



УДК 539.3

EDN: NAYNUF DOI: 10.31429/vestnik-20-3-42-49

О решении проблемы контактных задач с деформируемым штампом

О. В. Евдокимова [✉], А. С. Мухин , С. Б. Уафа, О. А. Бушуева

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Евдокимова Ольга Владимировна; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Аннотация. В работе впервые предложен подход, позволяющий не только строить точные решения контактных задач с деформируемым штампом для некоторых типов неклассических областей, но и явно получить важные соотношения, описывающие новые явления, возникающие в этих задачах. Применением метода блочного элемента к исследованию контактных задач для многослойной среды о действии на нее классического полубесконечного штампа и неклассических штампов в форме полосы и четверти плоскости удалось получить важные, ранее не описанные свойства. К ним относятся следующие особенности и результаты. 1. Контактная задача для деформируемого штампа доступна для решения, только после того, когда решена контактная задача для абсолютно жесткого штампа. 2. Впервые построены точные решения для случаев абсолютно жестких штампов и деформируемых штампов указанных форм, материал которых описывается уравнением Гельмгольца. 3. В случаях динамических задач о гармонических воздействиях на штампы в контактных задачах с абсолютно жесткими штампами не возникают изолированные резонансы. В контактных задачах с деформируемым штампом изолированные резонансы, впервые предсказанные академиком И.И. Воровичем, присутствуют. 4. Применение для решения контактных задач метода блочного элемента позволяет, в зависимости от формы штампа, получать в явном или интегральном виде дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты. 5. Методом блочного элемента с применением решения системы интегральных уравнений Винера–Хопфа и универсального (фрактального) метода моделирования можно строить решение рассматриваемых контактных задач с деформируемыми штампами, состоящими из материалов сложных реологий.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, фракталы, реология, уравнения Ламе, уравнения Винера–Хопфа.

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (проект 22-21-00129).

Цитирование: Евдокимова О. В., Мухин А. С., Уафа С. Б., Бушуева О. А. О решении проблемы контактных задач с деформируемым штампом // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 42–49. EDN: NAYNUF. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-42-49

Поступила 16 августа 2023 г. После доработки 11 сентября 2023 г. Принято 13 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

On Solving the Problem of Contact Problems with Deformable Stamp

O. V. Evdokimova [✉], A. S. Mukhin, S. B. Uafa, O. A. Bushueva

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga V. Evdokimova; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. In this paper, for the first time, an approach is proposed that allows not only to construct exact solutions to contact problems with a deformable stamp for some types of non-classical domains, but also to explicitly obtain important relations describing new phenomena arising in these problems. By applying the block element method to the study of contact problems for a multilayer medium on the effect of a classical, semi-infinite, stamp and non-classical stamps in the form of a strip and a quarter plane, it was possible to obtain important properties not previously described. These include the following features and results. 1. The contact problem for a deformable stamp is available for solution only after the contact problem for an absolutely rigid stamp has been solved. 2. For the first time, exact solutions have been constructed for the cases of absolutely rigid stamps and deformable stamps of these shapes, the material of which is described by the Helmholtz equation. 3. In cases of dynamic tasks on harmonic effects on stamps, isolated resonances do not occur in contact problems with absolutely rigid stamps. Isolated resonances, first predicted by

academician I.I. Vorovich, are present in contact problems with a deformable stamp. 4. The use of the block element method for solving contact problems allows, depending on the shape of the stamp, to obtain an explicit or integral dispersion equation describing resonant frequencies. 5. By the block element method using solutions of a system of Wiener-Hopf integral equations and a universal (fractal) modeling method can be used to solve the considered contact problems with deformable stamps consisting of materials of complex rheologies.

Keywords: contact problem, block element, deformable stamp, fractals, rheology, Lamé equations, Wiener-Hopf equations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00129).

