УДК 539.3 EDN: FVJSZJ DOI: 10.31429/vestnik-20-3-24-29

Разработка метода точного решения систем интегральных уравнений Винера–Хопфа для моделирования самоорганизации и самосборки наночастиц сложной реологии

В. А. Бабешко✉, **О. В. Евдокимова**, **О. М. Бабешко**, **Д. А. Хрипков**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Владимир Андреевич; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. В работе излагается метод точного решения системы интегральных уравнений Винера–Хопфа, возникающих при построении наночастиц из материалов сложных реологий. Предполагается, что контактная задача для наночастицы сформулирована на границе многослойного многокомпонентного материала. Предполагается, что наночастицы имеют носители в областях неклассической формы, например, в простейшем случае — полосовой. Преобразованием Фурье по координате, направленной по оси полосы, задача становится одномерной и ее точное решение можно строить, пользуясь решением уравнения Винера–Хопфа. В случаях материалов сложных реологий решение становится многокомпонентным и получается система интегральных уравнений Винера–Хопфа. Таким же образом можно строить решения и в других неклассических областях. В области контакта могут быть любые условия механического, физического или химического характера, приводящие граничную задачу к системе произвольного конечного числа интегральных уравнений Винера–Хопфа с мероморфной матрицей в ядре. Применен новый универсальный метод моделирования, разработанный ранее авторами. Он позволяет представлять решения векторных граничных задач в виде разложения по решениям скалярных граничных задач. В совокупности с факторизационным подходом это позволило впервые построить точное решение такой системы интегральных уравнений. В статье приводится краткое изложение метода.

Ключевые слова: наночастицы, самоорганизация, самосборка, система интегральных уравнений Винера-Хопфа, граничные задачи.

Финансирование. Работа финансово поддержана Российским научным фондом (проект № 22-21-00128).

Цитирование: Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Хрипков Д. А. Разработка метода точного решения систем интегральных уравнений Винера-Хопфа для моделирования самоорганизации и самосборки наночастиц сложной реологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 24–29. EDN: FVJSZJ. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-24-29

Поступила 16 августа 2023 г. После доработки 28 августа 2023 г. Принято 1 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Development of a Method for the Exact Solution of Systems of Wiener–Hopf Integral Equations for Modeling of Self-Organization and Self-Assembly of Nanoparticles of Complex Rheology

V. A. Babeshko✉, **O. V. Evdokimova**, **O. M. Babeshko**, **D. A. Khripkov**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Vladimir A. Babeshko; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The paper describes a method for the exact solution of a system of Wiener–Hopf integral equations arising during the construction of nano-particles from materials of complex rheologies. It is assumed that the contact problem for a nanoparticle is formulated at the boundary of a multilayer multicomponent material. It is assumed that nano particles have carriers in areas of non-classical shape, for example, in the simplest case, band-shaped. By the Fourier transform along the coordinate directed along the axis of the strip, the problem becomes one-dimensional and its exact solution can be constructed using the solution of the Wiener–Hopf equation. In the case of materials of complex rheologies, the solution becomes multicomponent and a system of Wiener–Hopf integral equations is obtained. In the same way, solutions can be built in other non-classical areas. In the contact area, there can be any conditions of a mechanical, physical or chemical nature that lead the boundary problem to a system of arbitrary finite number of Wiener–Hopf integral equations with a meromorphic matrix in the core. A new universal modeling method developed earlier by the authors has been applied. It allows you to represent the solutions of vector boundary value problems in the form of decomposition by solutions of scalar boundary value problems. Together with the factorization approach, this made it possible for the first time to construct an exact solution of such a system of integral equations. The article provides a summary of the method.

Keywords: nanoparticles, self-organization, self-assembly, system of Wiener-Hopf integral equations, boundary value problems.

Funding. The work was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00128).

