




УДК 539.3

EDN: AFMWXH DOI: 10.31429/vestnik-20-4-6-10

Контактная задача о вибрации штампа на микронеоднородном вязкоупругом основании при учете трения в области контакта

О. А. Беляк  , Т. В. Суворова 

Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2, 344038, Россия

✉ Беляк Ольга Александровна; ORCID 0000-0002-9487-0423; SPIN 5329-7454; e-mail: belyak.o.a@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена динамическая контактная задача о вибрации штампа с плоским основанием на микронеоднородном вязкоупругом полупространстве при учете трения в области контакта. Микронеоднородность среды учитывается в рамках модели Био–Френкеля для пористоупругой флюидонасыщенной среды, причем учитывается не только вязкость флюида, но и сам скелет предполагается вязкоупругим. Исследованы зависимости напряжений в области контакта от реологических свойств среды.

Ключевые слова: динамическая контактная задача, трение в области контакта, флюидонасыщенная гетерогенная среда, вязкоупругий скелет.

Финансирование. Публикация осуществлена при частичной поддержке гранта РФФ № 21-19-00288.


Цитирование: Беляк О. А., Суворова Т. В. Контактная задача о вибрации штампа на микронеоднородном вязкоупругом основании при учете трения в области контакта // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 4. С. 6–10. EDN: AFMWXH. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-6-10

Поступила 26 сентября 2023 г. После доработки 31 октября 2023 г. Принято 1 ноября 2023 г. Публикация 31 декабря 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Contact Problem on Vibration of a Punch on a Microneogeneous Viscoelastic Base with Consideration of Friction in the Contact Region

О. А. Belyak , Т. V. Suvorova

Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Rostov Strelkovogo Polka Narodnogo Opolchenia sq., 2, Rostov-on-Don, 344038, Russia

✉ Olga A. Belyak; ORCID 0000-0002-9487-0423; e-mail: belyak.o.a@gmail.com

Abstract. The paper considers the contact problem of vibration of a rigid punch with a plane base on a microneogeneous viscoelastic half-space when friction in the contact region is taken into account. The microheterogeneity of the medium is taken into account in the framework of the Biot–Frenkel multiphase medium model for porous-elastic fluid-saturated medium. The viscosity of the fluid filling the pores is taken into account and the skeleton is assumed to be viscoelastic. Rheological properties of the skeleton are taken into account in the framework of the concept of complex modules. The boundary value problem for the Biot medium is reduced to an integral equation of the first kind with a difference kernel with respect to normal contact pressures. The solution of the integral equation after regularization by feature extraction is realized numerically by the boundary element method. Numerical experiment has been carried out for the skeleton material, an epoxyphenolic resin modified with magnesium oxide, which contains cylinder oil in its pores. The viscoelastic skeleton is described within the framework of the standard viscoelastic body model with long modulus and instantaneous modulus and relaxation time. The dependence of contact stresses on the frequency oscillations has been investigated. On the basis of numerical experiments the range of frequencies has been established, for which it is shown that the account of friction in the contact area and viscosity of the matrix of heterogeneous medium has the greatest influence on the contact stresses. *Keywords:* dynamic contact problem, contact region friction, fluid-saturated porous medium, viscous elastic skeleton.

