\alpha)^{s_2-1} \varphi^{(n-1-s_2)}(0) + \dots \right. \\ \left. \dots + P_{n-1} \varphi(0) \right]. \quad (4)$$

Преобразуем соотношение (4). Определим коэффициенты при производных справа. Коэффициенты при производных имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(0) : & \quad (-i\alpha)^{n-1} + P_1(-i\alpha)^{n-2} + \dots \\ & \quad \dots + P_{n-1} = T_0(\alpha), \\ \varphi'(0) : & \quad (-i\alpha)^{n-2} + P_1(-i\alpha)^{n-3} + \dots \\ & \quad \dots + P_{n-2} = T_1(\alpha), \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \varphi^k(0) : & \quad (-i\alpha)^{n-k-1} + P_1(-i\alpha)^{n-k-2} + \dots \\ & \quad \dots + P_{n-k-1} = T_k(\alpha), \\ \varphi^{n-1}(0) : & \quad (-i\alpha)^0 = 1 = T_{n-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Последние формулы можно переписать с указанием порядка функций на бесконечности

$$\begin{aligned} \varphi(0); \quad T_0(\alpha) : & \quad (-i\alpha)^{n-1}, \\ \varphi'(0) : & \quad (-i\alpha)^{-1} [T_0(\alpha) - P_{n-1}] : \\ & \quad (-i\alpha)^{n-2}, \\ \varphi^{(2)}(\alpha); & \quad (-i\alpha)^{-2} [T_0(\alpha) - P_{n-1} - (-i\alpha)P_{n-2}] : \\ & \quad (-i\alpha)^{n-3}, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \varphi^{(k)}(\alpha); & \quad (-i\alpha)^{-k} [T_0(\alpha) - P_{n-1} - (-i\alpha)P_{n-2} - \\ & \quad \dots - (-i\alpha)^{k-1}P_{n-k}] : \\ & \quad (-i\alpha)^{n-1-k}, \\ \varphi^{(n-1)}(\alpha); & \quad (-i\alpha)^{-(n-1)} [T_0(\alpha) - P_{n-1} - \\ & \quad - (-i\alpha)P_{n-2} - \dots - (-i\alpha)^{n-2}P_1] : \\ & \quad (-i\alpha)^0 = 1. \end{aligned}$$

При этом в правой части имеем выражение

$$\begin{aligned} & - [(-i\alpha)T_0(\alpha) + P_n] \Phi = \\ & = T_0(\alpha)\varphi(0) + T_1(\alpha)\varphi'(0) + \dots \\ & \dots + T_k(\alpha)\varphi^{(K)}(0) + \dots + T_{n-1}(\alpha)\varphi^{(n-1)}. \end{aligned}$$

В результате из (4) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= - [(-i\alpha)T_0(\alpha) + P_n]^{-1} \times \\ & \times \left[T_0(\alpha)\varphi(0) + \dots + T_{n-1}(\alpha)\varphi^{(n-1)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда находим представление решения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (5)$$

Пусть α_r^+ , $r = 1, 2, \dots, m$ — корни характеристического уравнения

$$T(\alpha) = [(-i\alpha)T_0(\alpha) + P_n] = 0, \quad (6)$$

лежащие в верхней полуплоскости, а α_r^- , $r = m+1, \dots, n$ — корни, лежащие в нижней полуплоскости.

Применяя теорию вычетов к интегралу (5) и вычисляя $\varphi(x)$ в области $x > 0$ в предположении (ради простоты) однократности корней, получаем

$$\begin{aligned} R(\alpha_r^-) &= \left[T_0(\alpha_r^-)\varphi(0) + \dots \right. \\ & \left. \dots + T_{n-1}(\alpha_r^-)\varphi^{(n-1)}(0) \right] = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

$$r = m+1, \dots, n.$$

В последние соотношения вносятся заданные граничные условия вида (3).

Таким образом, система является нормально разрешимой, может иметь отличные от нуля дефектные числа, то есть ядро и коядро.

В системе (7) часть производных считаются известными, оставшиеся требуется определить через заданные. В условии (3) считаются заданными производные от неизвестной функции в нуле, что совсем не обязательно. В качестве граничных условий в нуле могут задаваться линейные комбинации производных. В этом случае выбранные производные из набора граничных условий выражаются через

оставшиеся и вносятся в систему (7). Остальные производные определяются из этой системы.

