

УДК 534.1

EDN: MDCLTN DOI: 10.31429/vestnik-20-4-53-62

Обратная задача о восстановлении механических характеристик вязкоупругого слоя

П. С. Углич  

Южный федеральный университет, ул. Б. Садовая, 105/42, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

 Углич Павел Сергеевич; ORCID 0000-0001-7511-2910; SPIN 7444-1000; e-mail: psuglich@sfedu.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о вынужденных установившихся колебаниях поперечно неоднородного вязкоупругого слоя. После применения интегрального преобразования Фурье задача сведена к краевой задаче для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом пристрелки. Затем поле перемещения находится из обратного преобразования Фурье. Также рассмотрена задача о восстановлении закона распределения механических параметров по данным о волновом поле на верхней поверхности слоя. Обратная задача сведена к решению последовательности интегральных уравнений. Для решения интегральных уравнений использован модифицированный метод Воеводина, применимый в случае комплекснозначных ядра и правой части. Приведены результаты численных экспериментов для различных законов неоднородности при разных частотах. Также показано, что предложенный метод может быть применён и для восстановления вещественного закона неоднородности в чисто упругом случае.

Ключевые слова: вязкоупругость, обратные коэффициентные задачи, слоистые структуры.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Углич П. С. Обратная задача о восстановлении механических характеристик вязкоупругого слоя // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 4. С. 53–62. EDN: MDCLTN. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-53-62

Поступила 19 июля 2023 г. После доработки 28 августа 2023 г. Принято 11 октября 2023 г. Публикация 31 декабря 2023 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

On the Inverse Problem for the Mechanical Parameters Reconstruction of a Viscoelastic Layer

P. S. Uglich 

Southern Federal University, Bolshaya Sadovaya str, 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia

 Pavel S. Uglich; ORCID 0000-0001-7511-2910; e-mail: psuglich@sfedu.ru

Abstract. The problem of forced steady vibrations of a transversely inhomogeneous viscoelastic layer is considered. After the Fourier integral transform applying, the problem is reduced to a boundary value problem for the canonical system of ordinary differential equations, solved by the shooting method. Then the displacement field is found using the inverse Fourier transform. The problem of restoring the distribution law of mechanical parameters from wavefield data on the top surface of the layer is also considered. The inverse problem is reduced to the sequence of the Fredholm integral equations of the first kind with the smooth kernel. To solve the integral equations, the modified Voyevodin method, applicable in the case of complex-valued kernel and right-hand side, is used. The results of numerical experiments for solving the inverse problem at different oscillations frequencies for various laws of inhomogeneity are presented. It is also shown that the proposed method can also be used to recover the real parameter distribution law in the purely elastic case.

Keywords: viscoelasticity, inverse coefficient problems, layered structures.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Uglich, P. S., On the inverse problem for the mechanical parameters reconstruction of a viscoelastic layer. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 53–62. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-53-62

Received 19 July 2023. Revised 28 August 2023. Accepted 11 October 2023. Published 31 December 2023. The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Проблемы неразрушающего контроля функционально градиентных материалов имеют множество приложений в различных областях науки. Этим проблемам уделяется внимание во многих областях исследований [1–3].

Такие задачи часто решаются или в трансформантах Фурье [4, 5], или с помощью сведения к одномерной задаче, аналогичной обратной коэффициентной задаче для стержня (как это сделано, например, в [5] и цитируемых там работах).

Существуют и другие подходы к задаче идентификации неоднородных слоистых структур. В частности, в работах [6–9] и цитируемой там литературе описан подход к восстановлению скорости волны в неоднородном полупространстве, поле в котором удовлетворяет волновому уравнению, а скорость волны зависит от вертикальной координаты. Для реконструкции использовалась информация о поле перемещений в одной точке полупространства. Аналогичная задача для покрытия упругого шара рассмотрена в [10].

В работах [11, 12] построены алгоритмы восстановления скорости волн для нестационарного волнового уравнения в полупространстве и слое, если известно волновое поле в интегральных трансформантах на границе. Имеется также ряд работ, в которых рассматривается уравнение установившихся колебаний, исходной информацией служит волновое поле, ищется решение коэффициентной обратной задачи в заданном классе функций, параметризованных конечным числом параметров, и задача сводится к минимизации невязки (например, [13]).

Методика идентификации параметров вязкоупругих материалов для трехмерного образца представлена в [14]. В настоящей работе рассматривается решение обратной задачи определения закона распределения комплекснозначного механического параметра вязкоупругого материала и для ее решения требуется знание данных волнового поля только на конечной части верхней поверхности слоя (аналогично [15, 16]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся антиплоские колебания вязкоупругого слоя, занимающего область

$$S = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq h\},$$

где h — толщина слоя. Компоненты поля перемещений имеют вид

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{i\omega t}, \end{cases}$$

где ω — частота колебаний. Уравнение колебаний слоя в состоянии антиплоской деформации имеет вид:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \rho\omega^2 u = 0, \quad (1.1)$$

где $\rho = \rho(x_2)$ — плотность слоя, запятая означает производную. Напряжения связаны с перемещениями определяющими соотношениями

$$\sigma_{13} = \mu u_{,1}, \quad \sigma_{23} = \mu u_{,2}, \quad (1.2)$$

где $\mu = \mu(x_2, \omega)$ — комплекснозначный модуль сдвига.

