УДК 539.3 EDN: MRRPFE DOI: 10.31429/vestnik-20-3-37-41

Об условиях стабильности трещин нового типа

Е. М. Горшкова, **О. М. Бабешко**✉, **А. Г. Зарецкий**, **В. С. Евдокимов**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Ольга Мефодиевна; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Аннотация. В работе изучается проблема стабильности многослойной среды, содержащей перпендикулярно границе трещины нового типа. Под стабильностью понимается возможность возникновения новых уединенных резонансов, способных деструктивно повлиять на трещину. Исследование опирается на использование метода блочного элемента, позволяющего получать точные решения контактных задач и обнаруживать скрытые явления. Исследование использует ранее обнаруженные методом блочного элемента свойства динамических контактных задач с абсолютно жестким и деформируемым штампами. Оно свидетельствует о том, что для выявления отсутствия стабильности, достаточно рассмотреть случай абсолютно жестких полубесконечных плит, формирующих трещину нового типа. В работе показано, что описанная трещина нового типа нестабильна, как в случае абсолютно жестких плит, формирующих ее, так и в случае деформируемых.

Ключевые слова: трещины нового типа, стабильность, блочные элементы, интегральные уравнения, изолированные резонансы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00213).

Цитирование: Горшкова Е. М., Бабешко О. М., Зарецкий А. Г., Евдокимов В. С. Об условиях стабильности трещин нового типа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 37–41. EDN: MRRPFE. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-37-41

Поступила 16 августа 2023 г. После доработки 28 августа 2023 г. Принято 4 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

On the Conditions of Stability of Cracks of a New Type

E. M. Gorshkova, **O. M. Babeshko**✉, **A. G. Zaretskiy**, **V. S. Evdokimov**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga M. Babeshko; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. The paper studies the problem of stability of a multilayer medium containing a new type of crack perpendicular to the boundary. Stability is understood as the possibility of the emergence of new solitary resonances that can destructively affect the crack. The research is based on the use of the block element method, which allows obtaining accurate solutions to contact problems and detecting hidden phenomena. The study uses the properties of dynamic contact problems with absolutely rigid and deformable stamps previously discovered by the block element method. It indicates that in order to identify the lack of stability, it is sufficient to consider the case of absolutely rigid semi-infinite plates forming a crack of a new type. The paper shows that the described crack of a new type is not stable, both in the case of absolutely rigid plates forming it, and in the case of deformable ones.

Keywords: new type cracks, stability, block elements, integral equations, isolated resonances.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-29-00213).

Cite as: Gorshkova, E. M., Babeshko, O. M., Zaretskiy, A. G., Evdokimov, V. S., On the conditions of stability of cracks of a new type. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 37–41. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-37-41

Received 16 August 2023. Revised 28 August 2023. Accepted 4 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

В работе исследуется вопрос о стабильности трещин нового типа, имеющихся в многослойной среде и расположенных вертикально к границе. В более ранних работах исследована проблема разрушения трещины и среды при полном сближении берегов трещины и разнонаправленности воздействий на ее берега. В этом случае в сейсмологии может возникнуть стартовое землетрясение. Вопрос о стабильности включает в себя изучение возможности возникновения изолированных резонансов в условиях гармонического воздействия на среду, имеющую трещину нового типа. Трещина в многослойной среде не является сплошной. Ее берега формируются деформируемыми полубесконечными плитам, контактирующими с деформируемой средой и сближающимися торцами. Ранее в работах авторов было показано, что в контактных задачах для отдельного штампа возникают новые резонансные частоты, если штамп оказывается леформируемым. Исходя из этого, чтобы выяснить возможность резонанса в случаях трещин нового типа, будем считать, что трещины формируются абсолютно жесткими штампами. Это задачи в случаях одиночных штампов детально исследованы [1–19]. При появлении уединенных резонансов в этом случае можно утверждать, что они появятся и в случае деформируемых плит. Таким образом, стабильность трещин нового типа для трещин такого рода отсутствует. Она может иметь место при межрезонансных значениях параметров задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считая, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются с такой же временной функцией, исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A,\ |x_2| \leqslant \infty)$, $\Omega_A(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ действуют абсолютно жесткие штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием.