Funding. The work was financially supported by the Russian Science Foundation (project No 21-19-00288).
Cite as: Belyak, O. A., Suvorova, T. V., Contact problem on vibration of a punch on a microneogeneous viscoelastic base with consideration of friction in the contact region. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 6–10. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-6-10
 Received 26 September 2023. Revised 31 October 2023. Accepted 1 November 2023. Published 31 December 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Проблемам фрикционного взаимодействия и математическому моделированию различных аспектов этого многопараметрического процесса стабильно уделяется большое внимание исследователей, например, [1–5]. Решение таких задач востребовано в машиностроении, железнодорожной отрасли, нефтегазовой сфере. Изучение влияния динамических эффектов на трибологический процесс при учете вязкоупругих свойств композиционного материала имеет важное практическое значение. Особенно актуальными являются проблемы изучения контактного взаимодействия при конструировании новых композитных материалов с заданными свойствами [4]. В настоящей работе рассматривается контактная задача о вибрации штампа на микронеоднородном вязкоупругом основании — полупространстве при учете трения в области контакта. Микронеоднородность среды учитывается в рамках модели двухфазной среды Био-Френкеля [6–8] для пористоупругой флюидонасыщенной среды, причем учитывается не только вязкость флюида, заполняющего поры, но и сам скелет предполагается вязкоупругим. Учет реологических свойств скелета осуществлен в рамках концепции комплексных модулей [9, 10] и в случае стационарных гармонических колебаний упругие константы материала заменяются комплексными характеристиками, которые представляют собой функции от частоты колебаний. Вследствие такого подхода удается исключить время из уравнений, описывающих краевую задачу и решать задачу теории пороупругости с комплексными характеристиками.

1. Постановка и решение контактной задачи

Рассматривается контактная задача о колебаниях с круговой частотой ω жесткого штампа с плоским основанием шириной $2a$ под действием приложенной к нему силы $\mathbf{P} = \{0, Pe^{-i\omega t}\}$ на верхней границе полупространства $-\infty < x < \infty, y \leq 0$. Будем полагать, что амплитуда приложенной силы такова, что в процессе колебаний не происходит нарушение контакта или возникновение зон скольжения. Основание представляет собой гетерогенную среду, состоящую из двух фаз, одна из которых — вязкоупругая пористая матрица-скелет, другая — вязкий флюид.

Внутренняя микроструктура полупространства описывается уравнениями Био-Френкеля [6]. Режим колебаний считаем установившимся и в рамках концепции комплексных модулей после отделения временного множителя уравнения Био-Френкеля в терминах перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{N}(i\omega)\Delta\mathbf{u} + \nabla \left((\tilde{A}(i\omega) + \tilde{N}(i\omega))\nabla \cdot \mathbf{u} + \tilde{Q}(i\omega)\nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \omega^2(\rho_{11}\mathbf{u} + \rho_{12}\mathbf{v}) + i\omega b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= 0, \\ \nabla \left(\tilde{Q}(i\omega)\nabla \cdot \mathbf{u} + \tilde{Q}(i\omega)\nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \omega^2(\rho_{12}\mathbf{u} + \rho_{22}\mathbf{v}) - i\omega b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Аналог обобщенного закон Гука в гетерогенной среде имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= \tilde{A}(i\omega)e\delta_{ij} + 2\tilde{N}(i\omega)e_{ij} + \tilde{Q}(i\omega)\varepsilon\delta_{ij}, \quad \sigma^f = \tilde{Q}(i\omega)e + \tilde{R}(i\omega)\varepsilon, \quad i, j = 1, 2, \\ e_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \\ e &= \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f, \\ \rho_{11} &= (1 - m)\rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\tilde{A}(i\omega)$, $\tilde{N}(i\omega)$, $\tilde{Q}(i\omega)$, $\tilde{R}(i\omega)$ — комплексные модули, ρ_s , ρ_f — плотности сред упругого скелета и флюида, ρ_{12} — коэффициент динамической связи скелета среды и флюида [4, 6], e_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров деформации, соответствующих векторам перемещений твердой фазы $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$ и жидкой фазы $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$ соответственно, σ^s — тензор напряжений, действующий на скелет, σ^f — давления, действующие на флюид в порах. Отметим, что основной эффект диссипации в среде Био обусловлен трением на границах между скелетом и флюидом. В настоящей работе учитывалась неидеальность обеих фаз [11, 12].

