УДК 539.3 EDN: OAJZAM DOI: 10.31429/vestnik-20-3-50-56

Метод исследования наночастиц для материалов сложных реологий

М. В. Зарецкая, В. А. Бабешко ✉, И. С. Телятников, Д. А. Снетков

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Владимир Андреевич; ORCID 0000-0002-6663-6357; SPIN 2943-6842; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. В более ранних работах авторов исследована проблема моделирования самоорганизации и самосборки наночастиц в фрагменты наноматериалов. Предполагалось, что наночастицы представляются материалом, описываемым уравнением Гельмгольца, для которого решалась соответствующая граничная задача. В том случае, если наночастица имеет носитель в форме полосы, проблема представления решения векторной граничной задачи, с помощью совокупности решений скалярных задач в полосе решается достаточно просто. Однако, в случае областей с кусочно-гладкой границей, это становится мало очевидным. В связи с этим, в работе показано, что такое разложение выполнимо для областей типа прямоугольного клина. С помощью решений в этой области можно строить асимптотические и приближенные решения для такой неклассической области как прямоугольник. В работе применен подход, опирающийся на новый универсальный метод моделирования.

Ключевые слова: наночастицы, граничные задачи, метод блочного элемента, упакованные блочные элементы, уравнения Ламе, уравнения Гельмгольца.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00128).

Цитирование: Зарецкая М. В., Бабешко В. А., Телятников И. С., Снетков Д. А. Метод исследования наночастиц для материалов сложных реологий // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 50–56. EDN: OAJZAM. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-50-56

Поступила 16 августа 2023 г. После доработки 2 сентября 2023 г. Принято 6 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Method of Investigation of Nanoparticles for Materials of Complex Rheologies

M. V. Zaretskaya, V. A. Babeshko ✉, I. S. Telyatnikov, D. A. Snetkov

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Vladimir A. Babeshko; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. In earlier works of the authors, the problem of modeling the self-organization and self-assembly of nanoparticles into fragments of nanomaterials was investigated. It was assumed that nanoparticles are represented by a material described by the Helmholtz equation, for which the corresponding boundary value problem was solved. In the event that a nanoparticle has a carrier in the form of a strip, the problem of representing the solution of a vector boundary value problem is solved quite simply with the help of a set of solutions to scalar problems in the strip. However, in the case of regions with a piecewise smooth boundary, this becomes less obvious. In this regard, the paper shows that such a decomposition is feasible for rectangular wedge-type regions. Using solutions in this domain, one can construct asymptotic and approximate solutions for such a nonclassical domain as a rectangle. The approach used in the work is, based on a new universal modeling method.

Keywords: nanoparticles, boundary value problems, block element method, packed block elements, Lame equations, Helmholtz equations.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00128).

Cite as: Zaretskaya, M. V., Babeshko, V. A., Telyatnikov, I. S., Snetkov, D. A., Method of investigation of nanoparticles for materials of complex rheologies. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 50–56. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-50-56

Received 16 August 2023. Revised 2 September 2023. Accepted 6 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

В монографии [1] В. Новацкий отметил, что применение преобразования Галеркина [2,3] или представление решений с помощью потенциалов в граничных задачах с заданными на границе напряжениями, заметно усложняет их решение по сравнению с заданными перемещениями. В то же время в большинстве рассматриваемых в инженерной практике граничных задач ставятся граничные условия первого рода, то есть на границе задаются векторы напряжений. Вопросы исследования и решения граничных задач для многокомпонентных материалов сложны, поскольку приходится рассматривать системы дифференциальных уравнений в частных произвольных, каждая из компонент которых присутствует в граничных условиях [4].

Б.Г. Галеркину принадлежит преобразование, которое позволяет приводить системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к отдельным дифференциальным уравнениям. Долгое время этот метод применялся только для численного исследования граничных задач. Однако имеются задачи, в том числе модели, решения которых необходимы в аналитическом виде. Это, во-первых, смешанные задачи, в которых решения могут иметь особенности [5], во-вторых, решения нужны в аналитическом виде для формирования взаимных контактов, слипания, распада по границам, происходящих между компонентами многокомпонентных частиц. Модели подобного взаимодействия имеются, например, в [6]. Особый интерес представляют хорошо известные из эксперимента процессы самоорганизации и самосборки наноматериалов [7]. Эксперименты известны, а строгих математических моделей нет. Стоит вопрос разделения и математического описания механических и физико-химических сторон этих процессов для понимания обоснованного способа управления ими и их компонентами. Известно, что разнообразие реологий многокомпонентных наноматериалов огромное [8–16]. Тем более важной является рассматриваемая задача.