Нижняя поверхность жёстко закреплена, на верхней действует касательная нагрузка

$$u|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{23}|_{x_2=h} = p(x_1). \quad (1.3)$$

Замыкают постановку задачи условия излучения, которые сформулированы на основе принципа предельного поглощения [17].

Вводим безразмерные величины по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= h\bar{x}_i, \quad u = h\bar{u}, \quad \mu = \mu_*\bar{\mu}, \quad \rho = \rho_*\bar{\rho}, \quad \sigma_{ij} = \mu_*\bar{\sigma}_{ij}, \\ \kappa^2 &= \rho_*\omega^2 h^2 \mu_*^{-1}, \quad p(x_1) = \mu_*\bar{p}(x_1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Надчёркнутые переменные в формулах (1.4) — безразмерные, μ_* — характерное значение функции $\text{Re } \mu(x_2, 0)$, ρ_* — характерное значение плотности. Всюду в дальнейшем надчёркивание будем опускать.

2. Решение прямой задачи

Для решения задачи (1.1)–(1.3), воспользуемся преобразованием Фурье в виде

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Исключая $\tilde{\sigma}_{23}$, сводим (1.1)–(1.3) к следующей краевой задаче относительно \tilde{u} , $\tilde{\sigma}_{23}$:

$$\begin{cases} \tilde{u}' = \tilde{\sigma}_{23} \mu^{-1}, \\ \tilde{\sigma}'_{23} = (\alpha^2 \mu - \rho \kappa^2) \tilde{u}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}|_{x_2=0} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{23}|_{x_2=1} = \tilde{p}(\alpha), \quad \tilde{p}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Краевая задача (2.1) легко может быть решена методом пристрелки. Обозначим через $U_2(\alpha, x_2)$ и $\Sigma_2(\alpha, x_2)$ решение задачи Коши для системы уравнений (2.1) со следующими начальными условиями:

$$U_2(\alpha, 0) = 0, \quad \Sigma_2(\alpha, 0) = 1 \quad (2.3)$$

Тогда решение задачи (2.1)–(2.2) в перемещениях принимает вид

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \frac{U_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (2.4)$$

где σ — контур интегрирования, обходящий особенности подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения [17]. Теперь решение задачи (2.1)–(2.2) может быть найдено как по формуле (2.4) при помощи непосредственного численного интегрирования, так и при помощи теории вычетов. Доказано [17, 18], что особенности подынтегрального выражения представляют из себя счётное множество полюсов первого порядка $\pm\alpha_n$. Полюсы удовлетворяют уравнению

$$\Sigma_2(\alpha, 1) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь и всюду в дальнейшем считаем, что нагрузка имеет вид силы единичной интенсивности, сосредоточенной в начале координат, то есть $p = \delta(x_1)$. В этом случае выражение для волнового поля u при $x_1 > 0$ принимает вид

$$u(x_1, x_2) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{U_2(\alpha, x_2)}{[\Sigma_2(\alpha, 1)]'_{\alpha}} \right\}_{\alpha=\alpha_n} e^{i\alpha_n x_1}. \quad (2.6)$$

В случае неоднородного слоя, значение выражения $[\Sigma_2(\alpha, 1)]'_{\alpha}$ может быть найдено из решения следующей задачи Коши [15]

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_2} \tilde{u} = \tilde{\sigma}_{23} \mu^{-1}, \\ \frac{d}{dx_2} \tilde{\sigma}_{23} = (\alpha^2 \mu - \rho \kappa^2) \tilde{u}, \\ \frac{d}{dx_2} \tilde{u}'_{\alpha} = (\tilde{\sigma}_{23})'_{\alpha} \mu^{-1}, \\ \frac{d}{dx_2} (\tilde{\sigma}_{23})'_{\alpha} = 2\alpha \mu \tilde{u} + (\alpha^2 \mu - \rho \kappa^2) \tilde{u}'_{\alpha}, \\ \tilde{u}|_{x_2=0} = \tilde{u}'_{\alpha}|_{x_2=0} = (\tilde{\sigma}_{23})'_{\alpha}|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{23}|_{x_2=0} = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

для системы уравнений относительно \tilde{u} , $\tilde{\sigma}_{23}$, \tilde{u}'_α и $(\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha$ построенной из системы (2.1) при помощи дифференцирования по α и добавления полученных уравнений к (2.1). Начальные условия для построенной системы также построены при помощи дифференцирования начальных условий (2.3). Таким образом, получены начальные условия которые совпадают с начальными условиями для U_2 , Σ_2 , а для \tilde{u}'_α и $(\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha$ получены однородные начальные условия. При этом в качестве $[\Sigma_2(\alpha,1)]'_\alpha$ берём значение $(\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha$, найденное из решения (2.7) при $x_2 = 1$.