Cite as: Babeshko, V. A., Evdokimova, O. V., Babeshko, O. M., Khripkov, D. A., Development of a method for the exact solution of systems of Wiener–Hopf integral equations for modeling of self-organization and self-assembly of nanoparticles of complex rheology. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 24–29. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-24-29

Received 16 August 2023. Revised 28 August 2023. Accepted 1 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

Смешанные задачи, поставленные для многокомпонентных слоистых сред, играют важную роль в самых разных областях практики. Они возникают в проблемах прочности и разрушения [1–3], распространения волн в упругих телах [4, 5], акустике [6], неразрушающих методах контроля [7], теории рассеивания электро-магнитных волн и создании элементной базы электроники [8, 9], теории волн в жидкости [10], геофизике [11], фильтрации сигналов [12–15], экономике и финансах [16], в теории случайных процессов [17–19], в теории резонансов и локализаций процессов [20], при развитии теории блочного элемента в дифференциальных и интегральных уравнениях [21] и в других областях. Как правило, они сводятся к решению систем интегральных уравнений Винера–Хопфа.

В случае многокомпонентной слоистой среды конечной толщины эти системы интегральных уравнений имеют матричное ядро, которое обладает следующим свойством. Преобразования Фурье элементов матричного ядра интегрального уравнений являются мероморфными функциями. Как описано в статье [22], методы точного решения такой системы интегральных уравнений не были разработаны. В настоящей статье, благодаря разработке метода факторизации в виде суммы оператора бесконечной системы, удается точно решать бесконечные системы интегральных уравнений, а с ними и сами системы интегральных уравнений. Настоящую работу следует рассматривать как развитие ранее изложенного подхода [22] к исследованию свойств многокомпонентных материалов.

1. Постановка задачи

Исследуется традиционная система интегральных уравнений Винера–Хопфа порядка N, описывающая контактную задачу для полубесконечного штампа на многокомпонентной среде. Система имеет ядро, представимое матрицей-функцией, элементы которой являются произвольными мероморфными функциями, свойственными смешанным задачам механики и физики [22]

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathbf{f}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\},$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathbf{K}(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha, \quad \mathbf{K}(\alpha) = \begin{Vmatrix} K_{11}(\alpha) & K_{12}(\alpha) & \ldots & K_{1N}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1}(\alpha) & K_{N2}(\alpha) & \ldots & K_{NN}(\alpha) \end{Vmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\}.$$

Здесь вектор $\boldsymbol{\varphi}$ является искомым, а вектор $\mathbf{f}(x)$ — заданным.

Будем считать, что элементы $K_{mp}(\alpha)$, $m, p = 1, 2, \ldots, N$ матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ в (1.1) являются в общем случае мероморфными функциями переменного α. В смешанных задачах механики и математической физики мероморфные функции $K_{mp}(\alpha)$ и определитель $\det \mathbf{K}(\alpha)$ имеют следующее представление и асимптотическое поведение [2, 5]:

$$K_{mp}(\alpha) = D^{-1}(\alpha)L_{mp}(\alpha), \quad \det \mathbf{K}(\alpha) = D^{-N}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \det \|L_{mp}(\alpha)\|,$$

$$K_{mp}(\alpha) = T_{mp}|\alpha|^{-1}(1 + o(\alpha)), \quad m = p, \quad K_{mp}(\alpha) = T_{mp}\alpha^{-1}(1 + o(\alpha)),$$
$$m \neq p, \quad |\alpha| \gg 1, \quad p = 1,2, \ldots, N.$$

Применим для анализа и преобразований системы интегральных уравнений результат, полученный в работе [22]. Эти преобразования приводят к системе интегральных уравнений вида

$$\int\limits_0^\infty m_p(x - \xi)\chi_p(\xi)\,\mathrm{d}\xi = h_p(x), \quad x \geqslant 0, \quad p = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\mathbf{M}_p\mathbf{X}_p = \mathbf{H}_p,$$