В настоящей работе показано, что предложенный авторами универсальный метод решения граничных задач [17] достаточно однотипно и без особых сложностей решает граничные задачи для обоих указанных типов граничных условий. Универсальность метода состоит в однотипности подхода при решении граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных в неклассических областях, а также для ряда интегральных уравнений, например, Винера–Хопфа. Граничные задачи могут ставиться в областях разных размерностей и различных реологий. Имеющиеся различные способы дробления носителей блочных элементов, подобно сгущению сеток в численных методах, открывают возможность применения метода для случаев систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, как это выполняется в методе конечного элемента.

В работе дается решение векторной граничной задачи, разложенное по упакованным блочным элементам, являющимися решениями скалярных граничных задач в четверти плоскости. Впервые этим подходом построено точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи первого рода для динамических уравнений Ламе при заданных на границе напряжениях. В работе авторов [18] разработан интегро-дифференциальный метод разложения решений векторных граничных задач по скалярным, в работе [19] — менее общий, координатный. В обоих случаях на границах задавались перемещения. Ниже в рассматриваемой задаче применяется интегро-дифференциальный метод, являющийся более общим, чем координатный, требующий использование углубленных свойств решений скалярных задач, что не всегда удается получить.

1. Основные уравнения

Рассмотрим изучавшуюся в [18] плоскую граничную задачу второго рода, для системы уравнений Ламе, поставленную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе, где заданы перемещения. На ее основе сформулируем граничную задачу первого рода, задав на границе векторы напряжений. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако новый универсальный метод блочного элемента [17] в настоящей работе дает возможность это сделать в форме разложения решения по упакованным блочным элементам скалярных задач.

В первом квадранте динамические уравнения Ламе, после исключения временного члена $\exp(-i\omega t)$, имеют вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0, \quad \theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad k^2=\rho\omega^2,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0, \quad x_1,x_2\in\Omega, \quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{1.1}$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ — компоненты векторов перемещений в точке x_1,x_2, Ω — область первого квадранта $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность материала деформируемого тела, ω — частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t — время. В задаче первого рода значения нормальных и касательных напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $\sigma_2(x_1{,}0)\,,\tau_2(x_1{,}0)$, и $\sigma_1(0,x_2)\,,\tau_1(0,x_2)$ — на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом σ, а касательные — τ. В задаче второго рода на границе первого квадранта задаются компоненты векторов нормальных и касательных перемещений на осях абсцисс и ординат $u_1(x_1{,}0)$, $u_2(x_1{,}0)$ и $u_1(0,x_2)$, $u_2(0,x_2)$ соответственно.

2. Разложение решения граничной задачи применением блочных элементов

Уравнения Ламе как в статическом, так и в динамическом случаях обладают давно установленным свойством представления решения в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих, получаемых также применением преобразования Галеркина [1, 2]. Воспользуемся применявшимся в [18] разложением решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$u_1(x_1,x_2)=\partial_1\phi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2),$$
$$u_2(x_1,x_2)=\partial_2\phi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2),$$
$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{2.1}$$

Здесь приняты обозначения

$$(\Delta-p_1^2)\phi=0, \quad (\Delta-p_2^2)\psi=0, \quad p_1^2=k_1^2(\lambda+2\mu)^{-1}, \quad p_2^2=k_1^2\mu^{-1},$$
$$\phi(x_1{,}0)=f_1(x_1{,}0), \quad \phi(0,x_2)=f_2(0,x_2),$$
$$\psi(x_1{,}0)=g_1(x_1{,}0), \quad \psi(0,x_2)=g_2(0,x_2). \tag{2.2}$$

Функции f_m, $g_{\text{т}}$, $m=1,2$, в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области Ω.