3. Обратная задача

Рассмотрим обратную задачу о восстановлении характеристик. Предположим, что известно волновое поле на некотором участке верхней границы $[c, d]$ ($c > 0$)

$$u(x_1,1) = q(x_1), \quad x_1 \in [c, d],$$

и требуется восстановить закон распределения $\mu(x_2)$. Такие задачи являются нелинейными и могут быть решены методом линеаризации [15].

Вводим $\varepsilon > 0$ — формальный малый параметр. Разложим неизвестные функции, а также функцию $\mu(x_2)$ в ряд по параметру ε :

$$\begin{aligned} \mu(x_2, \kappa) &= \mu_0(x_2, \kappa) + \varepsilon\mu_1(x_2, \kappa) + \dots \\ \tilde{u}(\alpha, x_2) &= \tilde{u}_0(\alpha, x_2) + \varepsilon\tilde{u}_1(\alpha, x_2) + \dots \\ \tilde{\sigma}_{23} &= \tilde{\sigma}_0(\alpha, x_2) + \varepsilon\tilde{\sigma}_1(\alpha, x_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляем разложения (3.1) в (2.1)–(2.2) и собираем слагаемые одного порядка по ε .

При ε^0 получаем краевую задачу (2.1)–(2.2) при $\mu = \mu_0$. Её решение в трансформантах следующее:

$$\tilde{u}_0 = \frac{U_{20}(\alpha, x_2)}{\Sigma_{20}(\alpha, 1)}, \quad \tilde{\sigma}_0 = \frac{\Sigma_{20}(\alpha, x_2)}{\Sigma_{20}(\alpha, 1)}.$$

В последних выражениях U_{20} , Σ_{20} — решение задачи Коши для уравнений (2.1) при начальных условиях (2.3) при $\mu = \mu_0$.

После решения краевой задачи, полученной при ε^1 , и обращения преобразования Фурье, получаем соотношение, которое может быть истолковано как интегральное уравнение Фредгольма первого рода с гладким ядром

$$F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \mu_1(\xi, \kappa) K(x_1, \xi) d\xi, \quad c \leq x_1 \leq d. \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) введены следующие обозначения:

$$K(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left[\frac{\tilde{\sigma}_0^2(\alpha, x_2)}{\mu_0^2(x_2, \kappa)} + \alpha^2 \tilde{u}_0^2(\alpha, x_2) \right] e^{-i\alpha x_1} d\alpha,$$

$$F(x_1) = u_1(x_1, 1) = q(x_1) - u_0(x_1).$$

Через u_0 , σ_0 обозначено решение прямой задачи (2.1), соответствующее распределению модуля сдвига $\mu_0(x_2, \kappa)$. Для расчётов ядер интегральных уравнений используется теория вычетов, формулы для вычетов в двухкратных полюсах приведены в [15].

Ядра уравнений (3.2) выражаются через интегралы вида

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left[\frac{\varphi(\alpha, \xi)}{\psi(\alpha)} \right]^2 e^{-i\alpha x_1} d\alpha,$$

которые могут найдены с помощью теории вычетов по формулам

$$I = i \sum_{n=0}^{\infty} R_n e^{i\alpha_n x_1}, \quad x_1 > 0, \quad (3.3)$$

$$R_n = b_1^{-2} \{2a_0(\xi) [a_1(\xi) - a_0(\xi)b_1^{-1}b_2] - ix_1 a_0^2(\xi)\},$$

где $a_0(\xi) = \varphi(\alpha_n, \xi)$, $a_1(\xi) = \varphi'_\alpha(\alpha_n, \xi)$, $b_1 = \psi'(\alpha_n)$, $b_2 = 0,5\psi''(\alpha_n)$, α_n — корень дисперсионного уравнения (2.5). Значения a_i и b_i для формулы (3.3) могут быть найдены из решения задачи Коши, построенной аналогично (2.7), к которой добавлены уравнения и начальные условия для $(U_2)''_{\alpha\alpha}$ и $(\Sigma_2)''_{\alpha\alpha}$.

Рассмотрим уравнение (3.2). Выбираем некоторое постоянное начальное приближение μ_0 . После решения (2.1)–(2.2) при $\mu = \mu_0$ и обращения преобразования Фурье, находим u_0 , σ_0 . Затем, считая u_1 равной разности между наблюдаемым полем перемещений и полем u_0 , решаем уравнение (3.2) и находим μ_1 .

После добавления поправки μ_1 к функции μ_0 повторяем процедуру до тех пор, пока норма очередной поправки μ_1 не делается меньше некоторой погрешности ϵ или количество итераций N_{iter} не превысит некоторое заранее заданное число. В качестве нормы используется величина

$$\|\mu\| = \sqrt{\int_0^1 \mu(x_2, \kappa) \bar{\mu}(x_2, \kappa) dx_2}. \quad (3.4)$$

В последней формуле надчёркивание означает комплексное сопряжение.