Контактная задача, отвечающая этой постановке, описывается системой интегральных уравнений вида [1, 2]

$$\iint\limits_{\Omega_{-A}} h(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) q_{-A}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 + \iint\limits_{\Omega_{A}} h(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) q_{A}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = u_r(x_1,x_2),$$

$$x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r = -A, A,$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad h(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} H(\alpha_1,\alpha_2) e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$H(\alpha_1,\alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty. \tag{1.1}$$

Здесь $u_r(x_1,x_2)$ — заданные смещения оснований штампов, $q_r(x_1,x_2)$ — контактные напряжения. Считаем, что функция $H(\alpha_1,\alpha_2)$ — четная по обеим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных α_k, $k = 1, 2$, ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

Применим к двумерному интегральному уравнению (1.1) преобразование Фурье по координате x_2. В результате место координаты x_2 у каждой, подвергнутой преобразованию Фурье функции, займет свободный параметр преобразования Фурье α_2. Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр α_2 введением обозначений

$$h(x_1) = h(x_1,\alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1,\alpha_2), \quad h(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1}\,\mathrm{d}\alpha_1, \tag{1.2}$$

$$H(\alpha_1) = H(\alpha_1,\alpha_2), \quad u_r(x_1) = u_r(x_1,\alpha_2), \quad r = -A, A,$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{-A} h(x_1-\xi_1)q_{-A}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1+\int\limits_{A}^{\infty} h(x_1-\xi_1)q_{A}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1=u_{-A}(x_1), \quad -\infty<x_1\leqslant -A,\\ \int\limits_{-\infty}^{-A} h(x_1-\xi_1)q_{-A}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1+\int\limits_{A}^{\infty} h(x_1-\xi_1)q_{A}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1=u_{A}(x_1), \quad A\leqslant x_1\leqslant \infty.\end{gathered} \tag{1.3}$$

В случае многослойной среды функция $H(\alpha_1)$, являясь мероморфной, имеет счетное число нулей z_{mo} и полюсов ξ_{so}. Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\xi_{so}=i\nu(s+0{,}5)(1+o(1)), \quad s\to\infty, \quad z_{mo}=i\nu m(1+o(1)), \quad m\to\infty, \quad \nu=\text{const}>0.$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. В этом случае представление ядра интегрального уравнения описывается интегралом, берущимся по контуру, имеющему вид

$$h(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} H(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}\,\mathrm{d}\alpha_1.$$

Контур γ совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса [2].

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обеих контактных зон. Для этого продолжим систему интегральных уравнений (1.3) на всю ось, добавив справа на отрезке $[-A,A]$ новую неизвестную функцию $w_0(x_1)$, представляющую перемещение поверхности среды в промежутках между штампами. Применив к этой системе уравнений преобразование Фурье по x_1, приходим к функциональному уравнению вида

$$\begin{gathered}H(\alpha_1)Q_0^-(\alpha_1)+W_0(\alpha_1)+H(\alpha_1)Q_0^+(\alpha_1)=U_0^-(\alpha_1)+U_0^+(\alpha_1),\\ Q_0^-(\alpha_1)=\int\limits_{-\infty}^{-A} q_{-A}^-(x_1)e^{ix_1\alpha_1}\,\mathrm{d}x_1, \quad Q_0^+(\alpha_1)=\int\limits_{A}^{\infty} q_{A}^-(x_1)e^{ix_1\alpha_1}\,\mathrm{d}x_1,\\ U_0^-(\alpha_1)=\int\limits_{-\infty}^{-A} u_{-A}(x_1)e^{ix_1\alpha_1}\,\mathrm{d}x_1, \quad U_0^+(\alpha_1)=\int\limits_{A}^{\infty} u_{A}(x_1)e^{ix_1\alpha_1}\,\mathrm{d}x_1.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $W_0(\alpha_1)$ — преобразование Фурье функции перемещения $w_0(x_1)$ в свободной от напряжений зоне между штампами.

Введем произвольный параметр $\tau>0$ и представим уравнение в виде

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\tau^2\right)\int\limits_{-A}^{A} h_1(x_1-\xi_1)w_0(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1=f_0(x_1), \quad H_1(\alpha_1)=(\alpha_1^2+\tau^2)^{-1}H^{-1}(\alpha_1), \tag{1.5}$$

$$h_1(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\alpha_1^2+\tau^2)^{-1}H^{-1}(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}\,\mathrm{d}\alpha_1, \quad H_1(\alpha_1)=O(\alpha_1^{-1}).$$

Рассматривая в (1.5) интеграл слева как неизвестную функцию, на которую действует дифференциальный оператор, обратим его, тогда получим представление вида

$$\int\limits_{-A}^{A} h_1(x_1-\xi_1)w_0(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1=f(x_1), \quad f(x_1)=f_1(x_1)+c_1f_2(x_1)+c_2f_2(x_1),$$

$$f_1(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) e^{-i\eta x_1}\, \mathrm{d}\eta, \quad |x_1| \leqslant A, \quad f_2(x_1) = e^{\tau x_1}, \quad f_3(x_1) = e^{-\tau x_1}, \tag{1.6}$$

$$F_1(\eta) = H^{-1}(\eta)(\eta^2+\tau^2)^{-1}\left[(U_0^-(\eta) + U_0^+(\eta)\right].$$

Здесь постоянные обращения дифференциального оператора c_m, $m = 1, 2$, нуждаются в определении, что будет выполнено после построения решения интегрального уравнения (1.6).