Рассматривается случай граничной задачи Ламе первого рода. На осях координат задаются условия вида $\sigma_1(0,x_2)$, $\tau_1(0,x_2)$, $\sigma_2(x_1{,}0)$, $\tau_2(x_1{,}0)$

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при $x_1\to 0$ вида

$$\partial_1\phi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=\sigma_1(0,x_2),$$
$$\partial_2\phi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=\tau_1(0,x_2). \tag{2.3}$$

Аналогично при $x_2\to 0$

$$\partial_1\phi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=\sigma_2(x_1{,}0),$$
$$\partial_2\phi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=\tau_2(x_1{,}0). \tag{2.4}$$

Для решения граничной задачи для уравнений Ламе с граничными условиями (2.3), (2.4) строятся решения граничных задач для уравнений Гельмгольца при произвольных граничных условиях (2.2). Применяется метод блочного элемента, который описан в ряде работ авторов [18, 19]. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле решения имеют вид:

$$\phi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$\phi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j}-\alpha_{(3-j)1+}\right)\langle F_j(\alpha_j)-F_j(\alpha_{j1+})\rangle e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\frac{i\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2},\qquad(2.5)$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j}-\alpha_{(3-j)2+}\right)\langle G_j(\alpha_j)-G_1(\alpha_{j2+})\rangle e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\frac{i\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2},$$

$$\alpha_{11+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2},\quad \alpha_{21+}=i\sqrt{\alpha_1^2-p_1^2},\quad \alpha_{12+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_2^2},\quad \alpha_{22+}=i\sqrt{\alpha_1^2-p_2^2},$$

$$\alpha_{11+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2},\quad \alpha_{21+}=i\sqrt{\alpha_1^2-p_1^2},\quad \alpha_{12+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_2^2},\quad \alpha_{22+}=i\sqrt{\alpha_1^2-p_2^2}.$$

Разрезы у многозначных функций диктуются требованием выполнения автоморфизмов [18]. В соответствии с построением для приведенных блочных элементов справедливы свойства (2.2). Используя их, введем следующие обозначения решений уравнений Гельмгольца:

$$\phi(x_1,x_2)\equiv\phi\left[x_1,x_2,f_1(\xi_1,0),f_2(0,\xi_2)\right]\to f_1(x_1,0),\quad 0<x_2\ll 1,$$

$$\phi(x_1,x_2)\equiv\phi\left[x_1,x_2,f_1(\xi_1,0),f_2(0,\xi_2)\right]\to f_2(0,x_2),\quad 0<x_1\ll 1,$$

$$\psi(x_1,x_2)\equiv\psi\left[x_1,x_2,g_1(\xi_1,0),g_2(0,\xi_2)\right]\to g_1(x_1,0),\quad 0<x_2\ll 1,$$

$$\psi(x_1,x_2)\equiv\psi\left[x_1,x_2,g_1(\xi_1,0),g_2(0,\xi_2)\right]\to g_2(0,x_2),\quad 0<x_1\ll 1.$$

В более ранних работах авторов интегро-дифференциальным методом построено решение граничной задачи второго рода для уравнений Ламе. Точное его решение в первом квадранте имеет вид [18]

$$\begin{aligned}u_1(x_1,x_2)=\partial_1\Big\langle\phi_1&\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_1(0,\xi_2)+\frac12\partial_1^{(-1)}F(\xi_2)\right]+\\&+\phi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0)+\frac12\partial_1^{(-1)}D(\xi_1),\ \frac12\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\right]\Big\rangle+\\&+\partial_2\Big\langle\psi_1\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0)+\frac12\partial_1^{(-1)}\mathrm{C}(\xi_1),\ \frac12\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\right]-\\&-\psi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2)+\frac12\partial_1^{(-1)}E(\xi_2)\right]\Big\rangle,\end{aligned}\qquad(2.6)$$

$$\begin{aligned}u_2(x_1,x_2)=\partial_2\Big\langle\phi_1&\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),\ \frac12\partial_1^{-1}u_1(0,\xi_2)+\frac12\partial_2^{(-1)}F(\xi_2)\right]+\\&+\phi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0)+\frac12\partial_2^{(-1)}D(\xi_1),\ \frac12\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\right]\Big\rangle-\\&-\partial_1\Big\langle\psi_1\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0)+\frac12\partial_2^{(-1)}\mathrm{C}(\xi_1),\ \frac12\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\right]-\\&-\psi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),\ \frac12\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2)+\frac12\partial_2^{(-1)}E(\xi_2)\right]\Big\rangle,\end{aligned}\qquad(2.7)$$

$$\mathrm{C}(x_1) = \partial_2\partial_1^{(-1)}u_1(x_1,0) - \partial_1\partial_2^{(-1)}u_1(x_1,0), \quad D(x_1) = \partial_2\partial_1^{(-1)}u_2(x_1,0) - \partial_1\partial_2^{(-1)}u_2(x_1,0),$$
$$E(x_2) = \partial_1\partial_2^{(-1)}u_2(0,x_2) - \partial_2\partial_1^{(-1)}u_2(0,x_2), \quad F(x_2) = \partial_1\partial_2^{(-1)}u_1(0,x_2) - \partial_2\partial_1^{(-1)}u_1(0,x_2).$$

