УДК 519.63 EDN: XMHOGU DOI: 10.31429/vestnik-20-3-74-79

Построение разностных дискретизаций при решении сопряженной задачи для уравнения переноса пассивной примеси

В. С. Кочергин✉, **С. В. Кочергин**

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе на основе проекционного варианта интегро-интерполяционного метода представлена консервативная монотонная разностная схема для интегрирования уравнения переноса пассивной примеси. Путем суммирования по частям разностного аналога интегрального тождества получена согласованная с основной задачей переноса-диффузии разностная дискретизация для решения сопряженных задач. Показано, что при реализации сопряженных задач могут применяться предложенные схемы и алгоритмы, используемые в процедурах при интегрировании основной задачи.

Ключевые слова: разностная дискретизация, монотонная схема, сопряженная задача, вариационная ассимиляция.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Построение разностных дискретизаций при решении сопряженной задачи для уравнения переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 3. С. 74–79. EDN: XMHOGU. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-74-79

Поступила 22 августа 2023 г. После доработки 13 сентября 2023 г. Принято 25 сентября 2023 г. Публикация 29 сентября 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Construction of Difference Discretizations in Solving the Adjoint Problem for the Passive

V. S. Kochergin✉, **S. V. Kochergin**

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. Due to the constant development of technical capabilities for obtaining information about the state of the ocean and seas, the development of methods of mathematical modeling of water circulation, it is necessary to build and apply modern algorithms for assimilation of such information in dynamic models. One of the approaches to solving this problem is a variational method based on solving adjoint problems and iterative search for the minimum of the prediction quality functional. The input parameters of the model found in this case make it possible to obtain a solution that is consistent with the measurement data due to the minimization of the corresponding prediction quality functional. When solving such problems, it naturally becomes necessary to numerically solve both the main and the conjugate problem. It is important that the difference analogue of the integral identity maintains a balance similar to the differential formulation. Thus, consistency of the discretizations of the main and conjugate problem is necessary. The approximation of the conjugate problem is obtained from the difference analogue of the integral identity by summing in parts taking into account boundary conditions and the difference analogue of the continuity equation. On the other hand, even solving the main problem, taking into account the gradient structure of the pollution fields, leads to the need to use modern advanced discretizations. One of these methods is the projection version of the integro-interpolation method. Based on the projection variant of the integro-interpolation method, a conservative monotone difference scheme for integrating the passive impurity transfer equation is presented. A consistent difference discretization for solving adjoint problems is obtained from the difference analogue of the integral identity. It is shown that in the case of using the proposed scheme, the procedures used in integrating the main task can be used to solve conjugate problems.

Keywords: difference discretization, monotone scheme, conjugate problem, variational assimilation.

Funding. The work was carried out thanks to the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 "Complex interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas" (code "Coastal Research").

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Construction of difference discretizations in solving the adjoint problem for the passive. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 74–79. DOI: 10.31429/vestnik-20-3-74-79

Received 22 August 2023. Revised 13 September 2023. Accepted 25 September 2023. Published 29 September 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

При решении ряда задач экологической направленности встает проблема идентификации параметров модели переноса пассивной примеси за счет ассимиляции данных измерений. Основы вариационного подхода ассимиляции данных измерений заложены в работах [1, 2] и в монографической литературе [3–7]. При реализации таких алгоритмов естественным образом появляется необходимость численного решения как основной, так и сопряженной задачи. Таким образом, необходима согласованность дискретизаций основной и сопряженной задачи. С другой стороны, даже решение основной задачи, учитывая градиентную структуру полей загрязнений, приводит к необходимости использования современных продвинутых дискретизаций. Одним из таких методов является проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ). В [8, 9] предложен метод, позволяющий получать аппроксимации на его основе.

