

УДК 531.39

EDN: WRVRQN DOI: 10.31429/vestnik-21-1-6-20

## Математические аналоги и аналогии для решения задач методом граничных элементов

П. Г. Великанов <sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

<sup>2</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: [pvelikanov@mail.ru](mailto:pvelikanov@mail.ru)

*Аннотация.* При решении различных дифференциальных уравнений (или систем дифференциальных уравнений) часто приходится решать задачу по выбору математических аналогов (аналог — объект (техническое решение) того же назначения, близкий по совокупности существенных признаков) и аналогий (аналогия — подобие, равенство отношений; сходство предметов (явлений, процессов) в каких-либо свойствах), благодаря которым часто удается наиболее рационально решить поставленную задачу. В статье на примере решения задачи деформирования длинной пологой термоупругой цилиндрической панели по модели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана, используются математические аналоги и аналогии для: выбора разновидности метода граничных элементов; выбора функций (среди обобщенных, функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Радцига); получения компонент матрицы фундаментального решения (с помощью интегрального преобразования Фурье, ассоциированного дифференциального оператора и функционального анализа).

*Ключевые слова:* математические аналоги и аналогии, метод граничных элементов, обобщенные функции, функциональные прерыватели Герсеванова, зеркальные формы Радцига, интегральное преобразование Фурье, ассоциированный дифференциальный оператор, метод функционального анализа, длинные пологие термоупругие цилиндрические панели по модели Дюамеля–Неймана.

*Финансирование.* Исследование не имело спонсорской поддержки.

*Цитирование:* Великанов П. Г. Математические аналоги и аналогии для решения задач методом граничных элементов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 1. С. 6–20. EDN: WRVRQN. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-6-20

Поступила 16 октября 2023 г. После доработки 6 марта 2024 г. Принято 11 марта 2024 г. Публикация 26 марта 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Mathematical Analogs and Analogies for Solving Problems by the Boundary Element Method

P. G. Velikanov<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup> Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia

<sup>2</sup> Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: [pvelikanov@mail.ru](mailto:pvelikanov@mail.ru)

*Abstract.* When solving various differential equations (or systems of differential equations), it is often necessary to solve the problem of choosing mathematical analogs (analog is an object (technical solution) of the same purpose, similar in a set of essential features) and analogies (analogy is similarity, equality of relations; similarity of objects (phenomena, processes) in any properties) thanks to which it is often possible to solve the task most rationally. In the article, using the example of solving the problem of deforming a long shallow thermoelastic cylindrical panel according to the Duhamel–Neumann model, mathematical analogs and analogies are used to: select a variety of the boundary element method; select functions (among generalized, functional Gersevanov interrupters and Radzig mirror forms); obtain the components of the matrix of the fundamental solution (using the integral Fourier transform, associated differential operator and functional analysis).

*Keywords:* mathematical analogs and analogies, the boundary element method, generalized functions, Gersevanov functional interrupters, Radzig mirror shapes, integral Fourier transform, associated differential operator, functional analysis method, long shallow thermoelastic cylindrical panels according to the Duhamel–Neumann model.

*Funding.* The study did not have sponsorship.

*Cite as:* Velikanov, P. G., *Mathematical analogs and analogies for solving problems by the boundary element method. Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 6–20. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-6-20

Received 16 October 2023. Revised 6 March 2024. Accepted 11 March 2024. Published 26 March 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

Задачи проектирования и расчета тонкостенных авиакосмических, машиностроительных и др. конструкций, оптимизированных для обеспечения на должном уровне легкости, экономичности, прочности, жесткости, надежности, прочностной надежности и др., стимулируют исследования тел с учетом механических нагрузок и немеханических полей (температурное, магнитное, электрическое и др.). В связи с этим активное использование конструкций в виде длинных пологих термоупругих цилиндрических панелей по модели Дюамеля–Неймана является оправданным.

Одним из наиболее успешных современных методов анализа конструкций является метод граничных элементов (МГЭ). Дальнейшее его развитие в виде: непрямого МГЭ (НМГЭ; метода компенсирующих нагрузок) и прямого МГЭ (ПМГЭ; метода взвешенных невязок) для решения поставленной задачи (с помощью обобщенных функций, функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Радцига), основанных на применении точных компонент матриц фундаментальных решений, является актуальным. Предвестниками понятий о фундаментальных решениях были работы Соболева С.А., Шварца Л., Гельфанда И.М. и Шилова Г.Е., Владимирова В.С. и Жаринова В.В., Шевченко В.П. [1–4] и др. о математической теории обобщенных функций. Для получения точных компонент матриц фундаментальных решений (МФР) в статье анализируется использование метода интегрального преобразования Фурье (ИПФ), ассоциированного дифференциального оператора (АДО), идея которого принадлежит Хермандеру Л., а реализации в различных разделах механики были выполнены в работах [5–9], и новый метод функционального анализа. Отмеченные методы были всесторонне сравнены на предмет затраченных усилий для нахождения компонент МФР.

