





УДК 539.3

EDN: GYTBNI DOI: 10.31429/vestnik-20-3-30-36

О трещинах нового типа в векторных граничных задачах

О. М. Бабешко  , Е. М. Горшкова , А. Г. Зарецкий, В. С. Евдокимов, Д. А. Хрипков 

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Ольга Мефодиевна; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о возможности изучения поведения трещины нового типа в многослойной среде сложной реологии, описываемой векторной граничной задачей. Предполагается, что трещина нового типа расположена перпендикулярно границе многослойной среды. Применяется метод блочного элемента. Ранее в работах авторов изучен случай, когда берега трещины моделируются абсолютно жесткими полубесконечными плитами. Такая контактная задача решена точно. Опираясь на нее, развивается метод моделирования трещины, деформируемыми штампами простой реологии. Для случая моделирования трещины в среде, описываемой векторной граничной задачей, предложен алгоритм, позволяющий переход к средам более высоких реологий. Это достигается разработанным авторами фрактальным новым универсальным методом моделирования.

Ключевые слова: трещины нового типа, контактная задача, интегральное уравнение, сложные реологии, векторные граничные задачи.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00213).


Цитирование: Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Зарецкий А. Г., Евдокимов В. С., Хрипков Д. А. О трещинах нового типа в векторных граничных задачах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 30–36. EDN: GYTBNI. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-30-36

Поступила 16 августа 2023 г. После доработки 31 августа 2023 г. Принято 1 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

On a New Type of Cracks in Vector Boundary Problems

O. M. Babeshko , E. M. Gorshkova, A. G. Zaretskiy, V. S. Evdokimov, D. A. Khripkov

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga M. Babeshko; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. The paper considers the possibility of studying the behavior of a new type of crack in a multilayer medium of complex rheology described by a vector boundary value problem. It is assumed that the cracks of the new type are located perpendicular to the boundary of the multilayer medium. The block element method is applied. Earlier, the authors studied the case when the crack banks are modeled by absolutely rigid semi-infinite plates. Such a contact problem is solved precisely. Based on it, a method of modeling cracks with deformable stamps of simple rheology is being developed. For the case of modeling a crack in a medium described by a vector boundary value problem, an algorithm is proposed that allows the transition to media of higher rheologies. This is achieved by the fractal new universal modeling method developed by the authors.

Keywords: new type cracks, contact problem, integral equation, complex rheology, vector boundary value problems.

Funding. The work was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-29-00213).

Cite as: Babeshko, O. M., Gorshkova, E. M., Zaretskiy, A. G., Evdokimov, V. S., Khripkov, D. A., On a new type of cracks in vector boundary problems. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 30–36. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-30-36

Received 16 August 2023. Revised 31 August 2023. Accepted 1 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Ранее в работах авторов исследована проблема построения трещин нового типа в антиплоских задачах теории упругости. Им можно придать иное толкование. Можно считать, что они формируются в предположении, что берега трещин состоят из материалов, описываемых уравнениями Гельмгольца. Именно это обстоятельство позволяет решать проблему описания трещин в средах сложных реологий. Последнее достигается тем, что решения векторные граничных задач, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных можно представлять разложенными по совокупности граничных задач для уравнений Гельмгольца. Это показано в настоящей работе. Исследованиям трещин Гриффитса посвящено большое множество работ [1–21], Однако трещинам нового типа значительно меньше, поскольку требуется достаточно сложный математический аппарат.

1. Постановка задачи

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, находящаяся в условиях колебания, описываемого функцией $e^{-i\omega t}$. Считая, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются с такой же временной функцией, исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче для амплитуд. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости.

Проводим исследования трещины нового типа, берега которой — полубесконечные плита или штампы, имитирующие либо литосферные плита, либо горы вокруг ущелья. Они формируются деформируемыми материалами разной реологии.

Рассмотрим случай, когда материал описывается уравнениями Гельмгольца. Надо иметь в виду, что, решив эту задачу, появится возможность изменять реологию и переходить к материалам иных реологий, применяя новый универсальный метод моделирования, опирающийся на использование фракталов [22].

