УДК 539.3 EDN: XUQMHA DOI: 10.31429/vestnik-20-3-80-85

Контактная задача в четверти плоскости с жестким штампом как основа задач с деформируемым штампом

А. С. Мухин, **О. В. Евдокимова**✉, **С. Б. Уафа**, **О. А. Бушуева**, **Д. А. Хрипков**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Евдокимова Ольга Владимировна; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается контактная задача о действии абсолютно жесткого штампа в форме четверти плоскости на многослойную среду. Эта задача является исходной для решения рассматриваемой контактной задачи, но уже с деформируемым штампом. Методов решения получаемого интегрального уравнения контактной задачи, ни численными, ни аналитическими, подходами, нет. В настоящей работе он развивается с применением универсального метода моделирования, развитого авторами ранее. Метод позволил преобразовать интегральное уравнение, поставленное в четверти плоскости, к дифференциальному, и затем свести к проблеме факторизации. Это позволило построить точное решение контактной задачи в четверти плоскости. Этот результат, затем, после построения в четверти плоскости решения граничной задачи, оказывается возможным использовать для решения контактной задачи с деформируемым штампом. В статье приводится еще одно представление решения интегрального уравнения, справедливое для более общих свойств ядра интегрального уравнения.

Ключевые слова: контактная задача, абсолютно жесткий штамп, метод блочного элемента, интегральное уравнение.

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (проект 22-21-00129).

Цитирование: Мухин А. С., Евдокимова О. В., Уафа С. Б., Бушуева О. А., Хрипков Д. А. Контактная задача в четверти плоскости с жестким штампом как основа задач с деформируемым штампом // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 80–85. EDN: XUQMHA. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-80-85

Поступила 16 августа 2023 г. После доработки 15 сентября 2023 г. Принято 17 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contact Problem in a Quarter Plane with a Rigid Stamp as the Basis of Problems with a Deformable Stamp

A. S. Mukhin, **O. V. Evdokimova**✉, **S. B. Uafa**, **O. A. Bushueva**, **D. A. Khripkov**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga V. Evdokimova; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. The paper considers the contact problem of the action of an absolutely rigid stamp in the form of a quarter plane on a multilayer medium.
This problem is the initial one for solving the contact problem under consideration, but already with a deformable stamp. Methods of solving the resulting there is no integral equation of the contact problem, either by numerical or analytical approaches. In this paper, it is developed using a universal modeling method developed by the authors earlier. The method made it possible to transform an integral equation posed in a quarter plane to a differential one, and then reduce it to a factorization problem. This made it possible to construct an exact solution to the contact problem in the quarter plane. This result, then, after constructing the solution of the boundary problem in a quarter plane, it turns out to be possible to use it to solve the contact problem with a deformable stamp. The article provides another representation of the solution of the integral equation, valid for more general properties of the kernel of the integral equation.

Keywords: contact problem, absolutely rigid stamp, block element method, integral equation.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00129).

Cite as: Mukhin, A. S., Evdokimova, O. V., Uafa, S. B., Bushueva, O. A., Khripkov, D. A., Contact problem in a quarter plane with a rigid stamp as the basis of problems with a deformable stamp. *Ecological*

Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 80–85. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-80-85

Received 16 August 2023. Revised 15 September 2023. Accepted 17 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

Исследованию контактных задач теории упругости посвящено большое число работ [1–12]. Точные решения контактных задач получались лишь в частных случаях. К их числу относится одномерное интегральное уравнение Винера–Хопфа. Оно оказалось применимым не только в контактных задачах, но и во многих других областях науки и практической деятельности.

Точное решение двумерного уравнения Винера–Хопфа в четверть плоскости открывает возможность построения высокоточных решений контактных задач в ограниченных областях подобно тому, как это делалось в одномерном случае.

Интегральные уравнения Винера–Хопфа имеют широкое применение в различных областях для материалов сложной реологии, в том числе в теории прочности, дифракции, дефектоскопии, трибологии. В работе кратко приводится построение решения двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для случая мероморфного преобразования Фурье ядра интегрального уравнения, изложенного в [13], а также приводится новое представление, которое не требует жестких ограничений на ядро интегрального уравнения и применимое для более общих свойств ядра.