Ниже воспользуемся им для решения поставленной задачи Ламе первого рода с граничными условиями (2.3)–(2.4). Для этого осуществим ряд преобразований. В граничных условиях введем новые переменные, положив для $\sigma_1\left(x_1,x_2\right) \to \sigma_1\left(0,x_2\right)$, $\tau_1\left(x_1,x_2\right) \to \tau_1\left(0,x_2\right)$, $x_1 \ll 1$,

$$x_1 = (2b_1)^{-1}(z_1+y_1), \quad x_2 = (2b_2)^{-1}(z_1-y_1).$$

Аналогично, для

$$\sigma_2\left(x_1,x_2\right) \to \sigma_2\left(x_1{,}0\right), \quad \tau_2\left(x_1,x_2\right) \to \tau_2\left(x_1{,}0\right), \quad x_2 \ll 1$$

примем

$$x_1 = (2b_2)^{-1}(z_2+y_2), \quad x_2 = (2b_1)^{-1}(z_2-y_2).$$

В результате получим представления

$$\begin{gathered}
(b_1x_1 - b_2x_2) = y_1, \quad (b_1x_1 + b_1x_2) = z_1, \quad (b_2x_1 - b_1x_2) = y_2, \quad (b_2x_1 + b_1x_2) = z_2, \\
b_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)\mu}, \quad b_2 = \sqrt{\mu\lambda}, \\
\partial_{y_1} = (b_1\partial_1 - b_2\partial_2), \quad \partial_{z_1} = (b_1\partial_1 + b_2\partial_2), \quad \partial_{y_1}\partial_{z_1} = (b_1^2\partial_1\partial_1 - b_2^2\partial_2\partial_2), \\
\partial_{y_2} = (b_2\partial_1 - b_1\partial_2), \quad \partial_{z_2} = (b_2\partial_1 + b_2\partial_2), \quad \partial_{y_2}\partial_{z_2} = (b_2^2\partial_1\partial_1 - b_1^2\partial_2\partial_2),
\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_1\left((2b_1)^{-1}(z_1+y_1),(2b_2)^{-1}(z_1-y_1)\right) \equiv \sigma_{10}(y_1,z_1), \\
\tau_1\left((2b_1)^{-1}(z_1+y_1),(2b_2)^{-1}(z_1-y_1)\right) \equiv \tau_{10}(y_1,z_1), \\
\sigma_2\left((2b_2)^{-1}(z_2+y_2),(2b_1)^{-1}(z_2-y_2)\right) \equiv \sigma_{20}(y_2,z_2), \\
\tau_2\left((2b_2)^{-1}(z_2+y_2),(2b_1)^{-1}(z_2-y_2)\right) \equiv \tau_{20}(y_2,z_2).
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Как и в [18], для произвольной непрерывной функции $w(\xi,\eta)$ имеем соотношения

$$\begin{gathered}
\partial_{y_n}^{(-1)}w(y_n,z_n) = \int\limits_0^{y_n} w(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi, \quad \partial_{z_n}^{(-1)}w(y_n,z_n) = \int\limits_0^{z_n} w(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta, \\
\partial_{y_n}\partial_{z_n}\int\limits_0^{y_n}\int\limits_0^{z_n} w(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = w(y_2,z_2), \\
\partial_{y_n}\partial_{z_n}\partial_{y_n}^{(-1)}\partial_{z_n}^{(-1)}w(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = W(y_2,z_2).
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Заметим, что для вычисления производных или первообразных у граничных функций по параметрам, обратившимся в ноль, необходимо методом блочного элемента построить с их участием упакованные блочные элементы для уравнения Гельмгольца и вычислить требуемые значения в окрестности границы.