Граничные условия краевой задачи для полупространства с непроницаемой лицевой поверхностью имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}(x,0) &= \mu_{tr} \Gamma_{22}(x,0), \quad |x| \leq a, \\ u_2(x,0) &= v_2(x,0) = \delta, \quad |x| \leq a, \\ \Gamma_{22}(x,0) &= 0, \quad u_2(x,0) = v_2(x,0), \quad |x| > a, \\ \Gamma_{21}(x,0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где δ — амплитуда перемещения штампа в вертикальном направлении, μ_{tr} — коэффициент трения. Неизвестные контактные давления $q(x) = \Gamma_{22}(x, h)$ подлежат определению.

Применим к соотношениям (1.1)–(1.3) интегральное преобразование Фурье по переменной x , построим решение системы уравнений (1.1), (1.2), удовлетворим граничным условиям (1.3), более подробно описано в работе [4]. В результате приходим к интегральному уравнению с разностным ядром относительно нормальных контактных давлений $q(\xi)$

$$\int_{-1}^1 k(x - \xi)q(\xi) d\xi = -\delta. \tag{1.4}$$

Ядро интегрального уравнения (1.4) имеет вид

$$k(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu_{tr}G_{21}(\alpha, h) + G_{22}(\alpha, h)}{D(\alpha)} e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha, \tag{1.5}$$

где α — параметр преобразования Фурье. Здесь линейные величины отнесены к полуширине штампа a , а напряжения — к значению $\tilde{N}(0)$. Элементы матрицы Грина $G_{2k}(\alpha)/D(\alpha)$, $k = 1, 2$ для гетерогенного полупространства с упругим скелетом приведены в работе [4, 13].

Решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.5) после регуляризации посредством выделения особенности реализуется численно методом граничных элементов [14]. В результате дискретизации интегральное уравнение (1.4) сводится к алгебраической системе относительно узловых значений контактных давлений.

2. Результаты численного анализа

Численный эксперимент был проведен при описании вязкоупругого скелета в рамках модели стандартного вязкоупругого тела с длительным модулем E_∞ , мгновенным модулем E_0 и временем релаксации τ [9], коэффициент Пуассона считался постоянным. В этом случае комплексные модули изотропного материала скелета имеют следующий вид

$$\tilde{E}(i\omega) = \frac{-i\omega E_0\tau + E_\infty}{1 - i\tau\omega}, \tag{2.1}$$

$$\tilde{K}_b(i\omega) = \frac{\tilde{E}(i\omega)}{3(1 - 2\nu)}, \quad \nu = \text{const.}$$

При этом комплексные характеристики $\tilde{A}(i\omega)$, $\tilde{N}(i\omega)$, $\tilde{Q}(i\omega)$, $\tilde{R}(i\omega)$ вязкоупругой осушенной среды определяются формулам, приведенным в работе [4]. Надо отметить, что в области

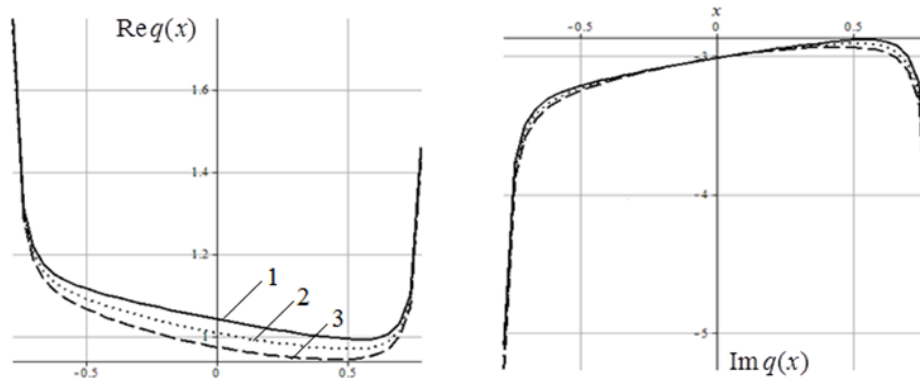


Рис. 1. Распределение нормальных контактных напряжений под штампом при разных частотах колебаний штампа: 1 — $\omega = 20$ рад/с, 2 — $\omega = 40$ рад/с, 3 — $\omega = 60$ рад/с