1. Определяющие уравнения

Интегральное уравнение контактной задачи для изотропной слоистой среды в четверти плоскости в декартовой системе координат имеет вид [13, 14]

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty \int_0^\infty k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\varphi(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant \infty, \\
k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2, \\
K(\alpha_1,\alpha_2) \equiv K(u) = \frac{R(u)}{P(u)}, \quad u = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \\
K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(u)}{P_n(u)}, \quad R_n(u) = (u^2-z_n^2), \quad P_n(u) = (u^2-\xi_n^2), \\
K(u) = \frac{1}{u}(1+o(1)), \quad u \to \pm\infty.
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь γ_1, γ_2 — контуры, лежащие на вещественной оси и отклоняющиеся от нее в динамических задачах гармонической во времени вибрации, обходя вещественные полюса по малым полуокружностям, если они возникают [14].

В работе [13] изложен один подход, позволяющий построить точное решение интегрального уравнения (1.1) с указанными свойствами.

Функции $R(u)$, $P(u)$ являются четными целыми функциями, представимыми бесконечными произведениями. Предполагается, что функции $R(u)$ и $P(u)$ являются целыми функциями первого порядка и конечного типа, то есть трансцендентными, в частности, полиномами. В принятых обозначениях целая функции $R(u)$ обращается в нуль на множествах значений $u_n = \pm z_n$. Разрешая эти соотношения относительно переменных α_s, $s = 1, 2$, имеем нули в форме $\alpha_{11m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - z_m^2}$, $\alpha_{21m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - z_m^2}$. Соответственно, целая функция $P(u)$

имеет нули на множествах на $u_n = \pm\zeta_n$, $\alpha_{12r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - \xi_r^2}$, $\alpha_{22r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - \xi_r^2}$. Все нули, предполагаемые однократными, имеют точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях, содержащих мнимые полуоси комплексной плоскости.

2. Метод решения

Описанные свойства интегрального уравнения, с использованием нового универсального метода моделирования [15], позволяют применить к рассматриваемому интегральному уравнению метод разделения переменных. Предварительно устанавливается общий вид решения интегрального уравнения. Следуя указанному методу [15], применяемому как к дифференциальным уравнениям, так и к интегральным, ищется общее решение $\phi(x_1, x_2)$ дифференциальных уравнений в форме разложения по общим решениям однородных дифференциальных уравнений для $s = 1, 2, 3, \ldots$. Экспоненциальная подстановка $\phi_s(x_1, x_2) = Ce^{i(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}$, где β_n, $n = 1, 2$ — произвольные параметры, внесенная в дифференциальное уравнение в [13] позволяет на основе характеристического уравнения $\beta_1^2 + \beta_2^2 - z_s^2 = 0$ получить две группы корней

$$\{\beta_{11s+} = i\sqrt{\beta_2^2 - z_s^2}, \quad \beta_2\}; \quad \{\beta_1, \quad \beta_{21s+} = i\sqrt{\beta_1^2 - z_s^2}\}; \quad \operatorname{Im}\beta_{n1+} \geqslant 0, \quad n = 1, 2.$$

Каждая группа корней зависит от β_1 или от β_2. Поэтому однородная составляющая решения дифференциального уравнения отыскивалось в форме

$$\phi_{so}(x_1, x_2) = C_{s1}e^{i(\beta_{11s+}x_1 + \beta_2 x_2)} + C_{s2}e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+}x_2)}.$$

Тогда общее решение интегрального уравнения (1.1) приняло вид

$$\phi(x_1, x_2) = \phi_1(x_1, x_2) + \phi_2(x_1, x_2).$$

Здесь обозначено

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_{10}(x_1, x_2) + \varphi_{1*}(x_1, x_2), \qquad \varphi_2(x_1, x_2) = \varphi_{20}(x_1, x_2) + \varphi_{2*}(x_1, x_2),$$

$$\varphi_{10}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1}e^{i(\beta_{11s+}x_1 + \beta_2 x_2)}, \quad \varphi_{1*}(x_1, x_2) = D_1 e^{-i\eta_1 x_1},$$

$$\varphi_{20}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2}e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+}x_2)}, \quad \varphi_{2*}(x_1, x_2) = D_2 e^{-i\eta_2 x_2}.$$

3. О способе решения интегрального уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение (1.1), представленное с применение преобразований Фурье в виде

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2)\Phi(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 = Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}, \quad 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant \infty. \quad (3.1)$$

Здесь и в дальнейшем прописными буквами обозначаются преобразования Фурье, вычисленные от строчных функций

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int\limits_0^{\infty} \phi(x_1, x_2)e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

Для использования представления (3.1) необходимо построить преобразования Фурье $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ искомого решения. Ищем $D(\eta_1, \eta_2)$ в форме произведения функций с разделенными переменными $D_1(\eta_1)D_2(\eta_2)$.