4. Численные результаты

4.1. Прямая задача

Чтобы решить обратную коэффициентную задачу, следует знать поле перемещений на верхней поверхности слоя. Расчёты волнового поля на поверхности неоднородного слоя были произведены с помощью теории вычетов. Всюду в дальнейших вычислениях использован следующий закон изменения модуля сдвига [19]

$$\mu(x_2, \kappa) = \frac{h(x_2) + in\kappa g(x_2)}{1 + in\kappa}, \quad (4.1)$$

где n — время релаксации, $h(x_2)$ — мгновенный модуль, $g(x_2)$ — длительный модуль.

На рис. 1–2 представлены дисперсионные кривые для различных значений времени релаксации, модуль сдвига задан формулой (4.1). Ось ординат соответствует волновому числу κ , ось абсцисс соответствует значению корня дисперсионного уравнения, справа от оси ординат изображена вещественная часть корня, слева — мнимая часть корня со знаком минус. Каждая кривая на графиках соответствует корню дисперсионного уравнения, номер корня указан рядом с кривой.

На рис. 3–4 представлены графики перемещения u на верхней поверхности слоя, построенные при помощи теории вычетов. Ранее [15] было показано, что результаты, полученные с помощью теории вычетов, практически полностью совпадают с результатами, полученными непосредственным численным интегрированием. Ось ординат соответствует вещественной (сплошная линия) и мнимой (пунктир) частям поля перемещений.

4.2. Обратная задача

Согласно предложенной схеме проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению неизвестных комплекснозначных функций $\mu = \mu(x_2, \kappa)$ для вязкоупругого слоя с использованием в качестве исходной информации поля перемещений на отрезке $[c, d] = [0, 1]$. Результаты изображены на рис. 4–8. Выбрано постоянное значение плотности $\rho = 1$.

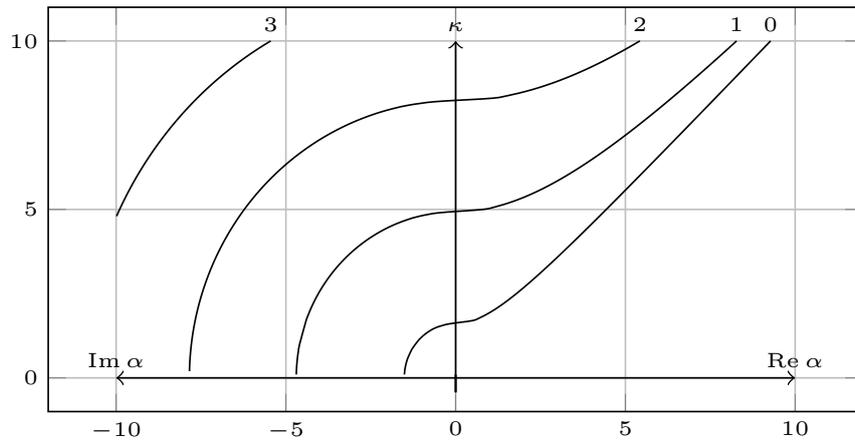


Рис. 1. Дисперсионные кривые в случае $\rho(x_2) = 1$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 + 0,2x_2$, $n = 0$ (чисто упругий случай)

Fig. 1. Dispersion curves in the case $\rho(x_2) = 1$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 + 0.2x_2$, $n = 0$ (elastic case)

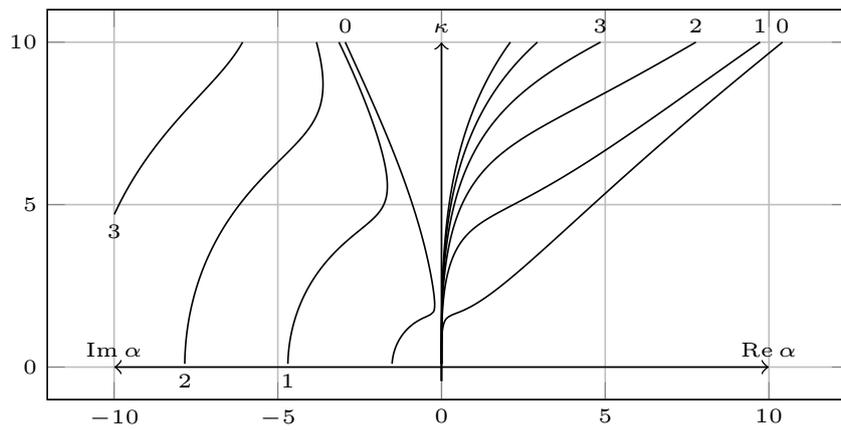


Рис. 2. Дисперсионные кривые в случае $\rho(x_2) = 1$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 + 0,2x_2$, $n = 0,1$

Fig. 2. Dispersion curves in the case $\rho(x_2) = 1$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 + 0.2x_2$, $n = 0.1$