Cite as: Evdokimova, O. V., Mukhin, A. S., Uafa, S. B., Bushueva, O. A., On solving the problem of contact problems with deformable stamp. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 42–49. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-42-49

Received 16 August 2023. Revised 11 September 2023. Accepted 13 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Исследованиями в области контактных задач занимались и продолжают заниматься многие известные ученые в связи их ролью в инженерной практике. Лишь небольшие примеры исследований в этой области приведены в публикациях [1–14]. Созданы пакеты прикладных программ для численного решения некоторых контактных задач, в том числе, с деформируемым штампом. Однако практика показала, что одни численные методы не позволяют вскрывать тонкие особенности поведений взаимодействующих деформируемых тел, упуская важные природные и техногенные свойства и явления. К их числу, например, относятся обнаруженные путем точного решения граничных задач методом блочного элемента такие явления, как новый тип «стартовых» землетрясений. Другим примером является выявление локализаций контактных напряжений или перемещений в динамических контактных задачах. Ранее они не были описаны. Аналитические исследования контактных задач посвящены рассмотрению взаимодействий с абсолютно жестким штампом.

В настоящей работе с применение нового, недавно разработанного авторами, метода моделирования проводится анализ особенностей взаимодействия деформируемого основания с деформируемым объектом в виде полосы, описываемым граничной задачей для уравнений Гельмгольца [15]. Решение этой задачи открывает возможность решения контактных задач с деформируемыми штампами сложной реологии. Ниже приводятся результаты, охватывающие все поставленные в проекте задания и обсуждаются полученные результаты.

1. Постановка задачи

Рассматривается многослойная среда, на ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1 , ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в области $\Omega(0 \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ действует вибрирующий по закону $e^{-i\omega t}$ деформируемый штамп, материал которого описывается системой уравнений Ламе. Считается, что полубесконечный штамп действует на основание в условиях плоской деформации и контакт осуществляется без трения. Тогда уравнение контактной задачи на многослойном основании описывается интегральным уравнением вида [16]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \mathbf{q}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \mathbf{w}(x_1, x_2), \quad 0 \leq x_1 \leq \infty, \quad |x_2| \leq \infty,$$

$$\mathbf{k}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \|K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2)\|, \quad m, n = 1, 2.$$

Здесь $\mathbf{q}(x_1, x_2)$ — вектор контактных напряжений под штампом, $\mathbf{w}(x_1, x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $\mathbf{k}(x_1, x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения. Ранее указанные задачи решались только численным методом. В результате оставались вне исследования некоторые особенности решений в динамических задачах. Кроме этого, численные методы оказывались либо малоэффективными, либо несостоятельными в случаях, когда границы постановки граничных задач уходят на бесконечность, либо оказываются очень больших размеров. Именно для таких задач оказывается эффективным предложенный в настоящей работе метод. Он демонстрирует значительные различия как в методе решения задачи, так и в получаемом результате в сравнении со случаем жесткого штампа. Разработанный авторами подход [17] открыл возможность использовать «фракталы», то есть упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред.

Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации фракталов. С учетом этой возможности, в качестве деформируемого штампа принимаются фракталы — решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца. Именно по фракталам, упакованным блочным элементам, будут раскладываться решения контактных задач для деформируемых штампов более высокой реологии.

Граничная задача, описывающая поведение деформируемого штампа в условиях плоской деформации, определяется системой дифференциальных уравнений Ламе в области $\Omega(0 \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$, имеющей вид [16]

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \partial_1 \theta + \mu \Delta u_1 + k^2 u_1 + X_1 &= 0, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2, \quad k^2 = \rho \omega^2, \\ (\lambda + \mu) \partial_2 \theta + \mu \Delta u_2 + k^2 u_2 + X_2 &= 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega, \\ \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $u_m, m = 1, 2$ — компоненты вектора перемещения \mathbf{u} в штампе вдоль горизонтальных осей; ρ — плотность материала штампа; ω — частота колебания штампа; $X_m, m = 1, 2$ — компоненты вектора массовых сил. На границе штампа, при $x_1 = 0$, задаются граничные условия вида

$$u_1(x_1, x_2) = u_1(0, x_2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2(0, x_2). \tag{1.3}$$

Таким образом, необходимо построить в области $\Omega(0 \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ упакованные блочные элементы, которые смогут представить разложение решения граничной задачи для деформируемого штампа, описываемого уравнениями (1.2) и (1.3).