Считаем, что в областях берегов трещины $\Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty)$ и $\Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ материал описывается дифференциальными уравнениями Гельмгольца

$$\begin{aligned} [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \phi_{-A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), & g(x_1, x_2) &= q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty), & & p^2 &= c\omega^2, \\ [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \phi_{A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), & g(x_1, x_2) &= q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty) & & & \end{aligned} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\phi_{-A1}(x_1, x_2) = \phi(-A, x_2), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \phi_{A1}(x_1, x_2) = \phi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

Применив в уравнениях (1.1) преобразование Фурье по координате x_2

$$\phi(x_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, x_2) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром α_2 :

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \phi_{-A1}(x_1, \alpha_2) &= g_{-A1}(x_1, \alpha_2), & \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A), & & k^2 &= p^2 - \alpha_2^2, \\ (\partial^2 x_1 + k^2) \phi_{A1}(x_1, \alpha_2) &= g_{A1}(x_1, \alpha_2), & \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty), & & & \\ g_{-A1}(x_1, \alpha_2) &= q_{-A1}(x_1, \alpha_2) - t_{-A}(x_1, \alpha_2), & g_{A1}(x_1, \alpha_2) &= q_{A1}(x_1, \alpha_2) - t_{A1}(x_1, \alpha_2), & & (1.2) \\ \phi(x_1) &= \phi(x_1, \alpha_2), & \phi(x_1, \alpha_2) &= \phi(\pm A, \alpha_2), & x_1 &\rightarrow \pm A, \\ \phi_{-A1}(x_1, \alpha_2) &= \phi(-A, \alpha_2), & x_1 &\rightarrow -A, & \phi_{A1}(x_1, \alpha_2) &= \phi(A, \alpha_2), & x_1 &\rightarrow A. \end{aligned}$$

Параметр α_2 в дальнейшем опускается, возврат к нему произойдет по формулам (1.2) после решения следующей одномерной граничной задачи:

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2)\phi_{-A1}(x_1,) &= g_{-A1}(x_1), \quad \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A), \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \\ (\partial^2 x_1 + k^2)\phi_{A1}(x_1) &= g_{A1}(x_1), \quad \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty), \\ g_{-A1}(x_1) &= q_{-A1}(x_1) - t_{-A1}(x_1), \quad g_{A1}(x_1) = q_{A1}(x_1) - t_{A1}(x_1), \\ \phi(x_1) &= \phi(x_1), \quad g(x_1) = g(x_1), \quad \phi(x_1) = \phi(\pm A), \quad x_1 \rightarrow \pm A, \\ \phi_{-A1}(x_1) &= \phi(-A), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \phi_{A1}(x_1) = \phi(A), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В качестве объектов можно рассматривать на начальном этапе деформируемые объекты, допускающие представление в виде фрактала — упакованного блочного элемента, участвующего в описании решений сложных векторных граничных задач [22]. Они имеют внешнее воздействие как по границе, так и на поверхности, описываемые функциями $\phi(A)$ и $\phi(-A)$.

Метод исследования

Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (1.3). Для этого можно применить метод, детально изложенный в [22].

В результате его применения строятся внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{-A1}(\alpha_1) &= -i(\alpha_1 + k)\phi_{-A1}(-C)e^{-i\alpha_1 C} + Q_{-A1}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C} - \\ &\quad - Q_{-A1}(\alpha_1) - T_{-A1}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C} + T_{-A1}(\alpha_1), \\ \omega_{A1}(\alpha_1) &= i(\alpha_1 - k)\phi_{A1}(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_{A1}(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - Q_{A1}(\alpha_1) - T_{A1}(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_{A1}(\alpha_1). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье строчных букв заглавными

$$\Phi(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1)e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

С помощью построенных внешних форм поведения берегов можно представить фракталами — упакованными блочными элементами в виде

$$\begin{aligned} \phi_r(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_r(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad \Phi_r(\alpha_1) = \frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)}, \quad r = A, -A, \\ N(\alpha_1) &= (\alpha^2 - k^2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty)$, $\Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ действуют деформируемые штампы, литосферные плиты, контактирующие без трения с многослойным основанием. Контактная задача, отвечающая этой постановке, описывается системой интегральных уравнений вида [23]