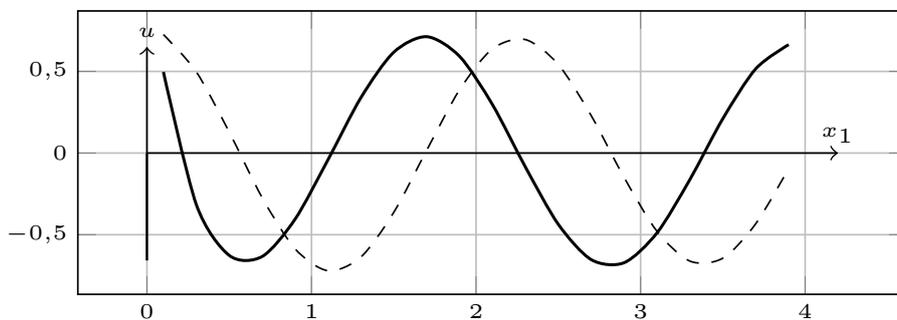


Рис. 3. Перемещение на верхней поверхности слоя в случае $\rho = 1$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 - 0,2e^{x_2}$, $n = 0,01$, $\kappa = 2$

Fig. 3. Displacement on the top surface of the layer in the case $\rho = 1$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 - 0.2e^{x_2}$, $n = 0.01$, $\kappa = 2$

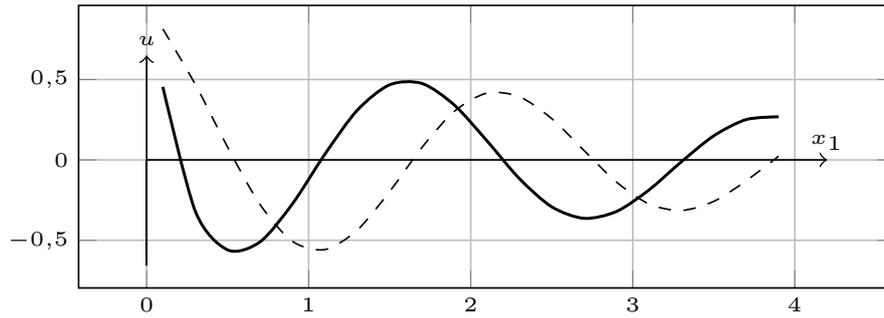


Рис. 4. Перемещение на верхней поверхности слоя в случае $\rho = 1$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 - 0,2e^{x_2}$, $n = 0,1$, $\kappa = 2$

Fig. 4. Displacement on the top surface of the layer in the case $\rho = 1$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $h(x_2) = 1 - 0.2e^{x_2}$, $n = 0.1$, $\kappa = 2$

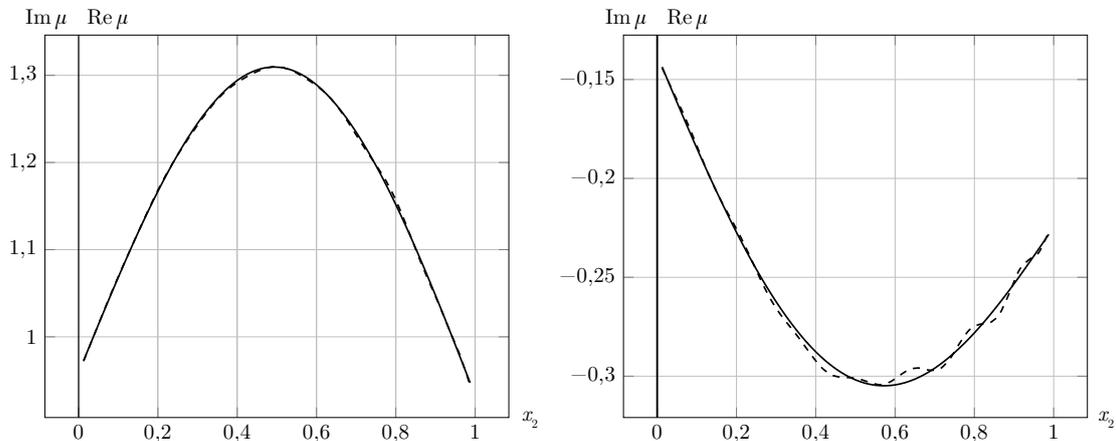


Рис. 5. Решение обратной задачи в случае $\kappa = 3$, $h(x_2) = 1 + 0,4 \sin \pi x_2$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $n = 0,2$, $N_{iter} = 8$

Fig. 5. Solution of the inverse problem in the case $\kappa = 3$, $h(x_2) = 1 + 0.4 \sin \pi x_2$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $n = 0.2$, $N_{iter} = 8$

В качестве начального приближения использована функция $\mu_0 = 1$. На графиках представлены вещественная (слева) и мнимая (справа) части функции распределения μ . Сплошная линия означает точное значение функции, пунктирная линия — восстановленное. Ось абсцисс соответствует поперечной координате.