2. Разложение решения по блочным элементам

Для построения разложения решения векторной граничной задачи (1.2) по блочным элементам скалярной граничной задачи, воспользуемся соотношением, представляющим разложение решения системы уравнений Ламе с помощью потенциалов в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \partial_1 \phi(x_1, x_2) + \partial_2 \psi(x_1, x_2), \\ u_2(x_1, x_2) &= \partial_2 \phi(x_1, x_2) - \partial_1 \psi(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Участвующие в представлении (2.1) потенциалы берем в виде решений граничных задач для уравнения Гельмгольца вида

$$\begin{aligned} (\Delta - k_1^2) \phi &= g_1, \quad (\Delta - k_2^2) \psi = g_2, \quad k_1^2 = k^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ k_2^2 &= k^2 \mu^{-1}, \\ \phi(x_1, x_2) &= f_1(0, x_2), \\ \psi(x_1, x_2) &= f_2(0, x_2), \quad x_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Не прибегая к деталям, подробно описанным в [18], выпишем результат определения функций $f_1(0, x_2)$, $f_2(0, x_2)$ граничных условий (2.2) для блочных элементов $\phi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$.

Они выражаются с помощью функций граничных условий $u_1(0, x_2)$ и $u_2(0, x_2)$ векторной граничной задачи для уравнений Ламе (1.2). В результате получается следующее представление

$$f_1(0, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(0, \alpha_2) e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2, \quad f_2(0, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(0, \alpha_2) e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2,$$

$$F_1(0, \alpha_2) = i\Delta_2^{-1} [\alpha_2 U_1(0, \alpha_2) - \alpha_{12+} U_2(0, \alpha_2)], \quad \alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2},$$

$$F_2(0, \alpha_2) = -i\Delta_2^{-1} [\alpha_{11+} U_1(0, \alpha_2) + \alpha_1 U_2(0, \alpha_2)], \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2},$$

$$U_m(0, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_m(0, x_2) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2, \quad \Delta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_{11+} \alpha_{12+}.$$

Выразив массовые силы X_m , $m = 1, 2$ в виде [19]

$$X_1 = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2, \quad X_2 = \partial_2 g_1 - \partial_1 g_2,$$

получим представление правых частей потенциалов в форме g_m , $m = 1, 2$.

3. Вывод интегрального уравнения для деформируемого штампа

Поставленные двумерные задачи (1.1), (1.2) сводятся к одномерным со свободным вещественным параметром α_2 , в результате применения преобразования Фурье по координате x_2 .

Тогда интегральное уравнение (1.1), скрыв свободный параметр, принимает вид

$$\int_0^{\infty} \mathbf{k}_0(x_1 - \xi_1) \mathbf{q}(\xi_1) d\xi_1 = \mathbf{w}(x_1), \quad \mathbf{q}(\xi_1) = \mathbf{q}(\xi_1, \alpha_2), \quad \mathbf{k}_0(x_1) = \mathbf{k}(x_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{k}_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_0(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad \mathbf{K}_0(\alpha_1) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$K_{0mn}(\alpha_1) = P_{0mn}^{-1}(\alpha_1) R_{0mn}(\alpha_1).$$

Ради краткости считаем, что функции $K_{0mn}(\alpha_1)$ является четной мероморфной и на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K_{0mn}(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $\text{Im } \alpha_1 = 0$. Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для смешанных задач на многослойной среде [16].

Предложенный подход позволяет достаточно детально описать особенности задач с деформируемым штампом и сформировать метод решения этих задач для штампов со сложной реологией. Функция $K_{0mn}(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_{0mn}(\alpha_1)$ и $P_{0mn}(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей. Примеры смешанных задач, в которых встречаются подобные интегральные уравнения, имеются в многочисленных публикациях, например, в [16].