Допустим, алгебраическая система уравнений (7) имеет решение. Тогда функция $\Phi(\alpha)$ уже не имеет полюсов α_r^- , $r = m+1, \dots, n$.

Докажем, что найденная классическая составляющая выражения $\varphi(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям.

Рассмотрим функцию

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) (-i\alpha)^k e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма. Непрерывная составляющая, даваемая интегралом (8), тогда и только тогда стремится к $\varphi^{(k)}(0)$ при $x \rightarrow 0$, когда выполняются соотношения (7).

Для доказательства рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) (-i\alpha)^k &= (-i\alpha)^k T^{-1}(\alpha) R(\alpha) = \\ &= (-i\alpha)^k [(-i\alpha)T_0(\alpha) + P_n]^{-1} \times \\ & \times \left[T_0(\alpha)\varphi(0) + \dots + T_{n-1}(\alpha)\varphi^{(n-1)} \right]. \end{aligned}$$

Последнее можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) (-i\alpha)^k &= - [-i\alpha T_0(\alpha) + P_n]^{-1} \times \\ & \times \left\{ T_0(\alpha)\varphi(0) + (-i\alpha)^{-1} [T_0(\alpha) + P_{n-1}] \varphi'(0) + \right. \\ & + (-i\alpha)^{-k} [T_0(\alpha) + P_{n-1} + (-i\alpha)P_{n-2} + \dots \\ & \left. \dots + (-i\alpha)^{k-1} P_{n-k}] \varphi^{(k)}(0) - \varphi^{(n-1)} \right\} (-i\alpha)^k. \end{aligned}$$

Изучим соотношение более детально. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) (-i\alpha)^k &= - [(-i\alpha)T_0(\alpha) + P_n]^{-1} (-i\alpha)^k \times \\ & \times \left\{ [T_0(\alpha)] \varphi(0) + (-i\alpha)^{-1} [T_0(\alpha) + P_{n-1}] \varphi'(0) + \right. \\ & + (-i\alpha)^{-(k-1)} \left[T_0(\alpha) + P_{n-1} + (-i\alpha)P_{n-2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-i\alpha)^{k-2} P_{n-(k-1)} \right] \varphi^{(k-1)}(0) + \\ & + (-i\alpha)^{-k} [T_0(\alpha) + P_{n-1} + \dots \\ & \dots + (-i\alpha)^{k-1} P_{n-k}] \varphi^{(k)}(0) + \\ & + (-i\alpha)^{-(k+1)} [T_0(\alpha) + P_{n-1} + \dots \\ & \left. \dots + (-i\alpha)^k P_{n-(k+1)}] \varphi^{(k+1)}(0) + \dots + \varphi^{(n-1)}(0) \right\}. \end{aligned}$$

При $|\alpha| \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha)(-i\alpha)^k : & -\left\{ \varphi(0)(-i\alpha)^{k-1} + \right. \\ & + \varphi'(0)(-i\alpha)^{k-2} + \dots + \varphi^{(k-1)}(0) + \\ & + (-i\alpha)^{-1}\varphi^{(k)}(0) + (-i\alpha)^{-2}\varphi^{(k+1)}(0) + \dots \\ & \left. \dots + (-i\alpha)^{-n+k}\varphi^{(n-1)}(0) \right\}. \end{aligned}$$

Запишем теперь интеграл (8) в виде

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^{-1}(\alpha) R(\alpha) (-i\alpha)^k e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

По условиям леммы подынтегральная функция имеет полюсы только в верхней полуплоскости в точках α_r^+ , $r = 1, 2, \dots, m$. Под интегралом стоит рациональная функция, растущая на бесконечности как $(-i\alpha)^{k-1}$.

Вычтем и прибавим под интегралом растущий полином

$$\begin{aligned} D(\alpha) = & -\left\{ \varphi(0)(-i\alpha)^{k-1} + \right. \\ & \left. + \varphi'(0)(-i\alpha)^{k-2} + \dots + \varphi^{(k-1)}(0) \right\}, \end{aligned}$$

не изменив значения интеграла.