Рассмотрим следующее уравнение переноса пассивной примеси в области интегрирования $M_T = M \times [0, T]$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} = k\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + A\Delta C \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\Gamma: \ \frac{\partial C}{\partial n} = 0$$

и начальными данными

$$t = 0: \ C(x, y, z) = C_0(x, y, z).$$

Уравнению (1) поставим в соответствие формально-сопряженное

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - U\frac{\partial C^*}{\partial x} - V\frac{\partial C^*}{\partial y} - W\frac{\partial C^*}{\partial z} = k\frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} + A\Delta C^*, \tag{2}$$

которое в силу уравнения неразрывности можно переписать в следующем виде:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial z} = k\frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} + A\Delta C^* \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$\Gamma: \ \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0$$

и начальными данными

$$t = T: \ C^*(x, y, z) = Q(x, y, z),$$

где $M_T = M \times [0, T]$, M — область в которой интегрируется модель на временном отрезке $[0, T]$, $\Gamma_t = \Gamma \times [0, T]$, Γ — граница области M, n — нормаль к границе.

Сопряженная задача решается в обратном направлении по времени. При интегрировании сопряженных задач в качестве $Q\left(x,y,z\right)$ могут задаваться либо функции специального вида при построении функций влияния, либо невязки прогноза, характеризующие отклонение решения от данных измерений при использовании вариационных алгоритмов ассимиляции данных измерений. Помножим (1) на C^* и проинтегрируем с учетом краевых условий и начальных данных. Полученное интегральное тождество для задачи (1) имеет следующий вид:

$$\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial UC}{\partial x}+\frac{\partial VC}{\partial y}+\frac{\partial WC}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}A\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial C}{\partial z},C^*\right]_{M_t}+ \\ +\left(\frac{\partial C}{\partial n},C^*\right)_{\Gamma_t}+\left(C-C_0,C^*\right)_M=0, \quad (4)$$

где скалярное произведение определяется стандартным способом. Дискретный аналог интегрального тождества получается из (4) при использовании разностных дискретизаций и замене интегрирования по пространству на суммирование по дискретным индексам в рассматриваемой области. Аппроксимация сопряженной задачи получается из разностного аналога интегрального тождества суммированием по частям с учетом краевых условий и разностного аналога уравнения неразрывности. При численной реализации модели переноса-диффузии (1) дискретизация диффузионных членов стандартна. Из разностного аналога интегрального тождества дискретизация аналогичных членов сопряженной задачи аналогична (со вторым порядком аппроксимации). Основные особенности необходимо учитывать при разностной аппроксимации адвективных членов.

Для решения уравнения (1) запишем монотонную консервативную схему [9]

$$\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t}+ \\ +\frac{1}{\Delta x}\left[k\left(1+R^x_{i+1/2}\mu_{i+1/2}+R^x_{i+1/2}\right)\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x}-k\left(1+R^x_{i-1/2}\mu_{i-1/2}-R^x_{i-1/2}\right)\frac{C_i-C_{i-1}}{\Delta x}\right]+ \\ +\frac{1}{\Delta y}\left[k\left(1+R^y_{j+1/2}\mu_{j+1/2}+R^y_{j+1/2}\right)\frac{C_{j+1}-C_j}{\Delta y}-k\left(1+R^y_{j-1/2}\mu_{j-1/2}-R^y_{j-1/2}\right)\frac{C_j-C_{j-1}}{\Delta y}\right]+ \\ +\frac{1}{\Delta z}\left[k\left(1+R^z_{m+1/2}\mu_{m+1/2}+R^z_{m+1/2}\right)\frac{C_{m+1}-C_m}{\Delta z}- \right. \\ \left. -k\left(1+R^z_{m-1/2}\mu_{m-1/2}-R^z_{m-1/2}\right)\frac{C_m-C_{m-1}}{\Delta z}\right]=0, \quad (5)$$

где

$$R^x_{i+1/2}=-\frac{U_{i+1/2}\Delta x}{2A},\quad R^x_{i-1/2}=-\frac{U_{i-1/2}\Delta x}{2A},\quad R^y_{j+1/2}=-\frac{V_{j+1/2}\Delta y}{2A}, \\ R^y_{j-1/2}=-\frac{V_{j-1/2}\Delta y}{2A},\quad R^z_{m+1/2}=-\frac{W_{m+1/2}\Delta z}{2k},\quad R^z_{m-1/2}=-\frac{W_{m-1/2}\Delta z}{2k}.$$

В (5) для простоты записи некоторые индексы опущены. Для численной реализации модели используем явную схему при условии выполнения условия Куранта для устойчивости расчетов. При соответствующем выборе множителя $\mu\left(R\right)$ из (5) можно получать различные аппроксимации для уравнения переноса. Так при