Граничные задачи (2.2) для блочных элементов становятся одномерными после скрытия свободного параметра α_2

$$(\partial_1^2 x_1 + p_1^2) \phi(x_1) = g_1(x_1),$$

$$\phi(x_1) = \phi(x_1, \alpha_2), \quad g_1(x_1) = g(x_1, \alpha_2), \quad p_1^2(\alpha_2) = k_1^2 - \alpha_2^2,$$

$$\phi(x_1, \alpha_2) = \phi(0), \quad x_1 \rightarrow 0,$$

$$(\partial_1^2 x_1 + p_2^2) \psi(x_1) = g_2(x_1),$$

$$\psi(x_1) = \psi(x_1, \alpha_2), \quad g_2(x_1) = g_2(x_1, \alpha_2), \quad p_2^2(\alpha_2) = k_2^2 - \alpha_2^2,$$

$$\psi(x_1, \alpha_2) = \psi(0), \quad x_1 \rightarrow 0, \quad x_1 \in \Omega_1.$$

Применив к уравнениям (3.2) метод блочного элемента [18], получим следующие представления для внешних форм $\omega_1(\alpha_1)$ и $\omega_2(\alpha_1)$ элементов:

$$\begin{aligned}\omega_1(\alpha_1) &= i(\alpha_1 - p_1)\phi(0) + G_1(p_1) - G_1(\alpha_1), & \omega_1(p_1) &= 0, \\ \omega_2(\alpha_1) &= i(\alpha_1 - p_2)\psi(0) + G_2(p_2) - G_2(\alpha_1), & \omega_2(p_2) &= 0, \\ G_m(\alpha_1) &= \int_0^\infty g_m(x_1)e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha, & m &= 1, 2.\end{aligned}$$

Представим вектор решения \mathbf{u} граничных задач разложенным по фракталам, упакованным блочным элементам, используя результат работы [18]. Упакованные блочные элементы имеют вид

$$\phi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega_1(\alpha)}{\alpha^2 - p_1^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad \psi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega_2(\alpha)}{\alpha^2 - p_2^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha.$$

Имеем, с учетом свободного параметра α_2 и (2.1)

$$\begin{aligned}U_1(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_1 \Phi(\alpha_1, \alpha_2) - i\alpha_2 \Psi(\alpha_1, \alpha_2), \\ U_2(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_2 \Phi(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_1 \Psi(\alpha_1, \alpha_2).\end{aligned}$$

Внеся в последние соотношения внешние формы, имеем

$$\begin{aligned}U_1(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_1 \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_1^2} - i\alpha_2 \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_2^2}, \\ U_2(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_2 \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_1^2} + i\alpha_1 \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_2^2}.\end{aligned}$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем вектор перемещения \mathbf{w} из (1.3) в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и вектор упакованных блочных элементов (2.1), (2.2), которые в результате действия дифференциальных операторов, представляют перемещения. Кроме этого, приравняем вектор контактных напряжений и вектор, связанный с внешними объемными силами $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$. В обеих задачах предварительно применяется к ним преобразование Фурье. После преобразований, объединения компонент вектора напряжений это приводит к соотношениям