Результаты решения обратной задачи показаны ниже. В качестве исходной информации использовано перемещение на отрезке верхней поверхности. В этом случае формула (2.6) использовалась для расчёта как наблюдаемого поля перемещений, так и правых частей уравнений. Для расчёта ядер уравнений использовались формулы (3.3). При расчёте ядер и правых частей уравнения (3.2) законы распределения механических характеристик аппроксимировались ломаной линией. Интеграл по отрезку $[a, b] = [0, 1]$ в уравнении (3.2) заменяются конечной суммой по формуле трапеций с количеством отрезков $N = 40$. Правая часть рассчитана на отрезке $[c, d]$ в N равномерно распределенных точках.

Для решения интегральных уравнений Фредгольма с гладким ядром использован метод регуляризации Тихонова [20]. При решении системы линейных алгебраических уравнений использован модифицированный метод Воеводина [20], предназначенный для систем с комплекснозначными ядром и правой частью. Обратная задача решается с точностью $\epsilon = 10^{-4}$.

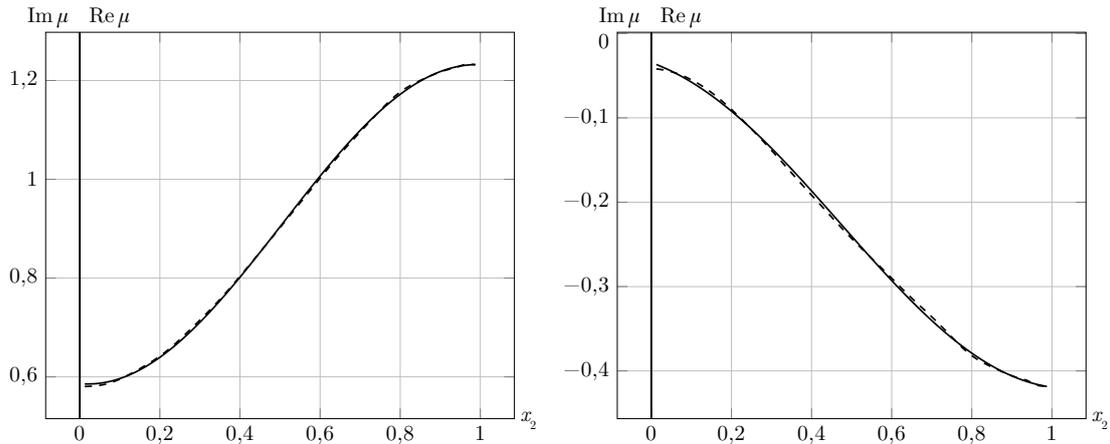


Рис. 6. Решение обратной задачи в случае $\kappa = 2$, $h(x_2) = 1 - 0,4 \cos \pi x_2$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $n = 0,2$, $N_{iter} = 12$

Fig. 6. Solution of the inverse problem in the case $\kappa = 2$, $h(x_2) = 1 - 0.4 \cos \pi x_2$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $n = 0.2$, $N_{iter} = 12$

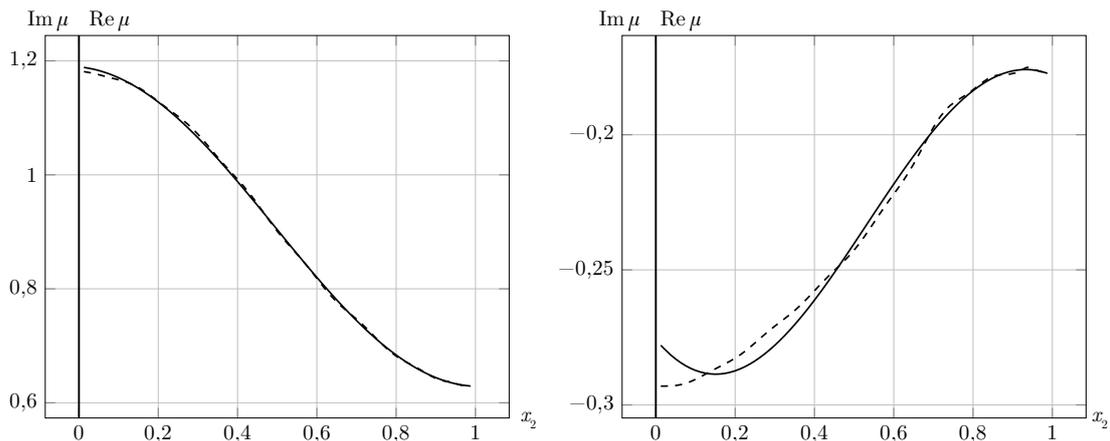


Рис. 7. Решение обратной задачи в случае $\kappa = 2$, $h(x_2) = 1 + 0,3 \cos \pi x_2$, $g(x_2) = 0,5e^{-x_2}$, $n = 0,2$, $N_{iter} = 10$

Fig. 7. Solution of the inverse problem in the case $\kappa = 2$, $h(x_2) = 1 + 0.3 \cos \pi x_2$, $g(x_2) = 0.5e^{-x_2}$, $n = 0.2$, $N_{iter} = 10$

На рис. 8–9 показаны результаты восстановления вещественного модуля сдвига. Как видно из приведённых результатов, модифицированный метод Воеводина может также быть использован и для восстановления вещественных законов распределения механических параметров. Как видно из приведённых результатов, получено решение, мнимая часть которого практически равна нулю.