Вычисления позволяют получить для фрагментов решений следующие представления

$$\Phi_{10}(\alpha_1,\alpha_2): \int_0^\infty\int_0^\infty C_{s1}e^{i(\beta_{11s+}x_1+\beta_2x_2)}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = -\frac{2\pi C_{s1}\delta(\beta_2+\alpha_2)}{i(\beta_{11s+}+\alpha_1)},$$

$$\Phi_{1*}(\alpha_1,\alpha_2): \int_0^\infty\int_0^\infty D(\eta_1)e^{-i\eta_1x_1}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = -\frac{2\pi D_1(\eta_1)\delta(\alpha_2)}{i(\alpha_1-\eta_1)},$$

$$\Phi_{20}(\alpha_1,\alpha_2): \int_0^\infty\int_0^\infty C_{s2}e^{i(\beta_1x_1+\beta_{21s+}x_2)}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = -\frac{2\pi C_{s2}\delta(\beta_1+\alpha_1)}{i(\beta_2+\beta_{21s+})},$$

$$\Phi_{2*}(\alpha_1,\alpha_2): \int_0^\infty\int_0^\infty D(\eta_2)e^{-i(\eta_2x_2)}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = -\frac{2\pi D_2(\eta_2)\delta(\alpha_1)}{i(\alpha_2-\eta_2)}.$$

Не повторяя выполненные в [13] преобразования, выпишем построенное этим методом решение интегрального уравнения в виде

$$\varphi(x_1,x_2,\eta_1,\eta_2) = \varphi_1(x_1,x_2,\eta_1)+\varphi_2(x_1,x_2,\eta_2),$$

$$\varphi_1(x_1,x_2,\eta_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x_1,x_2,\beta_2,\eta_1)\,\mathrm{d}\beta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_3}\frac{K_{+1}(\xi,\beta_2)}{K_{+1}(\lambda,\beta_2)(\xi-\lambda)}\frac{A_1}{(\xi-\eta_1)K(\eta_1,0)}e^{i(-\lambda x_1+\beta_2x_2)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\beta_2 + \frac{A_1}{K(\eta_1,0)}e^{-i\eta_1x_1};$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,\eta_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x_1,x_2,\beta_1,\eta_2)\,\mathrm{d}\beta_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_3}\frac{K_{+2}(\beta_1,\xi)}{K_{+2}(\beta_1,\lambda)(\xi-\lambda)}\frac{A_2}{(\xi-\eta_2)K(0,\eta_2)}e^{i(\beta_1x_1-\lambda x_2)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\beta_1 + \frac{A_2}{K(0,\eta_2)}e^{-i\eta_2x_2}. \tag{3.2}$$

Решение для произвольной правой части $f(x_1,x_2)$ уравнения (1.1) получаются в результате вычисления интеграла при $A_1 = A_2 = 1$

$$\phi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x_1,x_2,\eta_1,\eta_2)A(\eta_1,\eta_2)e^{-i(\eta_1x_1+\eta_2x_2)}\,\mathrm{d}\eta_1\,\mathrm{d}\eta_2.$$

Здесь функции $\phi_1(x_1,x_2)$, $\phi_2(x_1,x_2)$ берутся из формулы (3.2).

Наряду с построенным решением оказалось возможным построить иным методом решение интегрального уравнения (1.1) для несколько более общих ядер.

4. О представлении решения для случая более общих ядер

Построенное решение можно представить в другом виде, которое справедливо для значительно большего количества функций, описывающих преобразование Фурье двумерного интегрального уравнения. Это представление имеет вид

$$q(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}q(x,y,\lambda,\mu)e^{-i(\lambda x+\mu y)}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu, \tag{4.1}$$

$$q(x,y,\lambda,\mu) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}^{Q}(\alpha,\beta,\lambda,\mu)e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,$$

$$Q(\alpha,\beta,\lambda,\mu) = Q_1(\alpha,\beta,\lambda,\mu) + Q_2(\alpha,\beta,\lambda,\mu).$$

Здесь приняты обозначения

$$Q_1(\alpha,\beta,\lambda,\mu) = -K^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\beta}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{F(\alpha,\beta)\right\}_{\beta}^{+}\right\}_{\beta}^{-}\right\}_{\alpha}^{+} + \\ + K_{+\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{F(\alpha,\beta)\right\}_{\alpha}^{+}\right\}_{\alpha}^{+};$$

$$Q_2(\alpha,\beta,\lambda,\mu) = -K^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{F(\alpha,\beta)\right\}_{\alpha}^{+}\right\}_{\alpha}^{-}\right\}_{\beta}^{+} + \\ + K_{+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{F(\alpha,\beta)\right\}_{\beta}^{+}\right\}_{\beta}^{+}.$$