## 1. Задача деформирования длинной цилиндрической панели

Записанная в усилиях система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая описывает деформирование длинной цилиндрической панели (рис. 1) с радиусом кривизны  $R$ , имеет вид [10] (ось  $Ox$  направлена по дуговой координате, а ось  $Oz$  — к центру кривизны):

$$\frac{dN_x}{dx} - \lambda^2 k_x Q_x = p_x; \quad -\frac{dQ_x}{dx} - k_x N_x = p_z; \quad \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0, \quad (1.1)$$

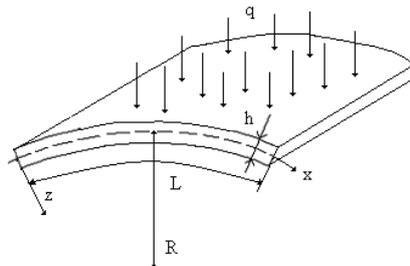


Рис. 1. Цилиндрическая панель

*Fig. 1. Cylindrical panel*

где  $N_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$  — касательное усилие в срединной поверхности, изгибающий момент и перерезывающая (поперечная) сила соответственно;  $k_x = 1/R$  — кривизна панели;  $p_x$ ,  $p_z$  — интенсивности распределенных нагрузок, действующих по касательной и по нормали к срединной поверхности соответственно;  $\lambda^2$  — параметр пологости:  $\lambda^2 = 0$  и  $\lambda^2 = 1$  в случае пологой и непологой панели соответственно.

Отметим аналогию: система (1.1) является исходной и для модели деформирования длинной пологой и непологой цилиндрической панели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана (гипотезы Кирхгофа–Лява с учетом температурного поля), и для модели, основанной на гипотезах Тимошенко.

## 2. Задача деформирования длинной пологой термоупругой цилиндрической панели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана

Для модели термомеханического деформирования постоянной толщины  $h$  (с модулем упругости Юнга (модулем упругости первого рода)  $E$ , коэффициентом Пуассона (коэффициентом поперечной деформации)  $\nu$  и коэффициентом линейного температурного расширения  $\alpha_T$  длинной термоупругой цилиндрической панели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана, внутренние усилия  $N_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$  из системы (1.1) могут быть выражены через компоненты  $u$  и  $w$  (касательная и нормальная составляющие перемещения точки срединной поверхности соответственно) следующим образом:

$$N_x = B_0 \left[ \frac{du}{dx} - k_x w - (1 + \nu)\varepsilon_T \right]; \quad M_x = -D_0 \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} + (1 + \nu)\chi_T \right]; \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx}, \quad (2.1)$$

где  $B_0 = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)}$ ,  $D_0 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  — жесткости на растяжение и изгиб соответственно;

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T dz; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T z dz;$$

$T = T(x, z)$  — функция распределения неравномерного температурного поля.

При подстановке (2.1) в систему (1.1) третье уравнение системы обращается в тождество. Два остальных уравнения системы в перемещениях  $u$  и  $w$  примут вид (для пологой панели при  $\lambda^2 = 0$ )

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{L}_0$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}$  — заданный линейный дифференциальный оператор (ЛДО), искомая и заданная векторные функции перемещений и внешних сил соответственно

$$\mathbf{L}_0 \left( \frac{d}{dx} \right) = \left\| \begin{array}{cc} B_0 \frac{d^2}{dx^2} & -B_0 k_x \frac{d}{dx} \\ -B_0 k_x \frac{d}{dx} & D_0 \frac{d^4}{dx^4} + B_0 k_x^2 \end{array} \right\|; \quad \mathbf{u}^T = (u(x), w(x)); \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F}^T = (\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) = \left( p_x + B_0(1 + \nu) \frac{d\varepsilon_T}{dx}, p_z - (1 + \nu) \left[ B_0 k_x \varepsilon_T + D_0 \frac{d^2 \chi_T}{dx^2} \right] \right).$$

## 3. Математические аналоги и аналогии методов граничных элементов

Поставленная в п. 1 задача решалась двумя разновидностями МГЭ [11]: НМГЭ и ПМГЭ. Приведем описание отмеченных методов.