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{-A}} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \iint_{\Omega_A} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= u_r(x_1, x_2), \\ x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r &= -A, A, \\ \langle \alpha, x \rangle &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} K(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ K(\alpha_1, \alpha_2) &= O(v^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $u_r(x_1, x_2)$ — заданные смещения оснований штампов. Считаем, что q_{A1} и q_{-A1} являются контактными напряжениями, действующими на введенный материал в областях Ω_{-A} , Ω_A со стороны многослойной среды, а t_{A1} и t_{-A1} — внешними давлениями сверху.

Типичная для многослойной среды функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ является четной по обоим переменным и аналитической по двум комплексным переменным α_k , и мероморфной. Ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

2. Функциональное уравнение для простой реологической среды

Вновь обращаясь к интегральным уравнениям (1.5), составим балансы перемещений поверхности многослойной среды и мембран, взяв представления в форме

$$u_r(x_1) = \phi_r(x_1), \quad x_1 \in \Omega_r, \quad r = -A, A$$

В преобразованиях Фурье, используем соотношения

$$\begin{aligned} K(\alpha_1)Q_{-A1}(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}[-Q_{-A1}(\alpha_1) + S_{-A1}], \\ [K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}]Q_{-A1}(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_{-A1}, \\ K(\alpha_1)Q_{A1}(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}[-Q_{A1}(\alpha_1) + S_{A1}], \\ [K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}]Q_{A1}(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_{A1}, \\ S_{-A1} &= -i(\alpha_1 + k)\phi_{-A1}(-A)e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A1}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} - T_{-A1}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} + T_{-A1}(\alpha_1), \\ S_{A1} &= i(\alpha_1 - k)\phi_{A1}(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_{A1}(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - T_{A1}(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_{A1}(\alpha_1). \end{aligned}$$

Тогда в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обеих контактных зон принимает вид

$$\begin{aligned} K_1(\alpha_1)Q_1^-(\alpha_1) + W_1(\alpha_1) + K_1(\alpha_1)Q_1^+(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+), \\ K_1(\alpha_1) &= [K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $W_1(\alpha_1)$ — преобразование Фурье свободной от напряжений зоны между штампами. В том случае, когда штампы сошлись торцами, имеем $W_1(\alpha_1) = 0$ и уравнение принимает вид

$$K_1(\alpha_1)Q_1^-(\alpha_1) + K_1(\alpha_1)Q_1^+(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+). \tag{2.2}$$

С учетом аналитических свойств функций приняты обозначения $Q_1^-(\alpha_1) \equiv Q_{-A1}(\alpha_1)$, $S_1^- \equiv S_{-A}(\alpha_1)$, $Q_1^+(\alpha_1) \equiv Q_{A1}(\alpha_1)$, $S_1^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1)$.

Знак плюс означает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а минус — в нижней. Далее будет показано, что это функциональное уравнение позволяет моделировать трещины нового типа для любых конечных расстояний $2A$ между берегами. В (2.2) представлено функциональное уравнение для случая $A = 0$ в предположении, что плиты сошлись торцами, но не взаимодействуют друг с другом, сохраняя заданные на торцах граничные воздействия. Образовавшаяся «трещина нового типа» вызывает в зоне сближения сингулярные концентрации контактных напряжений, разрушая среду [24]. Таким является механизм разрушения среды трещинами нового типа. Соотношения (2.1), (2.2) представляют обобщенные функциональные уравнения типа Винера–Хопфа относительно неизвестных $Q_1^-(\alpha_1)$, $Q_1^+(\alpha_1)$, $W_1(\alpha_1)$, а также функционалов $Q_1(-k)$, $Q_1(k)$, входящих в правые части уравнений. Для их исследования строятся интегральные уравнения.