Тогда функция $\varphi^{(k)}(x)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\alpha)(-i\alpha)^k - D(\alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ & - \left\{ \varphi(0)\delta^{(k-1)}(x) + \varphi'(0)\delta^{(k-2)}(x) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \varphi^{(k-1)}(0)\delta(x) \right\} + i \sum_{r=1}^m R(\alpha_r^+) \times \\ & \times [T'(\alpha_r^+)]^{-1} (-i\alpha_r^+)^{k-1} e^{-i\alpha_r^+ x}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$x < 0.$$

Здесь принято во внимание интегральное представление производных δ -функции Дирака

$$\delta^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha)^k e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Происхождение обобщенной составляющей связано с дифференцированием функции $\varphi(x)$, продолженной нулем при переходе со скачком с Ω на всю ось ox .

Найдем значение последнего слагаемого в правой части (9), т. е. непрерывной функции при $x = 0$

$$J = i \sum_{r=1}^m R(\alpha_r^+) [T'(\alpha_r^+)]^{-1} (-i\alpha_r^+)^{k-1}.$$

Для этого рассмотрим интеграл по окружности C_w радиуса w , содержащей все полюсы в конечной части плоскости, которыми являются нули α_r^+ , α_r^- характеристического уравнения (6).

Отсюда находим функцию, предел которой на границе при $x = 0$ можно записать в виде

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{C_w} [\Phi(\alpha)(-i\alpha)^k - D(\alpha)] d\alpha.$$

Вычислим интеграл по контуру двумя способами, а именно, по вычетам в полюсах, находящихся внутри окружности, а затем по вычетам в полюсах вне окружности. Вне окружности имеется лишь однократный полюс в бесконечно удаленной точке первого порядка.

В результате несложных вычислений, учитывающих полученные ранее асимптотические оценки, а также с учетом выполнения соотношений (7), приходим к равенствам

$$N = J = \varphi^{(k)}(0). \quad (10)$$

Доказана достаточность. Необходимость доказывается от противного в предположении, что соотношения (7) не выполняются. В этом случае соотношение (10) выполняться не будет. Лемма доказана.

3. При рассмотрении краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) \varphi = \\ = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{s p m n k} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = g_s, \end{aligned}$$

$$s = 1, 2, \dots, P,$$

$$A_{s q m n k} = \text{const}, \quad \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_P\}$$

с граничными условиями (3), целесообразно сводить ее к краевой задаче с однородным дифференциальным уравнением. С этой целью решение исходной краевой задачи вектор-функцию φ необходимо искать в виде суммы двух решений

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x).$$

Здесь $\varphi_0(x)$ — решение краевой задачи для однородного дифференциального уравнения с измененными граничными условиями, а $\varphi_1(x)$ — частное решение для неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. При построении $\varphi_1(x)$ проще всего использовать фундаментальное решение неоднородного дифференциального уравнения во всем пространстве. Функция $\varphi_1(x)$ получается проектированием фундаментального решения на область рассмотрения краевой задачи Ω .

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим одно неоднородное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}} + \dots \\ \dots + P_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_n \varphi = g(x), \\ x \leq 0. \end{aligned}$$

Граничные условия по-прежнему имеют вид (3). Эту задачу можно свести к предыдущему случаю. Для этого нужно перейти к новому неизвестному $\varphi_0(x)$ по формуле

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x).$$

Здесь $\varphi_1(x)$ — частное решение неоднородной задачи, т.е. фундаментальное решение

неоднородного дифференциального уравнения. Оно строится применением преобразования Фурье к этому уравнению на всей оси, затем полученная функция проектируется на отрицательную полуось. В результате имеем

$$\varphi_1(x) = P_{[-\infty, 0]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^{-1}(\alpha) G(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Здесь $P_{[-\infty, 0]}$ — проектор на отрицательную полуось функции, описываемой интегралом.

Внося выражение $\varphi(x)$ в условия (3), получим граничные условия для функции $\varphi_0(x)$

$$\varphi_0^{(k)}(0) = f_k - \varphi_1^{(k)}(0),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m < n.$$

Вычисление значения в нуле осуществляется в интеграле предельным переходом слева.

Рассмотренный скалярный случай без труда переносится на векторный.

Литература

1. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. Т. 389. № 2. 2003. С. 184–188.
2. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // ДАН. Т. 403. № 6. 2005. С. 28–32.
3. Вшивик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. XII. Вып. 5(77). С. 3–122.