**НМГЭ.** Решение системы (2.3) с помощью НМГЭ предполагает составление искомого уравнений в следующем виде (суммы общих решений однородных  $u_o(x)$ ,  $w_o(x)$  и частных решений неоднородных  $u_ч(x)$ ,  $w_ч(x)$  дифференциальных уравнений соответственно):

$$u(x) = u_o(x) + u_ч(x); \quad w(x) = w_o(x) + w_ч(x);$$

$$u_o(x) = N_a G_{11}(x, 0) - N_b G_{11}(x, L) + Q_a G_{12}(x, 0) - Q_b G_{12}(x, L) + M_a \frac{dG_{12}(x, 0)}{dx} - M_b \frac{dG_{12}(x, L)}{dx};$$

$$w_o(x) = N_a G_{21}(x, 0) - N_b G_{21}(x, L) + Q_a G_{22}(x, 0) - Q_b G_{22}(x, L) + M_a \frac{dG_{22}(x, 0)}{dx} - M_b \frac{dG_{22}(x, L)}{dx};$$

$$u_{\check{c}}(x) = \int_0^L [G_{11}(x, \xi) \tilde{p}_x(\xi) + G_{12}(x, \xi) \tilde{p}_z(\xi)] d\xi;$$

$$w_{\check{c}}(x) = \int_0^L [G_{21}(x, \xi) \tilde{p}_x(\xi) + G_{22}(x, \xi) \tilde{p}_z(\xi)] d\xi,$$

где  $G = [G_{mn}(x, \xi)]$ ,  $(m, n = 1, 2)$  — компоненты МФР;  $N_a, N_b, Q_a, Q_b, M_a, M_b$  — компенсирующие нагрузки на кромках панели (при  $x = 0$  и  $x = L$ ), которые определяются из граничных условий вида

$$u = 0, w = 0, \frac{dw}{dx} = 0 \text{ — жесткая заделка;}$$

$$u = 0, w = 0, \frac{d^2w}{dx^2} = -(1 + \nu)\chi_t \text{ — шарнирное закрепление.}$$

**ПМГЭ.** Решение системы (2.3) с помощью ПМГЭ предполагает составление уравнения метода взвешенных невязок (МВН) вида

$$\int_0^L \left\{ \left( B_0 \left( \frac{d^2u}{dx^2} - k_x \frac{dw}{dx} \right) - \tilde{p}_x \right) \tilde{u} + \left( -B_0 k_x \left( \frac{du}{dx} - k_x w \right) + D_0 \frac{d^4w}{dx^4} - \tilde{p}_z \right) \tilde{w} \right\} dx = 0,$$

где  $u^T = (\tilde{u}, \tilde{w})$  — весовые функции для минимизации невязок;  $F^T = (\tilde{p}_x, \tilde{p}_z)$  — правые части системы (2.3). В основе ПМГЭ лежит рассмотрение двух нагружений панели (первое:  $u^T = (G_{11}, G_{21})$ ; второе:  $u^T = (G_{12}, G_{22})$ ) и выбор в качестве весовых функций компонент МФР.

Отметим аналогии: для НМГЭ — со стандартным решением системы дифференциальных уравнений (нахождение фундаментальных систем решений (в НМГЭ — это компоненты МФР и их производных) с произвольными постоянными (в НМГЭ — это компенсирующие нагрузки — отсюда и второе название метода) для общих решений однородных уравнений и любых частных решений неоднородных дифференциальных уравнений (в НМГЭ — это свертка компонент МФР с заданными внешними нагрузками)); для ПМГЭ — с решением системы дифференциальных уравнений с помощью минимизации невязок посредством весовых функций (в ПМГЭ — это компоненты МФР) в уравнениях взвешенных невязок (отсюда и второе название метода — МВН, к которому относятся, например, такие методы, как: метод моментов, метод Бубнова–Галеркина, метод коллокаций и др.).

Расчет поставленной задачи был выполнен обоими методами (НМГЭ и ПМГЭ) — результаты совпали, но, как по-видимому, метод НМГЭ менее трудоемок в своей реализации по сравнению с ПМГЭ.

Отметим аналогию: обоими методами получены идентичные результаты с той лишь разницей, что в НМГЭ найдены перемещения  $u$  и  $w$  как функции переменной  $x$ , а в ПМГЭ —  $u$  и  $w$  как функции переменной  $\xi$ .