Применим для исследования функционального уравнения аппарат факторизации функций [23], позволяющий свести его к отдельным интегральным уравнениям. С этой целью для четной функции осуществим деление всех членов функционального уравнения (2.1) на $K(\alpha_1)$. В результате получим соотношение

$$Q_1^-(\alpha_1) + K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+). \tag{2.3}$$

Осуществим переход от функционального к интегральному уравнению, которое, с учетом новых обозначений, принимает вид

$$\int_{-A}^A k_{11}(x_1 - \xi_1)w_{11}(\xi_1)d\xi_1 = f_{11}(x_1), \quad |x_1| \leq A, \quad w_{11}(\xi_1) = w_{11}(\xi_1, \alpha_2),$$

$$k_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad (2.4)$$

$$K_1^{-1}(\alpha_1) = P_1^{-1}(\alpha_1)R_1(\alpha_1), \quad k_{11}(x_1) = k_{11}(x_1, \alpha_2).$$

Здесь $f_{11}(x_1)$ имеет представление

$$f_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A.$$

В связи со свойствами ядра интегрального уравнения, функция $K_1^{-1}(\alpha_1)$ имеет на бесконечности асимптотическое поведение

$$K_1^{-1}(\alpha_1) = O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение, представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным. Последнее, взяв произвольное положительное число τ , можно записать в виде

$$(-\partial^2 + \tau^2) \int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1)w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1),$$

$$n_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1}K_1^{-1}(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad N_{11}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1}K_1^{-1}(\alpha_1).$$

Решив дифференциальное уравнение, получим

$$\int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1)w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1) + c_{11}e^{\tau x_1} + c_{12}e^{-\tau x_1}, \quad (2.5)$$

$$f_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1}(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A.$$

Здесь постоянные c_{1m} , $m = 1, 2$, нуждаются в определении после построения решения интегрального уравнения (2.5).

Не останавливаясь на деталях построения высокоточного приближенного решения интегрального уравнения (2.5), выпишем окончательный вид решения в виде

$$w_{11}(x_1) = \frac{m_{11}(x_1) + c_{11}m_{12}(x_1) + c_{12}m_{13}(x_1)}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} A)\sqrt{2 \operatorname{ch} A - 2 \operatorname{ch} x_1}}. \quad (2.6)$$

Здесь $m_{rs}(x_1)$ — некоторые непрерывные функции, появляющиеся в процессе решения интегрального уравнения и являются известными. $Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} A)$ — функция Лежандра.

Из него находятся выполненные в преобразованиях Фурье значения контактных напряжений под берегами трещины в виде

$$Q_{A1}(\alpha_1) \equiv Q_1^+(\alpha_1) = \{K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1)\}^+,$$

$$Q_{-A1}(\alpha_1) \equiv Q_1^-(\alpha_1) = \{K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1)\}^-.$$

3. Об исследовании трещины нового типа для сложной реологической среды

Переход к сложной реологической среды полностью повторяет изложенное выше с учетом того, что вместо отдельных уравнений фигурируют системы интегральных уравнений, а решения векторных граничных задач для этих случаев представляются разложенными по решениям скалярных.

В качестве примера, можно представить разложение решения для уравнения Ламе [25]

$$\begin{aligned}u_1(x_1, x_2) &= \partial_1\phi(x_1, x_2) + \partial_2\psi(x_1, x_2), \\u_2(x_1, x_2) &= \partial_2\phi(x_1, x_2) - \partial_1\psi(x_1, x_2).\end{aligned}$$

В процессе использования этого подхода встает задача решения системы интегральных уравнений Винера–Хопфа для многослойной среды. В настоящее время метод решения этой системы разработан и опубликован, что дает возможность решать задачи о поведении трещин нового типа в сложных реологических средах.

Выводы

Таким образом, доказано, что задачи для трещин в средах сложной реологией также решаемы и аналогичны подходам в средах простых реологий. При этом единичные функциональные уравнения заменяются системами функциональных уравнений.