$\mu\left(R\right)=0$ — имеем схему с центральной разностью [10];

при $\mu\left(R\right)=\mathrm{sign}\left(R\right)$ — схему с направленной разностью [10];

при $\mu\left(R\right)=\dfrac{|R|}{1+|R|}\cdot\mathrm{sign}\left(R\right)$ — схему Самарского А.А. [11];

при $\mu\left(R\right)=\dfrac{|R|}{1+|R|+|R|^2}\cdot R$ — схему Булеева Н.И., Тимухина Г.И. [12];

при $\mu(R) = \dfrac{1+2|R|}{3+3|R|+2|R|^2} \cdot R$ — схему Булеева Н.И. [13];

при $\mu(R) = \operatorname{cth}(R) - \dfrac{1}{R}$ — схему Ильина А.М. [14, 15].

Из разностного аналога интегрального тождества, основанного на схеме (5), можно получить согласованную схему для сопряженной задачи

$$
\begin{gathered}
-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x}\left(A\frac{\left(1+R^x_{i+1/2}\mu_{i+1/2}-R^x_{i+1/2}\right)C^*_{i+1} - \left(1+R^x_{i+1/2}\mu_{i+1/2}+R^x_{i+1/2}\right)C^*_i}{\Delta x} - \right.\\
\left. - A\frac{\left(1+R^x_{i-1/2}R_{i-1/2}\mu_{i-1/2}-R^x_{i-1/2}\right)C^*_{i} - \left(1+R^x_{i-1/2}\mu_{i-1/2}+R^x_{i-1/2}\right)C^*_{i-1}}{\Delta x}\right) -\\
-\frac{1}{\Delta y}\left(A\frac{\left(1+R^y_{j+1/2}\mu_{i+1/2}-R^y_{j+1/2}\right)C^*_{j+1} - \left(1+R^y_{j+1/2}\mu_{i+1/2}+R^y_{j+1/2}\right)C^*_j}{\Delta y} - \right.\\
\left. - A\frac{\left(1+R^y_{j-1/2}\mu_{j-1/2}-R^y_{j-1/2}\right)C^*_{j} - \left(1+R^y_{j-1/2}\mu_{j-1/2}+R^y_{j-1/2}\right)C^*_{j-1}}{\Delta y}\right) -\\
-\frac{1}{\Delta z}\left(k\frac{\left(1+R^z_{m+1/2}\mu_{m+1/2}-R^z_{m+1/2}\right)C^*_{m+1} - \left(1+R^z_{m+1/2}\mu_{m+1/2}+R^z_{m+1/2}\right)C^*_m}{\Delta z} - \right.\\
-\frac{1}{\Delta z}\left(k\frac{\left(1+R^z_{m-1/2}\mu_{m-1/2}-R^z_{m-1/2}\right)C^*_{m} - \left(1+R^z_{m-1/2}\mu_{m-1/2}+R^z_{m-1/2}\right)C^*_{m-1}}{\Delta z} = 0. \qquad (6)
\end{gathered}
$$

Рассмотрим (5) при $\mu = 0$:

$$
\begin{gathered}
\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = A\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{U_{i+1/2}C_{i+1}-U_{i+1/2}C_i+U_{i-1/2}C_i-U_{i-1/2}C_{i-1}}{2\Delta x} +\\
+ A\frac{C_{j+1}-2C_j+C_{j-1}}{\Delta y^2} - \frac{V_{j+1/2}C_{j+1}-V_{j+1/2}C_j+V_{j-1/2}C_j-V_{j-1/2}C_{j-1}}{2\Delta z}\\
k\frac{C_{m+1}-2C_m+C_{m-1}}{\Delta z^2} - \frac{W_{m+1/2}C_{m+1}-W_{m+1/2}C_m+W_{m-1/2}C_m-W_{m-1/2}C_{m-1}}{2\Delta z}. \qquad (7)
\end{gathered}
$$