Заключение

Таким образом, удалось показать, что подход, ранее использованный для решения задач о восстановлении механических параметров в чисто упругом слое [15], может быть использован и в случае вязкоупругого слоя. При этом возможно применение метода Воеводина, модифицированного для случая комплекснозначной матрицы. Обычный метод воеводина основан

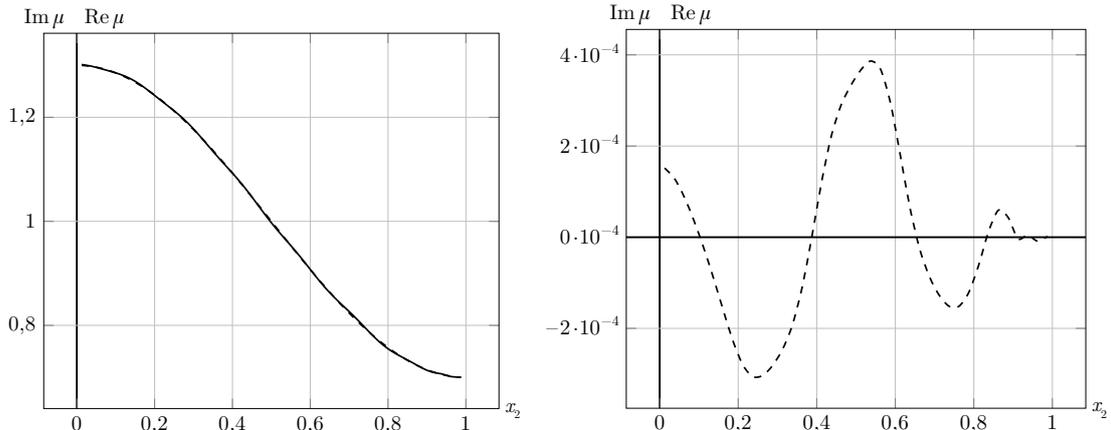


Рис. 8. Решение обратной задачи в случае $\kappa = 2$, $h(r) = 1 + 0,3 \cos \pi x_2$, $n = 0,0$, $N_{iter} = 10$

Fig. 8. Solution of the inverse problem in the case $\kappa = 2$, $h(r) = 1 + 0.3 \cos \pi x_2$, $n = 0.0$, $N_{iter} = 10$

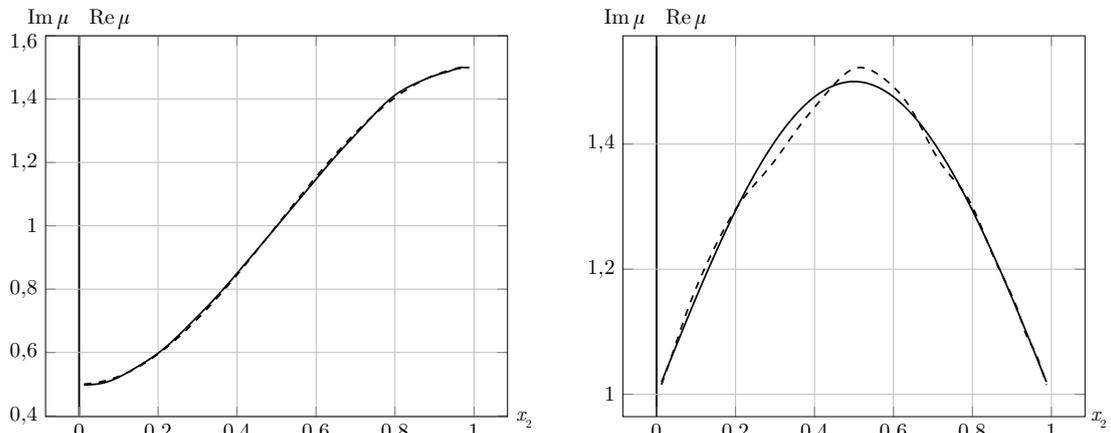


Рис. 9. Решение обратной задачи в случае $\kappa = 2$, $h(x_2) = 1 - 0,5 \cos \pi x_2$, $n = 0,0$, $N_{iter} = 10$ (слева), $\kappa_2 = 2$, $h(x_2) = 1 - 0,5 \cos \pi x_2$, $n = 0,0$, $N_{iter} = 10$ (справа)

Fig. 9. Solution of the inverse problem in the case $\kappa = 2$, $h(x_2) = 1 - 0.5 \cos \pi x_2$, $n = 0.0$, $N_{iter} = 10$ (on the left), and $\kappa_2 = 2$, $h(x_2) = 1 - 0.5 \cos \pi x_2$, $n = 0.0$, $N_{iter} = 10$ (on the right)

на QPR-разложении матрицы исходной системы и сведении её к трёхдиагональному виду. Такая же процедура оказалась применима и в случае комплекснозначной матрицы. Кроме того, модифицированный метод Воеводина для комплекснозначной матрицы показал хорошие результаты и в чисто упругом случае, что позволяет использовать информацию о волновых полях на поверхности слоя более полным образом.