$$\int_0^\infty \mathbf{m}(x_1 - \xi_1, \alpha_2) \mathbf{g}(\xi_1, \alpha_2) d\xi_1 = \mathbf{s}(x_1, \alpha_2), \quad 0 \leq x_1 \leq \infty, \quad |x_2| \leq \infty, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) = \|M_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2.$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}M_{11}(\alpha_1, \alpha_2) &= K_{11}(\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_1^2 - p_1^2)^{-1} i\alpha_1, \\ M_{12}(\alpha_1, \alpha_2) &= K_{12}(\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_1^2 - p_2^2)^{-1} i\alpha_2, \\ M_{21}(\alpha_1, \alpha_2) &= K_{21}(\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_1^2 - p_1^2)^{-1} i\alpha_2, \\ M_{22}(\alpha_1, \alpha_2) &= K_{22}(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_1^2 - p_2^2)^{-1} i\alpha_1, \\ s_1(x_1, \alpha_2) &= G_1(p_1, \alpha_2)r_{11}(x_1, \alpha_2) + G_2(p_2, \alpha_2)r_{12}(x_1, \alpha_2) + n_1(x_1, \alpha_2), \\ s_2(x_1, \alpha_2) &= G_1(p_1, \alpha_2)r_{21}(x_1, \alpha_2) + G_2(p_2, \alpha_2)r_{22}(x_1, \alpha_2) + n_2(x_1, \alpha_2), \\ S_1(\alpha_1, \alpha_2) &= G_1(p_1, \alpha_2)R_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + G_2(p_2, \alpha_2)R_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + N_1(\alpha_1, \alpha_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2(\alpha_1, \alpha_2) &= G_1(p_1, \alpha_2)R_{21}(\alpha_1, \alpha_2) + G_{22}(p_2, \alpha_2)R_{22}(\alpha_1, \alpha_2) + N_2(\alpha_1, \alpha_2), \\
 R_{11}(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_1 \frac{G_1(p_1, \alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_1)A}}{\alpha_1^2 - p_1^2}; \quad R_{12}(\alpha_1, \alpha_2) = -i\alpha_2 \frac{G_2(p_2, \alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_2)A}}{\alpha_1^2 - p_2^2}; \\
 R_{21}(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_2 \frac{G_1(p_1, \alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_1)A}}{\alpha_1^2 - p_1^2}; \quad R_{22}(\alpha_1, \alpha_2) = i\alpha_1 \frac{G_2(p_2, \alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_2)A}}{\alpha_1^2 - p_2^2}; \\
 N_1(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_1 \frac{i(\alpha_1 - p_1)\phi(A)e^{i\alpha_1 A}}{\alpha_1^2 - p_1^2} - i\alpha_2 \frac{i(\alpha_1 - p_2)\psi(A)e^{i\alpha_1 A}}{\alpha_1^2 - p_2^2}; \\
 N_2(\alpha_1, \alpha_2) &= -i\alpha_2 \frac{i(\alpha_1 - p_1)\phi(A)e^{i\alpha_1 A}}{\alpha_1^2 - p_1^2} + i\alpha_1 \frac{i(\alpha_1 - p_2)\psi(A)e^{i\alpha_1 A}}{\alpha_1^2 - p_2^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь при интегрировании было применено правило

$$m(x_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Легко видеть, что уравнение (3.3), скрыв свободный параметр α_2 , превращается в уравнение (3.1), зависящее лишь от параметра α_1 , по которому выполняются все действия при его решении.

Таким образом, переход к деформируемым штампам в контактных задачах приводит к решению системы интегральных уравнений Винера–Хопфа с присутствием в правых частях функционалов $G_m(p_1, \alpha_2)$ от неизвестных контактных напряжений. Этим контактные задачи с деформируемым штампом качественно отличаются от случая абсолютно жесткого штампа.

4. О решении системы интегральных уравнений Винера–Хопфа

Случай системы двух уравнений изучен в работе [19]. Когда реология материала штампа оказывается сложной, описываемой системами N компонент, используется подход, развитый в работе [20].

Опуская детали и отсылая к [19] получим представление решения для случая сложной реологии в виде в преобразованиях Фурье в виде

$$G_m(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^N G_n(p_n, \alpha_2)Q_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) + Q_{mN+1}(\alpha_1, \alpha_2), \quad m, n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

Для определения функционалов, $G_m(p_m, \alpha_2)$, $m = 1, 2$ внесем параметры p_1, p_2 в функции в левой и правые части равенств (4.1) и разрешим систему уравнений относительно функционалов. В результате получим их значения

$$G_m(p_m, \alpha_2) = \sum_{n=1}^N G_n(p_n, \alpha_2)Q_{mn}(p_m, \alpha_2) + Q_{mN+1}(p_m, \alpha_2), \quad m, n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2)$$

Разрешив систему относительно функционалов $G_m(p_m, \alpha_2)$.