Литература [References]

1. Griffith, A., The phenomena of rupture in solids. *Trans. Roy. Soc.*, 1920, vol. 221A, pp. 163–197.
2. Sator, C., Becker, W., Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions. *Arch. Appl. Mech.*, 2012, vol. 82, pp. 643–658.
3. Irwin, G., Fracture dynamics. *Fracture of metals, American Society of Metals, Cleveland*, 1948, pp. 147–166.
4. Leblond, J.B., Frelat, J., Crack kinking from an interface crack with initial contact between the cracks lips. *Europ. J. Mech. A. Solids*, 2001, vol. 20, pp. 937–951.
5. Loboda, V.V., Sheveleva, A.E., Determining prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, iss. 5, pp. 566–572.
6. Loeber, J.F., Sih, G.C., Transmission of anti-plane shear waves past an interface crack in dissimilar media. *Engineering Fracture Mechanics*, 1973, vol. 146, pp. 699–725.
7. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., Elastodynamics contact problem for an interface crack under harmonic loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, vol. 80, pp. 52–59.
8. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., Mickucka, V., 2-D and 3-D contact problems for interface cracks under harmonic loading. In: Constanda, C. Harris, P.J. (eds.), *Integral Methods in Science and Engineering: Computational and Analytic Aspects*. New York, Dordrecht, Springer, 2011, pp. 241–252.
9. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., Linear interface crack under plane share wave. *CMES (Computer model in Eng. and Sci.)*, 2009, vol. 48, iss. 2, pp. 107–120.
10. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., Modelling crack closure for an interface crack under harmonic loading. *Int. J. of fracture*, 2010, vol. 165, pp. 127–134.
11. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, iss. 5, pp. 735–749.
12. Mikhas'kiv, V.V., Butrak, I.O., Stress concentration around a spheroidal crack caused by a harmonic wave incident at an arbitrary angle. *Int. Appl. Mech.*, 2006, vol. 42, iss. 1, pp. 61–66.
13. Rice, J.R., Elastic fracture mechanics concepts for interface cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, pp. 98–103.
14. Zhang, Ch., Gross, D., *On wave propagation in elastic solids with cracks*. Southampton, Boston, Computational Mechanics Publications, 1998.
15. Морозов, Н.Ф., *Математические вопросы теории трещин*. Москва, Наука, 1984. [Morozov, N.F., *Matematicheskie voprosy teorii treshchin = Mathematical problems in the theory of cracks*. Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)]

16. Черепанов, Г.П., *Механика хрупкого разрушения*. Москва, Наука, 1974. [Cherepanov, G.P., *Mekhanika khrupkogo razrusheniya = Brittle Fracture Mechanics*. Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]
17. Kirugulige, M.S., Tippur H.V., Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp Mech.*, 2006, vol. 46, iss. 2, pp. 269–281.
18. Huang Y., Gao H. Intersonic crack propagation – Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 76–80.
19. Antipov, Y.A., Smirnov, A.V., Subsonic propagation of a crack parallel to the boundary of a half-plane. *Math. Mech. Solids*, 2013, vol. 18, pp. 153–167.
20. Sinclair, G.B., Stress singularities in classical elasticity I. *Appl. Mechanics Reviews*, 2004, vol. 57, pp. 251–298.
21. Sinclair, G.B., Stress singularities in classical elasticity II. *Appl. Mechanics Reviews*, 2004, vol. 57, pp. 385–439.
22. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *ДАН*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26.] DOI: [10.31857/S2686740021040039](https://doi.org/10.31857/S2686740021040039)
23. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
24. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Earthquakes and cracks of new type complementing the Griffith-Irvin's crack. Chapter 2. In: Altenbach, H., Eremeyev, V.A., Igumnov, L.A. (eds.), *Advanced Structured Materials*. Springer, 2021, pp. 11–26. DOI: [10.1007/978-3-030-54928-2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2)
25. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Зарецкая, М.В., Евдокимов, В.С., О контактных задачах с деформируемым штампом и изменяемой реологией. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия*, 2023, vol. 55, № 3, с. 267–274. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Zaretskaya, M.V., Evdokimov, V.S., On contact problems with a deformable punch and variable rheology. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika, mekhanika, astronomiya = Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics, Mechanics, Astronomy*, 2023, vol. 55, no. 3, pp. 267–274. (in Russian)] DOI: [10.21638/spbu01.2023.302](https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.302)