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{F}_1 - \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}\left[\mathbf{A}\mathbf{N}_p(z_{mp})\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_1\right]\right)e^{-i\eta x}\,\mathrm{d}\eta, \tag{1.2}$$

$$h_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\mathbf{A}\mathbf{N}_p(z_{mp})\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_1\right]e^{-i\eta x}\,\mathrm{d}\eta, \quad p = 2, \ldots, N,$$

$$m_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_p(u)e^{-iux}\,\mathrm{d}u,$$

$$\mathbf{A}_p\mathbf{Y}_1 = \mathbf{F}_1 - \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}[\mathbf{G}_p + \mathbf{F}_1], \quad p = 1, \qquad \mathbf{A}_p\mathbf{Y}_p = \frac{1}{2}[\mathbf{G}_p + \mathbf{F}_1], \quad p = 2, 3, \ldots, N, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{G}_p = \{G_{kp}\}, \quad \mathbf{G}_p = \mathbf{A}\mathbf{N}_p(z_{mp})\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_p, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{F}_1,$$

$$\mathbf{A}_p = \left\|(\xi_k - z_{mp})^{-1}\right\|, \quad f_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_p(\eta)e^{-i\eta x}\,\mathrm{d}\eta, \quad p = 1, 2, \ldots, N,$$

$$G_{kp} = -\sum_{m=1}^{\infty}(\xi_k - z_m)^{-1}N_p(z_{mp})\sum_{q=1}^{\infty}t_{mq}(p)\sum_{r=1}^{\infty}\tau_{qr}(\eta + \xi_r)^{-1}B_p,$$

$$G_{k1} = -(\eta + \xi_r)^{-1}B_1(\eta), \quad g_1(x, \eta) = e^{-i\eta x}B_1(\eta),$$

$$g_p(x, \eta) = -\sum_{m=1}^{\infty}(\exp iz_{mp}x)N_p(z_{mp})\sum_{q=1}^{\infty}t_{mq}(p)\sum_{r=1}^{\infty}\tau_{qr}(\eta + \xi_r)^{-1}B_p, \quad p = 2, 3, \ldots, N,$$

$$h_1(x) = g_1(x, \eta) - \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}[g_p(x, \eta) + g_1(x, \eta)], \quad h_p(x) = \frac{1}{2}[g_p(x, \eta) + g_1(x, \eta)],$$

$$\mathbf{A}_p\mathbf{Y}_p = \frac{1}{2}[\mathbf{G}_p + \mathbf{F}_1], \quad p = 2, 3, \ldots, N,$$

$$\mathbf{G}_p = \{G_{kp}\}, \quad \mathbf{G}_p = \mathbf{A}\mathbf{N}_p(z_{mp})\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_p, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{F}_1,$$

$$\mathbf{A}_p = \left\|(\xi_k - z_{mp})^{-1}\right\|, \quad \mathbf{F}_p = \left\{-(\eta + \xi_r)^{-1}B_p\right\},$$

$$\mathbf{F}_1 - \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}[\mathbf{G}_p + \mathbf{F}_1] = \mathbf{R}_1\mathbf{F}_1, \quad \frac{1}{2}[\mathbf{G}_p + \mathbf{F}_1] = \mathbf{R}_p\mathbf{F}_p,$$

$$\mathbf{R} = \|\mathbf{R}_p\|, \quad \mathbf{F} = \|\mathbf{F}_p\|, \quad \mathbf{Y} = \|\mathbf{Y}_p\|, \quad \mathbf{\Phi} = \|\mathbf{\Phi}_p\|,$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{RF}, \quad \mathbf{MY} = \mathbf{RF},$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{MY}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{RF}, \quad \mathbf{K\Phi} = \mathbf{KK}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{MY} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{MY} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{RF} = \mathbf{F}.$$

Обозначения ряда параметров, опущенных в настоящей статье ради краткости, имеются в [22]. Интегральные уравнения решаются традиционным методом Винера–Хопфа. Их точные решения строятся в результате применения слева к системам (1.3) обратных матриц, имеющих вид

$$\mathbf{A}_p^{-1} = \|\tau_{pgr}\|, \quad \tau_{pgr} = \frac{1}{M'_{p+}(-z_{gp})(\xi_r - z_{gp})[D_+^{-1}(-\xi_r)]'}.$$