2. Точное решение для трещины нового типа

Построенное решение содержит произвольные постоянные c_1, c_2, входящие в $f(x)$ (1.6), которые необходимо определить. Для их определения возвратимся к функции $w_0(x_1)$ (1.6). В силу линейности интегрального уравнения построенное решение имеет представление, в котором указанные постоянные явно выделены. С учетом наличия у решения $w_0(x_1)$ данного типа интегрального уравнения (1.6) особенности вида $\sqrt{a^2 - x_1^2}$ [20], запишем его в форме с этой выделенной особенностью и составляющими решения при постоянных c_n, $n = 1, 2$, то есть

$$w_0(x_1) = \frac{m_1(x_1) + c_1 m_2(x_1) + c_2 m_3(x_1)}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}. \tag{2.1}$$

Функции $m_n(x_1)$, $n = 1, 2, 3$ являются решениями интегрального уравнения (1.6) для функций $f_n(x)$ в правой части соответственно. Постоянные c_n вычисляются из условия ограниченности функции $w_0(x_1)$ у краев штампов $\pm a$. Соответствующие уравнения имеют вид

$$c_1 m_2(a) + c_2 m_3(a) + m_1(a) = 0,$$

$$c_1 m_2(-a) + c_2 m_3(-a) + m_1(-a) = 0.$$

Искомые постоянные принимают значения

$$c_1 = \Delta^{-1}\left[m_1(-a)m_3(a) - m_1(a)m_3(-a)\right],$$

$$c_2 = \Delta^{-1}\left[m_1(a)m_2(-a) - m_1(-a)m_2(a)\right],$$

$$\Delta = m_2(a)m_3(-a) - m_2(-a)m_3(a).$$

На основании полученного результата определяются остальные параметры трещины нового типа, у которой у дна находится многослойная среда, а боковые берега формируются абсолютно жесткими штампами. Для нахождения контактных напряжений под штампом подставим вычисленные параметры c_n, $n = 1, 2$, в решение интегрального уравнения (2.1) и затем внесем это найденное решение в функциональное уравнение (1.4).

Дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты ω, входит в знаменатели постоянных c_n, $n = 1, 2$ и имеет вид

$$m_2(a)m_3(-a) - m_2(-a)m_3(a) = 0. \tag{2.2}$$

Вывод

Построенное точное решение контактной задачи для двух абсолютно жестких штампов позволило подтвердить, что трещины нового типа имеют дискретные резонансы на некоторых частотах, являющихся точками нестабильности для всех реологий, в том числе, для абсолютно жестких штампов.

Литература [References]

1. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Москва, Наука, 1974. [Vorovich, I.I., Alexandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical mixed problems of elasticity theory.* Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]

2. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
3. Галин, Л.А., *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* Москва, Наука, 1980. [Galin, L.A., *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti = Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)]
4. Штаерман И.Я. *Контактная задача теории упругости.* Москва, Гостехиздат, 1949. [Shtaerman I.Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti = Contact problem of elasticity theory.* Moscow, Gostekhizdat, 1949. (in Russian)]
5. Горячева, И.Г., Добычин, М.Н., *Контактные задачи трибологии.* Москва, Машиностроение, 1988. [Goryacheva, I.G., Dobychin, M.N., *Kontaktnye zadachi tribologii = Contact problems of tribology.* Moscow, Mashinostroenie, 1988. (in Russian)]
6. Papangelo, A., Ciavarella, M., Barber, J.R., Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471. DOI: 10.1098/rspa.2015.0271
7. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2349–2362. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00154-6
8. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II–Examples. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2363–2378. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00155-8
9. Zhou, S., Gao, X.L., Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. DOI: 10.1007/s00033-012-0205-0
10. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006
11. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2006.05.007
12. Almqvist, A., Sahlin, F., Larsson, R., Glavatskih, S., On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. DOI: 10.1016/j.triboint.2005.11.008
13. Almqvist, A., *An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem*, 2013. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem
14. Andersson, L.E., Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.*, 2000, vol. 42, pp. 169–202. DOI: 10.1007/s002450010009
15. Cocou, M., A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, vol. 22, pp. 508–519. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.08.012
16. Cocou, M., Rocca, R., Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis*, 2000, vol. 34, pp. 981–1001.
17. Kikuchi, N., Oden, J., *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods.* SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1988.
18. Raous, M., Cangémi, L., Cocu, M., A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 1999, vol. 177, pp. 383–399. DOI: 10.1016/S0045- 7825(98)00389-2
19. Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J., Models and analysis of quasistatic contact. *Lect. Notes Phys.*, vol. 655. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
20. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М. Зарецкая, М.В., Евдокимов, В.С., Точное решение уравнения Винера-Хопфа на отрезке для контактных задач и задач теории трещин в слоистой среде. *ДАН*, 2023, т. 68, с. 28–33. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Zaretskaya, M.V., Evdokimov, V.S., Exact solution of the Wiener-Hopf equation on a segment for contact problems and problems of the theory of cracks in a layered medium. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2023, vol. 68, pp. 28–33. (in Russian)] DOI: 10.31857/S2686740023020025