Таблица 1. Математические аналоги и аналогии обобщенных функций, функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Раддига

№	Обобщенная функция	Функциональный прерыватель Герсеванова	Зеркальные формы Раддига
1	Обобщенная функция Хевисайда $H(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$	Односторонний прерыватель $\Gamma_a = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \arctg \frac{\eta}{x-a}$	$\Phi(a) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{ x-a }{x-a} \right]$
2	$H(x-b) - H(x-a)$	Двусторонний прерыватель $\Gamma_a^b = \Gamma_b - \Gamma_a$	$\Phi(b) - \Phi(a)$
3	Обобщенная дельта-функция Дирака $\delta(x-a) = \begin{cases} +\infty, & x = a; \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$	Мгновенный прерыватель первого порядка $\Gamma'_a = -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\pi}{(x-a)^2 + \eta^2}$	$\frac{d\Phi(a)}{dx}$
4	Производная обобщенной дельта-функции Дирака $\delta'(x-a)$	Мгновенный прерыватель второго порядка $\Gamma''_a = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2\eta(x-a)}{((x-a)^2 + \eta^2)^2}$	$\frac{d^2\Phi(a)}{dx^2}$
5	Фильтрующее свойство дельта-функции Дирака $\delta(a)f(x) = \delta(a)f(a)$	$\Gamma'_a f(x) = \Gamma'_a f(a)$	$\frac{d(f(x)\Phi(a))}{dx} = \Phi(a) \frac{df(x)}{dx}$

#### 4. Математические аналоги и аналогии обобщенных функций в виде функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Раддига

Для моделирования действующих нагрузок и, тем самым, реализации различных модификаций МГЭ (НМГЭ и ПМГЭ) с использованием классических в настоящее время обобщенных функций, а также их представления в виде функциональных прерывателей Герсеванова [12, 13] и зеркальных форм Раддига [14] в табл. 1 сопоставлены их математические аналоги и аналогии.

Отметим аналогии: обобщенные функции в виде функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Раддига по своим свойствам практически идентичны классическим обобщенным функциям. Это позволяет реализовать различные модификации МГЭ, используя лишь предпочтения исследователя по выбранным функциям, а не по точности полученных результатов. Таким образом, используя любые из трех предложенных аналогов обобщенных функций, можно получить аналогичные (идентичные) результаты.

При решении поставленной задачи можно с уверенностью утверждать, что ее реализация с помощью классических обобщенных функций проще, чем с помощью их представления в виде зеркальных форм Раддига, а последние, в свою очередь, проще, чем их представления с помощью функциональных прерывателей Герсеванова.

#### 5. Матрицы фундаментальных решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Для реализации любой из разновидностей МГЭ предварительно необходимо найти компоненты МФР системы (2.3).

Пусть дана система  $N$  линейных ОДУ вида

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{U}(x) = \mathbf{F}(x), \tag{5.1}$$

где  $\mathbf{L}_0 = \left[ L_{lm} \left( \frac{d}{dx} \right) \right]$ ,  $\mathbf{U}(x) = [u_l(x)]^T$  и  $\mathbf{F}(x) = [f_l(x)]^T$  ( $l, m = \overline{1, N}$ ) — заданный ЛДО, искомая и заданная векторные функции соответственно.

Решение системы (5.1)  $U(x)$  можно представить в виде свертки

$$U(x) = L_0^{-1}F(x) = G * F = \int_{\Omega} G(x, \xi) F(\xi) d\xi, \quad \xi \in \Omega,$$

где  $L_0^{-1}$  — интегральный оператор, ядром которого является МФР  $G(x, \xi)$  системы линейных ОДУ;  $\Omega$  — область определения ЛДО  $L_0$ .

МФР  $G(x, \xi)$  определяется из выражения вида

$$L_0 G(x, \xi) = \delta(x - \xi) I, \quad (5.2)$$

где  $\delta(x - \xi)$  — обобщенная дельта-функция Дирака;  $I$  — единичная матрица.

МФР являются обобщенными функциями и определяются с точностью до любого решения однородной системы линейных ОДУ  $L_0 G(x, \xi) = 0$ . Анализ выражения (5.2) позволяет утверждать, что МФР  $G(x, \xi)$  зависит только лишь от свойств ЛДО  $L_0$ .