Литература [References]

1. Aulova, A, Govekar, E, Emri, I., Determination of relaxation modulus of time-dependent materials using neural networks. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2017, vol. 21, pp. 331–349. DOI: [10.1007/s11043-016-9332-x](https://doi.org/10.1007/s11043-016-9332-x)
2. Vasu, R. M, Roy, D., *Ultrasound-Mediated Imaging of Soft Materials*, IOP Publishing, 2014.
3. Li Guo-Yang, Cao Yanping, Mechanics of ultrasound elastography. *Proc. of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2017, vol. 473, pp. 1–45. DOI: [10.1098/rspa.2016.0841](https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0841)

4. Vatul'yan, A.O., Satunovski, P.S., On the determination of elastic moduli in analysis of fluctuations in an inhomogeneous layer. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, pp. 253–255. DOI: [10.1134/S1028335807050035](https://doi.org/10.1134/S1028335807050035)
5. Vatul'yan, A. O., Yavruyan, O. V., Bogachev, I. V., Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer. *International Journal of Solids and Structures*. 2014, vol. 51, pp. 2238–2243. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2014.02.032](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.02.032)
6. Tamasan, A., Timonov, A., On a new approach to frequency sounding of layered media. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2008, vol. 100, pp. 470–486. DOI: [10.1080/01630560802001023](https://doi.org/10.1080/01630560802001023)
7. Timonov, A., Iterative solutions of the inverse problems of frequency sounding and electrical prospecting of layered media. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020, vol. 22, iss. 8, pp. 1329–1344. DOI: [10.1080/17415977.2013.872101](https://doi.org/10.1080/17415977.2013.872101)
8. Titov, S. A., Maev, R. G., Determination of isotropic layer parameters from spatiotemporal signals of an ultrasonic array. *Acoustical Physics*, 2013, vol. 59, iss. 5, pp. 600–607. DOI: [10.1134/S1063771013050163](https://doi.org/10.1134/S1063771013050163)
9. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties. *Acoustical Physics*. 2015, vol. 61, iss. 5, pp. 504–510. DOI: [10.1134/S1063771015050140](https://doi.org/10.1134/S1063771015050140)
10. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A., Modeling an Inhomogeneous Coating of an Elastic Sphere with the Required Sound Reflecting Properties. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, pp. 333–340.
11. Romanov, V. G., Weng, C. I., Chen, T. C., An inverse problem for a layered elastic plate. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, vol. 137, iss. 2–3, pp. 349–369. DOI: [10.1016/S0096-3003\(02\)00130-3](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00130-3)
12. Romanov, V. G., On the problem of determining the parameters of a layered elastic medium and an impulse source. *Siberian Mathematical Journal*, 2008, vol. 49, no. 5, pp. 919–943.
13. Honglei Zhang, Xuehui Lin, Yanqun Wang, Qian Zhang, Yilan Kang, Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2010, vol. 23, iss. 2, pp. 29–35. DOI: [10.1016/S0894-9166\(10\)60004-3](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(10)60004-3)
14. Willis, R., Lei, Wu, Berthelot, Y., Determination of the complex Young and shear dynamic moduli of viscoelastic materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2001, vol. 109, iss. 2, pp. 611–621. DOI: [10.1121/1.1342003](https://doi.org/10.1121/1.1342003)
15. Vatul'yan, A. O., Uglich, P. S., Reconstruction of inhomogeneous characteristics of a transverse inhomogeneous layer in antiplane vibrations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, iss. 3, pp. 499–505. DOI: [10.1134/S0021894414030122](https://doi.org/10.1134/S0021894414030122)
16. Vatul'yan, A. O., Uglich, P. S., Yavruyan, O. V., Inverse coefficient problem of the variable properties reconstruction for the viscoelastic cylindrical waveguide. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 2020, vol. 100. DOI: [10.1002/zamm.201900170](https://doi.org/10.1002/zamm.201900170)
17. Ворович, И. И., Бабешко, В. А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I. I., Babeshko, V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic Mixed Problems of Elasticity for Non-classical Domains*, Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
18. Гринченко, В. Т., Мелешко, В. В., *Гармонические колебания и волны в упругих телах*. Киев, Наукова думка, 1981. [Grinchenko, V. T., Meleshko, V. V. *Garmonicheskije kolebaniya i volny v uprugikh telakh = Harmonic vibrations and waves in elastic bodies*. Kiev, Naukova dumka, 1981. (in Russian)]
19. Christensen, R. M. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. N.Y., London, Academic Press, 1971.
20. Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1986. [Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach = Incorrect problems solution methods*. Nauka, Moscow, 1986. (in Russian)]