Найдем участвующий в представлении решения параметр $B_p(\eta)$

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{m=1}^{\infty} y_{pm}e^{iz_{mp}x}. \tag{1.4}$$

Определение $B_p(\eta)$ достигается требованием совпадения левых и правых частей системы интегральных уравнений Винера–Хопфа (1.1). Используем построенные решения и внесем их в систему интегральных уравнений, получим соотношения

$$\mathbf{K}(\eta)\mathbf{B}(\eta) = \mathbf{A}(\eta),$$

$$\sum_{s=1}^{N} K_{ps}(\eta)B_s = A_p(\eta), \quad \mathbf{K}(\eta) = \|K_{ps}(\eta)\|, \quad \mathbf{B} = \{B_s\}, \quad \mathbf{A}(\eta) = \{A_p(\eta)\}.$$

Отсюда определяем искомый параметр

$$\mathbf{B}(\eta) = \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{A}(\eta).$$

Внесем найденные значения в правые части выражения для $\chi_{p\eta}(x)$, y_{sm}. Тогда получаем точное совпадение левых и правых частей системы уравнений Винера–Хопфа. Искомый вектор $\mathbf{X}_\eta = \{\chi_{1\eta}, \chi_{2\eta}, \ldots, \chi_{N\eta}\}$ принимает вид

$$\mathbf{X}_\eta(x) = \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{A}(\eta)e^{-i\eta x} + \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{Y}(x),$$

$$\mathbf{Y}(x) = \left\{\sum_{m=1}^{\infty} y_{pm}e^{iz_{mp}x}\right\}, \quad \mathbf{K}^{-1}(\eta) = \|g_{ps}\|.$$

В координатной форме соотношения можно представить в форме

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{s=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} g_{ps}y_{sm}e^{iz_{ms}x}, \quad B_p(\eta) = \sum_{s=1}^{N} g_{ps}A_p(\eta).$$

Для нахождения решения интегрального уравнений $\varphi = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N\}$ вычислим преобразование Фурье от функции $\chi_{p\eta}(x)$, имеем

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{s=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} g_{ps}y_{sm}e^{iz_{ms}x}, \quad B_p(\eta) = \sum_{s=1}^{N} g_{ps}A_p(\eta),$$

$$\mathrm{X}_p(\alpha) = B_p(\eta)\frac{i}{\alpha - \eta} + \sum_{s=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} g_{ps}y_{sm}\frac{i}{\alpha + z_{ms}}, \quad B_p(\eta) = \sum_{s=1}^{N} g_{ps}A_p(\eta),$$

$$\int_0^\infty e^{-i\eta x+i\alpha x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{-i\eta+i\alpha}=\frac{i}{\alpha-\eta},\quad \int_0^\infty e^{iz_{ms}x+i\alpha x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{iz_{ms}+i\alpha}=\frac{i}{\alpha+z_{ms}}.$$

Для получения вектора $\varphi(x)$, представляющего решение системы интегральных уравнений Винера–Хопфа (1.1), используем формулы преобразования Галеркиным [22]. С учетом того, что решалась не только система дифференциальных уравнений, но и система интегральных уравнений, эти формулы в преобразованиях Фурье приобретают вид $\mathbf{\Phi}(\alpha)=\mathbf{K}^{-1}(\alpha)\mathrm{X}(\alpha)$.

Отсюда вектор $\varphi(x)$, представляющий решение системы интегральных уравнений (1.1), имеет вид

$$\boldsymbol{\varphi}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}^{-1}(\alpha)\mathbf{X}(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha.$$

В том случае, если матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha)$ непрерывно переходит в функционально-коммутативную, построенное решение переходит в решение, получаемое простым обращением системы с функционально-коммутативными матрицами-функциями для частного случая.