Внесем в (2.6), (2.7) вместо перемещений следующие соотношения

$$u_1(0,x_2) = \mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_{10}(y_1,z_1) - \lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_{10}(y_1,z_1),$$

$$u_2(0,x_2) = -\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_{10}(y_1,z_1) + (\lambda+2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_{10}(y_1,z_1),$$

$$u_1\left(x_1{,}0\right) = \mu\partial_1\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\sigma_{20}(y_2,z_2) - (\lambda+2\mu)\partial_2\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\tau_{20}(y_2,z_2),$$

$$u_2\left(x_1{,}0\right) = -\mu\partial_2\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\sigma_{20}(y_2,z_2) + \lambda\partial_1\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\tau_{20}(y_2,z_2).$$

Докажем, что построенные таким образом выражения представляют решение первой граничной задачи для уравнения Ламе в первом квадранте, разложенное с помощью упакованных блочных элементов. Для этого, требуется убедиться в выполнении граничных условий (2.3). Ограничимся границей x_2, на границе x_1 проверка производится аналогично.

Зная, что для проверки выполнения граничного условия (2.3) для нормального напряжения на оси x_2 необходимо, используя (2.8), (2.9), (2.10), вычислить выражение

$$\sigma_1(0, x_2) = (\lambda + 2\mu)\partial_1 u_1(0, x_2) + \lambda\partial_2 u_2(0, x_2),$$

получаем следующую последовательность преобразований

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\partial_1 u_1(0, x_2) + \lambda\partial_2 u_2(0, x_2) = \\
&= (\lambda + 2\mu)\partial_1 \left[\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2)\right] + \\
&+ \lambda\partial_2 \left[-\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) + (\lambda + 2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2)\right] = \\
&= (\lambda + 2\mu)\partial_1\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \lambda\partial_2\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \\
&- (\lambda + 2\mu)\partial_1\lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) + \lambda\partial_2(\lambda + 2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) = \\
&= [(\lambda + 2\mu)\mu\partial_1\partial_1 - \lambda\mu\partial_2\partial_2]\,\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) = \partial_{y_1}\partial_{z_1}\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) = \sigma_1(0, x_2).
\end{aligned}$$

Здесь принято во внимание соотношение $\partial_{y_1}\partial_{z_1} = (b_1^2\partial_1\partial_1 - b_2^2\partial_2\partial_2)$.

Рассмотрим случай заданных на границе касательных напряжений $\tau_1(0, x_2)$. Подставим в правую часть $\tau_1(0, x_2) = \mu\partial_2 u_1(0, x_2) + \mu\partial_1 u_2(0, x_2)$ значения $u_1(0, x_2)$, $u_2(0, x_2)$, взятые из (2.6), (2.7). В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
&\mu\partial_2 \left[\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) - \lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2)\right] + \\
&+ \mu\partial_1 \left[-\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1(0, x_2) + (\lambda + 2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2)\right] = \\
&= [(\lambda + 2\mu)\mu\partial_1\partial_1 - \lambda\mu\partial_2\partial_2]\,\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) = \partial_{y_1}\partial_{z_1}\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1(0, x_2) = \tau_1(0, x_2).
\end{aligned}$$

Здесь вновь использовано указанное выше соотношение. Таким образом, достаточно просто осуществляется разложение решения граничной задачи первого рода для уравнения Ламе в первом квадранте по решениям граничных задач для уравнений Гельмгольца, описывающих вихревые и потенциальные процессы в первом квадранте.

Вывод

Таким образом, в соответствии с целями поставленной задачи, доказано, что для наночастиц, получив решение скалярной граничной задачи второго рода, когда на границах задается вектор перемещений, достаточно просто построить решение векторной граничной задачи с усложненной реологией первого рода, когда на границе задается вектор напряжений. Предложенный метод без труда переносится на большие измерения.

Литература [References]

1. Новацкий, В., *Теория упругости.* Москва, Мир, 1975. [Nowatsky, V., *Teoriya uprugosti = Elasticity Theory.* Moscow, Mir, 1975. (in Russian)]
2. Galerkin, B.G., Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions. *C. R. Acad. Sci.*, 1930, vol. 190, pp. 1047–1048. (in French)
3. Galerkin, B.G., Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions. *C. R. Acad. Sci.*, 1931, vol. 193, pp. 568–571. (in French)
4. Игумнов, Л.А., Грезина, А.В., Метрикин, В.С., Панасенко, А.Г., Численно-аналитическое моделирование диффузионных процессов в ограниченных многокомпонентных твердых телах. *Проблемы прочности и пластичности*, 2018, т. 80, № 3, с. 336–348. [Igumnov, L.A., Grezina, A.V., Metrikin, V.S., Panasenko, A.G., Numerical-analytical modeling of diffusion processes in bounded multicomponent solids. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of Strength and Plasticity*, 2018, vol. 80, no. 3, pp. 336–348. (in Russian)]

5. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Москва, Наука, 1974. [Vorovich, I.I., Alexandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical mixed problems of elasticity theory*. Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]
6. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Исследование трехмерного уравнения Гельмгольца в клине методом блочного элемента. *ПМТФ*, 2021, т. 62, № 5, с. 15–21. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Investigation of the three-dimensional Helmholtz equation in a wedge by the block element method. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied Mechanics and Engineering Physics*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 15–21. (in Russian)] DOI: 10.15372/PMTF20210500
7. Gordeev, S.K., Kukushkin, S.A., Osipov, A.V., Pavlov, Yu.V., Self-organization in the formation of a nanoporous carbon material. *Physics of the Solid State*, 2000, vol. 42, iss. 12, pp. 2314–2317.
8. Arghavan, S., Singh A.V., On the vibrations of single-walled carbon nanotubes. *J. of Sound and Vibration*, 2011, vol. 330, iss. 13, pp. 3102–3122.
9. Kang, J.W., Kwon, O.K., A molecular dynamics simulation study on resonance frequencies comparison of tunable carbon-nanotube resonators. *Applied Surface Science*, 2012, vol. 258, iss. 6, pp. 2014–2016. DOI: 10.1016/j.apsusc.2011.05.026
10. Yoon J.W., Hwang H.J., Molecular dynamics modeling and simulations of a single-walled carbon-nanotube-resonator encapsulating a finite nanoparticle. *Computational Materials Science*, 2011, vol. 50, iss. 9, pp. 2741–2744. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.04.033
11. Jun, Yin, Zhuhua, Zhang, Xuemei, Li, Jin, Yu, Jianxin, Zhou, Yaqing, Chen, Wanlin, Guo, Waving potential in grapheme. *Nature Communications*, 2014, vol. 5, p. 3582. DOI: 10.1038/ncomms4582
12. Jun, Yin, Xuemei, Li, Jin, Yu, Zhuhua, Zhang, Jianxin, Zhou, Wanlin Guo, Generating electricity by moving a droplet of ionic liquid along graphene. *Nature Nanotechnology*, 2014, vol. 9, iss. 5, pp. 378–383. DOI: 10.1038/nnano.2014.56
13. Lei, X.W., Natsuki, T., Shi, J.X., Ni, Q.Q., An atomic-resolution nanomechanical mass sensor based on circular monolayer graphene sheet: Theoretical analysis of vibrational properties. *J. Appl. Phys.*, 2013, vol. 113, p. 154313. DOI: 10.1063/1.4802438
14. Lengiewicz, J., Korelc, J., Stupkiewicz, S., Automation of finite element formulations for large deformation contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2011, vol. 85, iss. 10, pp. 1252–1279. DOI: 10.1002/nme.3009
15. Roland, T., Retraint, D., Lu, K., Lu, J., Fatigue life improvement through surface nanostructuring of stainless steel by means of surface mechanical attrition treatment. *Scr. Mater.*, 2006, vol. 54, pp. 1949–1954. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2006.01.049
16. Tian, J., Villegas, J., Yuan, W., Fielden, D., Shaw, L., Liaw, P., Klarstrom, D., A study of the effect of nanostructured surface layers on the fatigue behaviors of a C-2000 superalloy. *Mater. Sci. Eng: A*, 2007, vol. 468–470, pp. 164–170. DOI: 10.1016/j.msea.2006.10.150
17. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *ДАН*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI: 10.31857/S2686740021040039
18. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики. *ДАН*, 2020, т. 495, с. 34–38. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The block element method in the expansion of solutions to complex boundary value problems in mechanics. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2020, vol. 495, pp. 34–38. (in Russian)] DOI: 10.31857/S2686740020060048
19. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Об одном методе решения граничных задач динамической теории упругости в четвертьплоскости. *ПММ*, 2021, т. 85, № 3, с. 275–282. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On a method for solving boundary value problems in the dynamic theory of elasticity in a quarter-plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 85, no. 3, pp. 275–282.] DOI: 10.31857/S0032823521030024