Fig. 1. Distribution of normal contact stresses under the die at different frequencies of die oscillation: 1 — $\omega = 20$ rad/s, 2 — $\omega = 40$ rad/s, 3 — $\omega = 60$ rad/s

больших и малых частот вязкоупругий скелет ведет себя практически как упругий с модулями упругости, равными по величине длительному и мгновенному модулям $\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{E}(i\omega) = E_\infty$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{E}(i\omega) = E_0$ [10]. Наибольший интерес представляют диапазон частот, близких к значению $\omega = 1/\tau$, на которых затухание колебаний наиболее выражено, тогда как для других диапазонов частот можно рассматривать упругий скелет с предельными характеристиками [15, 16].

Численный эксперимент проведен для материала скелета — эпоксифенольной смолы, модифицированной оксидом магния (5 % масс.) и наполнителем в виде цилиндрического масла. Значения физических характеристик эпоксифенольной смолы определены в рамках лабораторных экспериментов: $\rho_s = 1225$ кг/м³, $\nu = 0,27$, $E_0 = 5,54$ ГПа, $E_\infty = 5,16$ ГПа, $\tau = 48$ сек.).

На рис. 1 приведены действительная и мнимая части нормальных контактных напряжения для композиционного материала с содержанием масляного наполнителя (5 %, объема), $m = 0,05$, $\mu_{tr} = 0,1$ при разных частотах колебаний штампа. При этом линейные величины отнесены к полуширине штампа a , а напряжения — к значению $\tilde{N}(0)$. Сплошная, пунктирная и штриховая линии соответствуют частотам колебаний (рад/с) $\omega = 20, 40, 60$. Отметим, что для приведенных значений частот колебаний в гетерогенном полупространстве имеется две распространяющиеся по поверхности полупространства волны. При увеличении значения частоты колебаний при тех же исходных данных вязкость скелета приводит к замедлению перетоков между порами и, как следствие, исчезновению наиболее быстро затухающей поверхностной волны. Контактные напряжения при этом имеют значительно более слабую зависимость от частоты колебаний штампа.

Выводы

Построено решение динамической контактной задачи для флюидонасыщенного полупространства с вязкоупругим скелетом при описании вязкости в рамках модели стандартного вязкоупругого тела с длительным и мгновенным модулями и временем релаксации. При учете трения в области контакта исследована зависимость контактных напряжений от частоты колебаний штампа. На основании численных экспериментов для нового композитного материала на основе эпоксифенольной смолы установлен диапазон частот, для которых учет трения в области контакта и вязкости матрицы гетерогенной среды оказывает наибольшее влияние на контактные напряжения.

Литература [References]

1. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения. *Докл. академии наук*, 2018, т. 480, № 5, с. 537–541. [Babeshko,