Операторы в фигурных скобках в (3.1) детально описаны в [1] и имеют вид

$$\left\{G(\alpha,\beta)\right\}_{\alpha}^{+} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi, \quad \alpha\in\Pi_{\alpha}^{+}, \qquad \left\{G(\alpha,\beta)\right\}_{\alpha}^{-} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi, \quad \alpha\in\Pi_{\alpha}^{-},$$

$$\left\{G(\alpha,\beta)\right\}_{\beta}^{+} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}\,\mathrm{d}\eta, \quad \beta\in\Pi_{\beta}^{+}, \qquad \left\{G(\alpha,\beta)\right\}_{\beta}^{-} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}\,\mathrm{d}\eta, \quad \beta\in\Pi_{\beta}^{-},$$

$$K_{+\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi, \quad \alpha\in\Pi_{\alpha}^{+},$$

$$K_{-\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi\right), \quad \alpha\in\Pi_{\alpha}^{-},$$

$$K_{+\beta}(\alpha,\beta) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}\,\mathrm{d}\eta, \quad \beta\in\Pi_{\beta}^{+},$$

$$K_{-\beta}(\alpha,\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}\,\mathrm{d}\eta\right), \quad \beta\in\Pi_{\beta}^{-}.$$

Здесь Π_{α}^{+}, Π_{α}^{-} — комплексные области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_1, а Π_{β}^{+},Π_{β}^{-} — области правее, плюс, и левее, минус, контура Γ_2.

Вывод

В работе построена формула, позволяющая решать контактную задачу для абсолютно жесткого штампа в четверти плоскости. Она дала возможность рассматривать более сложную задачу для случая деформируемых штампов, в том числе, с усложняемой реологией. Ценность этого решения состоит также и в том, что получен общий вид точного решения интегрального уравнения Винера–Хопфа в четверти плоскости, что дает возможность усложнять требования к ядрам этих уравнений. Она зависит только от аналитических свойств, а именно, факторизационных свойств функций, входящих в описание формулы. Таким образом, возможно, установлен общий вид решения уравнения Винера–Хопфа в четверть плоскости, справедливый для более широкого класса функций, а не только имеющих мероморфные функции в представлении ядра.

Литература [References]

1. Галин, Л.А., *Контактные задачи теории упругости.* Москва, Гостехиздат, 1953. [Galin, L.A., *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti = Contact problems of elasticity theory.* Moscow, Gostekhizdat, 1953. (in Russian)]
2. Галин, Л.А., Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости. *ДАН СССР*, 1943, т. XXXIX, № 3, с. 88–93. [Galin, L.A., Mixed problem of elasticity theory with friction forces for a half-plane. *Doklady Akademii nauk SSSR = Rep. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1943, vol. XXXIX, no. 3, pp. 88–93. (in Russian)]
3. Галин, Л.А., Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. *ПММ*, 1945, т. IX, вып. 5, с. 413–424. [Galin, L.A., Stamp indentation in the presence of friction and adhesion. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1945, vol. IX, iss. 5, pp. 413–424. (in Russian)]
4. Галин, Л.А., *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* Москва, Наука, 1980. [Galin, L.A., *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti = Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)]
5. Горячева, И.Г., Добычин, М.Н., *Контактные задачи трибологии.* Москва, Машиностроение, 1988. [Goryacheva, I.G., Dobychin, M.N., *Kontaktnye zadachi tribologii = Contact problems of tribology.* Moscow, Mashinostroenie, 1988. (in Russian)]
6. Papangelo, A., Ciavarella, M., Barber, J.R., Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471, art. 20150271. DOI: 10.1098/rspa.2015.0271
7. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2349–2362. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00154-6
8. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II–Examples. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2363–2378. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00155-8
9. Zhou, S., Gao, X.L., Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. DOI: 10.1007/s00033-012-0205-0
10. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006
11. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2006.05.007
12. Almqvist, A., Sahlin, F., Larsson, R., Glavatskih, S., On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. DOI: 10.1016/j.triboint.2005.11.008
13. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды. *ПММ*, 2022, т. 86, № 5, с. 628–637. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Exact solution by a universal method for modeling a contact problem in a quarter-plane of a multilayer medium. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, vol. 86, no. 5, pp. 628–637. (in Russian)] DOI: 10.31857/S0032823522050046
14. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
15. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI: 10.31857/S2686740021040039