Выводы

Таким образом, впервые построено точное решение бесконечной системы алгебраических уравнений, благодаря использованию нового универсального метода моделирования [21] и с учетом [22], разработанного авторами метода факторизации в виде суммы оператора бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Этот подход не только позволит решать смешанные и контактные задачи для многокомпонентных материалов, но и даст возможность решения граничных задач для дифференциальных уравнений для материалов сложных реологий.

Литература [References]

1. Freund, L.B., *Dynamic Fracture Mechanics.* Cambridge, UK. Cambridge University Press. 1998.
2. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Москва, Наука, 1974. [Vorovich, I.I., Alexandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical mixed problems of elasticity theory.* Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]
3. Храпков, А.А., Решения задач в замкнутой формы об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричной выемкой на вершине. *ПММ*, 1971, vol. 35, pp. 1009–1016. [Khrapkov, A. A., Solutions of closed-form problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with an asymmetric notch at the top. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, pp. 1009–1016. (in Russian)]
4. Achenbach, J.D., *Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.* Amsterdam, North-Holland, 1973.
5. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
6. Abrahams, I.D., Wickham, G.R., General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, pp. 819–838.
7. Norris, A.N., Achenbach, J.D., Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material. *Q. J. Apple. Math. Mech.*, 1984, vol. 37, pp. 565–580.
8. Sautbekov, S., Nilsson, B., Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener-Hopf method. *AIP Conf. Proc.*, 2009, vol. 1106, pp. 110–117.
9. Нобл Б. *Метод Винера-Хопфа.* Мовсква, Иностранная литература, 1962. [Noble, B., *Metod Vinera-Khopfa = Wiener-Hopf method.* Moscow, Inostrannaya literatura, 1962. (in Russian)]
10. Chakrabarti, A., George, A.J., Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Appl. Math. Lett.*, 1994, vol. 7, pp. 43–47.

11. Davis, A.M.J., Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1987, vol. 39, pp. 25–55.

12. Payandeh Najafabadi, A.T., Kucerovsky, D., Exact solutions for a class matrix Riemann-Hilbert problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2014, vol. 79, pp. 109-123. DOI: 10.1093/imamat/hxs044

13. Anderson, B.D., Moore, J.B., *Optimal Filtering.* New York, SDover Publications, 2005.

14. Litvinchuk, G.S., Spitkoskii, I.M., *Factorization of Measurable Matrix Functions.* Boston, Birkhäuser Verlag Basel, 1987.

15. Адуков, В.М., Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций. *Алгебра и анализ*, 1992, т. 4, вып. 1, с. 54–74. [Adukov, V.M., Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix-functions. *Algebra i analiz = Algebra and Analysis*, 1992, vol. 4, iss. 1, pp. 54–74. (in Russian)]

16. Fusai, G., Abrahams, I.D., Sgarra, C., An exact analytical solution for discrete barrier options. *Finance Stoch.*, 2006, vol. 10, pp. 1–26.

17. Payandeh Najafabadi, A.T.,Kucerovsky, D., On distribution of extrema for a class of Lévy processes. *J. Probab. Statist. Sci.*, 2011, vol. 9, pp. 127–138.

18. Brockwell, P.J., Davis, R.A., *Introduction to Time Series and Forecasting.* New York, Springer, 2002.

19. Dym, H., McKean, H.P., *Fourier Series and Integrals. Probability and Mathematical Statistics.* New York-London. Academic Press, 1972.

20. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.* М., Наука, 1999. [Vorovich, I.I.,Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media.* Moscow, Nauka, 1999. (in Russian)]

21. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *ДАН*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI: 10.31857/S2686740021040039

22. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On the problem of evaluating the behavior of multicomponent materials in mixed boundary conditions in contact problems. *Materials Physics and Mechanics*, 2022, vol. 48, iss. 3, pp. 379–385. DOI: 10.18720/MPM.48(3)2022_8