Из (7) видно, что адвективный член аппроксимируется аналогом центрально-разностной аппроксимации со вторым порядком аппроксимации. Аналогично из (5) имеем при выборе $\mu = \operatorname{sgn} R$ и U, V, $W < 0$,

$$
\begin{gathered}
\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = A\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2} - U_{i+1/2}\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x} + A\frac{C_{j+1}-2C_j+C_{j-1}}{\Delta y^2} -\\
- V_{j+1/2}\frac{C_{j+1}-C_j}{\Delta y} + k\frac{C_{m+1}-2C_m+C_{m-1}}{\Delta z^2} - W_{m+1/2}\frac{C_{m+1}-C_m}{\Delta z}. \qquad (8)
\end{gathered}
$$

А при U, V, $W > 0$, получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = A\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2} - U_{i-1/2}\frac{C_{i}-C_{i-1}}{\Delta x} + A\frac{C_{j+1}-2C_j+C_{j-1}}{\Delta y^2} -\\
- V_{j-1/2}\frac{C_{j}-C_{j-1}}{\Delta y} + k\frac{C_{m+1}-2C_m+C_{m-1}}{\Delta z^2} - W_{m-1/2}\frac{C_{m}-C_{m-1}}{\Delta z}. \qquad (9)
\end{gathered}
$$

Из уравнения (6) при $\mu = 0$ имеем

$$-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t}=A\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}+U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{2\Delta x}+$$
$$+A\frac{C^*_{j+1}-2C^*_j+C^*_{j-1}}{\Delta y^2}+\frac{V_{j+1/2}C^*_{j+1}+V_{j+1/2}C^*_j-V_{j-1/2}C^*_j-V_{j-1/2}C^*_{j-1}}{2\Delta y}+$$
$$+k\frac{C^*_{m+1}-2C^*_m+C^*_{m-1}}{\Delta z^2}+\frac{W_{m+1/2}C^*_{m+1}+W_{m+1/2}C^*_m-W_{m-1/2}C^*_m-W_{m-1/2}C^*_{m-1}}{2\Delta z}. \quad (10)$$

То есть, адвективный член в сопряженной задаче (3) аппроксимируется аналогом центрально-разностной аппроксимации. Аналогично из (6) при $\mu = \operatorname{sgn} R$ и U, V, $W < 0$, имеем

$$-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t}=A\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x}+k\frac{C^*_{j+1}-2C^*_j+C^*_{j-1}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{V_{j+1/2}C^*_j-V_{j-1/2}C^*_{j-1}}{\Delta y}+k\frac{C^*_{m+1}-2C^*_m+C^*_{m-1}}{\Delta z^2}+\frac{W_{m+1/2}C^*_m-W_{m-1/2}C^*_{m-1}}{\Delta z}, \quad (11)$$

а при U, V, $W > 0$ получаем

$$-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t}=A\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i-1/2}C^*_i}{\Delta x}+k\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta y^2}+$$
$$+\frac{V_{j+1/2}C^*_{j+1}-V_{j-1/2}C^*_j}{\Delta y}+k\frac{C^*_{m+1}-2C^*_m+C^*_{m-1}}{\Delta z^2}+\frac{W_{m+1/2}C^*_{m+1}-W_{m-1/2}C^*_m}{\Delta z}. \quad (12)$$

Как видно из (5)–(12), аппроксимация адвективного члена в основной задаче идентична аппроксимации дивергентного члена в сопряженной задаче. Оценим отличия в аппроксимации таких членов уравнения.

Пусть, например, $U < 0$, тогда с учетом знака при члене в сопряженной задаче, отвечающего за перенос, выберем соответствующую аппроксимацию

$$U_{i+1/2}\frac{C^*_{i+1}-C^*_i}{\Delta x}-\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i+1/2}C^*_i}{\Delta x}=-C^*_i\left(\frac{U_{i+1/2}-U_{i-1/2}}{\Delta x}\right)\approx C^*\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (13)$$

При решении трехмерной задачи при условии выполнения уравнения неразрывности такие члены по всем трем направления в сумме обращаются в ноль. Рассмотрим центрально-разностную аппроксимацию (7) и вычтем аппроксимацию адвективного члена в сопряженной задаче (10)

$$\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i+1/2}C^*_i+U_{i-1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x}-$$
$$-\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}+U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x}=-C^*_i\frac{U_{i+1/2}-U_{i-1/2}}{\Delta x}\approx -C^*\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (14)$$

При решении трехмерной задачи при условии выполнения уравнения неразрывности такие члены также по всем трем направления в сумме обращаются в ноль. То есть в данных предельных случаях аппроксимации идентичны при условии выполнения уравнения неразрывности. Аналогичный результат можно получить и при других значениях μ. Поэтому для решения сопряженной задачи можно использовать процедуры, применяемые при интегрировании основной задачи.