Будучи внесенными в правые части соотношений (4.1), последние представляют решение контактной задачи с деформируемым штампом измененной реологии в преобразованиях Фурье. Определитель системы алгебраических уравнений (4.2) является дисперсионным уравнением, служащим для определения резонансных частот через посредством соотношений

$$k^2 = \rho\omega^2, \quad k_1^2 = k^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad k_2^2 = k^2\mu^{-1}, \quad p_m^2 = k_m^2 - \alpha_2^2, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Существование резонансов в контактных задачах с деформируемым штампом предсказал академик И.И. Ворович [21, 22].

Выполнив указанные подстановки, решение контактной задачи с деформируемым штампом и измененной реологией представляется в виде

$$g_m(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad m = 1, 2.$$

Выводы

В статье продемонстрирована возможность решения контактных задач с деформируемым штампом в неклассической области. Усложнение реологических свойств материала штампа будет приводить к увеличению порядка системы интегральных уравнений, которые всегда можно решить для многослойных сред.

Литература [References]

1. Papangelo, A., Ciavarella, M., Barber, J.R., Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471. DOI: [10.1098/rspa.2015.0271](https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271)
2. Zhou, S., Gao, X.L., Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. DOI: [10.1007/s00033-012-0205-0](https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0)
3. Almqvist, A., *An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem*, 2013. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem>
4. Cocou, M., A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, vol. 22, pp. 508–519. DOI: [10.1016/j.nonrwa.2014.08.012](https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012)
5. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2349–2362. DOI: [10.1016/S0020-7683\(97\)00154-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6)
6. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II–Examples. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2363–2378. DOI: [10.1016/S0020-7683\(97\)00155-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8)
7. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006)
8. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI: [10.1016/j.euromechsol.2006.05.007](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007)
9. Almqvist, A., Sahlin, F., Larsson, R., Glavatskih, S., On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. DOI: [10.1016/j.triboint.2005.11.008](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008)
10. Andersson, L.E., Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.*, 2000, vol. 42, pp. 169–202. DOI: [10.1007/s002450010009](https://doi.org/10.1007/s002450010009)
11. Cocou, M., Rocca, R., Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis*, 2000, vol. 34, pp. 981–1001.
12. Kikuchi, N., Oden, J., *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1988.
13. Raous, M., Cangémi, L., Cocu, M., A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 1999, vol. 177, pp. 383–399. DOI: [10.1016/S0045-7825\(98\)00389-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00389-2)
14. Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J., Models and analysis of quasistatic contact. *Lect. Notes Phys.*, vol. 655. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
15. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*, 2022, т. 84, №1, с. 25–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On contact problems with a deformable stamp. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and plasticity*, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. (in Russian)] DOI: [10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34)
16. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannyye*

zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains. Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]

17. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI: [9.31857/S2686740021040039](https://doi.org/10.31857/S2686740021040039)
18. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Об одном методе решения граничных задач динамической теории упругости в четвертьплоскости. *ПММ*, 2021, т. 85, № 3, с. 275–282. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On a method for solving boundary value problems in the dynamic theory of elasticity in a quarter-plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 85, no. 3, pp. 275–282.] DOI: [10.31857/S0032823521030024](https://doi.org/10.31857/S0032823521030024)
19. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной факторизационной задаче Гильберта-Винера и методе блочного элемента. *Доклады Академии наук*, 2014, т. 459, № 5, с. 557–561. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On one Hilbert-Wiener factorization problem and the block element method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561. (in Russian)]
20. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On the problem of evaluating the behavior of multicomponent materials in mixed boundary conditions in contact problems. *Materials Physics and Mechanics*, 2022, vol. 48, iss. 2, pp. 379–385. DOI: [10.18720/MPM.48\(3\)2022_8](https://doi.org/10.18720/MPM.48(3)2022_8)
21. Ворович, И.И., Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*, 1979, т. 245, № 4, с. 817–820. [Vorovich, I.I., Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous strip. *Doklady AN SSSR = Rep. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)]
22. Ворович, И.И., Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*, 1979, т. 245, № 5, с. 1076–1079. [Vorovich, I.I., Resonance properties of an elastic inhomogeneous strip. *Doklady AN SSSR = Rep. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)]