- V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Block elements in contact problems with a variable friction coefficient. *Doklady akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2018, vol. 480, no. 5, pp. 537–541. (in Russian)]
2. Горячева, И.Г., Маховская, Ю.Ю., Морозов, А.В., Степанов, Ф.И., *Трение эластомеров*. Москва, Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. [Goryacheva, I.G., Makhovskaya, Yu.Yu., Morozov, A.V., Stepanov, F.I., *Trenie elastomerov = Friction of elastomers*. Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Research Publ., 2017. (in Russian)]
 3. Торская, Е.В., *Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями*. Москва, Ижевск, Ин-т компьютерных исследований, 2020. [Torskaya, E.V., *Modeli frikcionnogo vzaimodejstviya tel s pokrytiami = Models of frictional interaction of bodies with coatings*. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research, 2020. (in Russian)]
 4. Колесников, В.И., Беляк, О.А., *Математические модели и экспериментальные исследования — основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов*. Москва, Физматлит, 2021. [Kolesnikov, V.I., Belyak, O.A., *Matematicheskie modeli i eksperimental'nye issledovaniya — osnova konstruirovaniya geterogennykh antifrikcionnykh materialov = Mathematical models and experimental studies – the basis for the design of heterogeneous antifriction materials*. Moscow, Fizmatlit, 2021. (in Russian)]
 5. Balci, M.N., Dag, S., Dynamic frictional contact problems involving elastic coating. *Tribology International*, 2018, vol. 124, pp. 70–92. DOI: [10.1016/J.TRIBOINT.2018.03.033](https://doi.org/10.1016/J.TRIBOINT.2018.03.033)
 6. Biot, M.A., Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 1962, vol. 33, no. 4, pp. 1482–1498.
 7. Perrot, C., Chevillotte, F., Hoang, M.T., Bonnet, G., Becot, F.-X., Gautron, L., Duval, A., Microstructure, transport, and acoustic properties of open-cell foam samples: Experiments and three-dimensional numerical simulations. *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 111, 014911, DOI: [10.1063/1.3673523](https://doi.org/10.1063/1.3673523)
 8. Becot, F.-X., Jaouen, L., An alternative Biot's formulation for dissipative porous media with skeleton deformation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2013, vol. 134, no. 6, pp. 4801–4807. DOI: [10.1121/1.4826175](https://doi.org/10.1121/1.4826175)
 9. Christensen, R.M., *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley, 1979.
 10. Матвеевко, В.П., Сметанников, О.Ю., Труфанов, Н.А., Шардаков, И.Н., *Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода*. Москва, Физматлит, 2009. [Matveenko, V.P., Smetannikov, O.Yu., Trufanov, N.A., Shardakov, I.N., *Termomekhanika polimernykh materialov v usloviyakh relaksacionnogo perekhoda = Thermomechanics of polymeric materials under relaxation transition conditions*. Moscow, Fizmatlit, 2009. (in Russian)]
 11. Сеймов, В.М., Трофимчук, А.Н., Савицкий, О.А., *Колебания и волны в слоистых средах*. Киев, Наук. думка, 1990. [Sejmov, V. M., Trofimchuk, A. N., Savickij, O. A., *Kolebaniya i volny v sloistyh sredah = Oscillations and waves in layered media*. Kiev, Nauk. dumka, 1990. (in Russian)]
 12. Ai, Z.Y., Zhao, Y.Z., Liu, W.J., Fractional derivative modeling for axisymmetric consolidation of multilayered cross-anisotropic viscoelastic porous media. *Computers & Mathematics with Applications*, 2020, vol. 79, no. 5 pp. 1321–1334. DOI: [10.1016/j.camwa.2019.08.033](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.08.033)
 13. Беляк, О.А., Суворова, Т.В., Учет трения в области контакта при колебаниях жесткого штампа на поверхности полуограниченной среды. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2019, т. 16, № 3, с. 33–39. [Belyak, O.A., Suvorova, T.V., Consideration of friction in the contact region at oscillations of a rigid die on the surface of a semi-confined medium. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 33–39. (in Russian)] EDN: UOIUCE
 14. Бребия, К., Теллес, Ж., Врубел, Л., *Методы граничных элементов*. Москва, Мир, 1987. [Brebbia, K., Telles, G., Vrubel, L. *Metody granichnykh elementov = Boundary Element Methods*. Moscow, Mir, 1987. (in Russian)]
 15. Беляк, О.А., Суворова, Т.В., Колебания штампа на поверхности гетерогенного слоя при учете трения в области контакта. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, № 3, с. 321–331. [Belyak, O.A., Suvorova, T.V., vibrations of a punch on the surface of a heterogeneous layer with account of friction in the contact area. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 85, no. 3, pp. 321–331 (in Russian)]
 16. Kolesnikov, V.I., Suvorova, T.V., Belyak, O.A., Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Materials Physics and Mechanics*, 2020, vol. 46, pp. 139–148. DOI: [10.18720/MPM.4612020_14](https://doi.org/10.18720/MPM.4612020_14)