Заключение

На основе проекционного варианта интегро-интерполяционного метода представлена консервативная монотонная разностная схема для интегрирования уравнения переноса пассивной примеси. Из разностного аналога интегрального тождества получена согласованная разностная дискретизация для решения сопряженных задач. Показано, что в случае выбора предложенной схемы используемые процедуры при интегрировании основной задачи могут применяться для решения сопряженных задач.

Литература [References]

1. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. Marchuk, G.I. (ed.), *Modelling and Optimization of Complex Systems. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf.* New York, Springer, 1978, pp. 240–252.
2. Пененко, В.В., *Методы численного моделирования атмосферных процессов.* Ленинград, Гидрометеоиздат, 1981. [Penenko, V.V., *Metody chislennogo modelirovaniya atmosfernyx processov = Methods for numerical modeling of atmospheric processes.* Leningrad, Gidrometeoizdat, 1981. (in Russian)]
3. Лионс, Ж.Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* Москва, Мир, 1972. [Lions, Zh.L., *Optimalnoe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi = Optimal control of systems described by partial differential equations.* Moscow, Mir, 1972. (in Russian)]
4. Лионс, Ж.Л., *Управление сингулярными распределенными системами.* Москва, Наука, 1987. [Lions, Zh.L., *Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami = Managing singular distributed systems.* Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)]
5. Лионс, Ж.Л., *Ценность. Сопряженная функция.* Москва, Атомиздат, 1972. [Lions, Zh.L., *Cennost. Sopryazhennaya funkciya = Value. Conjugate function.* Moscow, Atomizdat, 1972. (in Russian)]
6. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayu-shhej sredy = Mathematical modeling in environmental problems.* Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
7. Марчук, Г.И., Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана. *Метеорология и гидрология*, 1974, № 2, с. 17–34. [Marchuk, G.I., Basic and conjugate equations of the dynamics of the atmosphere and ocean. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorology and hydrology*, 1974, no. 2, pp. 17–34. (in Russian)]
8. Sklyar, S.N., A projective version of the integral-interpolation method and it's application for the discretization of the singular perturbation problems. *Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. of the International Conf. AMCA-95.* Novosibirsk, NCC Pablisher, 1995, pp. 380–385.
9. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.* Севастополь, Экоси-Гидрофизика, 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-sea basins.* Sevastopol, Ekosi-Gidrofizika, 2002. (in Russian)]
10. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика.* Москва, Мир, 1980. [Roache, P.J., *Vychislitel'naya gidrodinamika = Computational fluid dynamics.* Moscow, Mir, 1980. (in Russian)]
11. Самарский, А.А., *Теория разностных схем.* Москва, Наука, 1983. [Samarskiy, A.A., *Teoriya raznostnyh skhem = Theory of difference schemes.* Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
12. Булеев, Н.И., Тимухин, Г.И., О составлении разностных уравнений гидродинамики вязкой неоднородной среды. *Численные методы механики сплошной среды*, 1972, т. 3, № 4, с. 19–26. [Buleev, N.I., Timuhin, G.I., On the compilation of difference equations for the hydrodynamics of a viscous inhomogeneous medium. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoj sredy = Numerical methods of continuum mechanics*, 1972, vol. 3, no. 4, pp. 19–26. (in Russian)]
13. Булеев, Н.И., *Пространственная модель турбулентного обмена.* Москва, Наука, 1983. [Buleev, N.I., *Prostranstvennaya model turbulentnogo obmena = Spatial model of turbulent exchange.* Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
14. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter with the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Math Notes*, 1969, vol. 6, no. 2, pp. 237–248. (in Russian)]
15. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* Москва, Мир, 1983. [Doolan, E.P., Miller, J.J.H., Schilders, W.H.A. *Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem = Uniform numerical methods for solving problems with boundary layer.* Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]