Для вычисления производных от компонент МФР  $G(x, \xi)$  в смысле обобщенных функций эффективно может быть использована формула [11]

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}_G + (-1)^{k-1} \delta(x) \int_{\Gamma} f(x) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n, \quad (5.3)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  — производная функции  $f(x)$  в смысле обобщенных функций;  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}_G$  — обычная производная  $f(x)$ ;  $\Gamma$  — граница области  $G$  (результат не зависит от ее выбора).

## 6. Математические аналоги и аналогии вычисления компонент МФР

Компоненты МФР  $G_{lm}(x, \xi)$  определяются из решения  $N$  систем линейных ОДУ вида

$$\sum_{k=1}^N L_{mk} \left( \frac{d}{dx} \right) G_{kl}(x, \xi) = \delta_{lm} \delta(x - \xi), \quad l, m = \overline{1, N}, \quad (*)$$

где  $\delta_{lm} = \begin{cases} 1, & l = m; \\ 0, & l \neq m \end{cases}$  — символ Кронекера.

Приведем сопоставление математических аналогов и аналогий вычисления компонент МФР с помощью ИПФ [4], АДО [5, 6] и ФА.

**ИПФ.** Трансформанта (изображение, образ)  $\bar{f}(p)$  оригинала (прообраза)  $f(x)$  ИПФ определяется соотношением вида (и его свойствами)

$$F[f(x)](p) = \bar{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ipx} dx, \quad i = \sqrt{-1}.$$

$$F\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right](p) = (-ip)^n \bar{f}(p); \quad F[\delta(x - \xi)](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\xi}.$$

Системы линейных ОДУ (\*) в пространстве трансформант перейдут в системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\sum_{k=1}^N L_{mk}(-ip) \bar{G}_{kl}(p, \xi) = \delta_{lm} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\xi}. \quad (**)$$

После использования любого прямого (точного) метода решения СЛАУ могут быть получены трансформанты компонент МФР  $\bar{G}_{lm}(p, \xi)$  (для решаемой задачи),

$$\bar{G}_{11}(p, \xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}B_0} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{4\beta^4}{p^6} \right) e^{ip\xi}, \text{ где } \beta = \sqrt[4]{\frac{k_x^2 B_0}{4D_0}};$$

$$\bar{G}_{12}(p, \xi) = \bar{G}_{21}(p, \xi) = \frac{ik_x e^{ip\xi}}{\sqrt{2\pi}D_0 p^5}; \quad \bar{G}_{22}(p, \xi) = \frac{e^{ip\xi}}{\sqrt{2\pi}D_0 p^4},$$

для восстановления оригиналов  $G_{lm}(x, \xi)$  которых используют формулу обращения ИПФ и его свойства

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(p) e^{-ipx} dp;$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ip)^n \bar{f}(p) e^{-ipx} dp; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-ip)^n}{\phi(p)} e^{-ipx} dp = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Искомые оригиналы компонент МФР  $G_{lm}(x, \xi)$  зависят от структуры множества нулей полинома трансформанты и могут быть получены в смысле конечного значения интеграла [15] по формулам [8, 16]

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{x^n} dx = \frac{(-i)^n}{(n-1)!} \pi \alpha^{n-1} \text{sign}(\alpha), \quad n \geq 1;$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{(x^2 - \beta^2)} dx = -\frac{\pi}{\beta} \sin(\beta\alpha) \text{sign}(\alpha);$$

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{(x^2 - \beta^2)^n} dx = -\frac{1}{\beta^2} J_{n-1} + \frac{1}{2\beta^2(n-1)} \frac{d}{d\alpha} [\alpha J_{n-1}].$$

**АДО.** По сравнению с вышеописанным методом ИПФ методика АДО, основанная на аналогии, существенно упрощает вычисление компонент МФР. Преимущества этого метода вытекают из аналогии между определением компонент МФР системы линейных ОДУ и вычислением обратной матрицы в матричном исчислении для решения СЛАУ (аналогами являются  $\mathbf{L}_0 \mathbf{G}(x, \xi) = \delta(x - \xi) \mathbf{I}$  и  $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ ). Используя отмеченную аналогию и аналогии, Хермандер Л. [5, 6] предложил искать компоненты МФР в виде

$$\mathbf{G}(x, \xi) = \mathbf{L}_0^* \vartheta(x, \xi), \tag{***}$$

где  $\mathbf{L}_0^* = \det(\mathbf{L}_0) \mathbf{L}_0^{-1}$  — ассоциированный к  $\mathbf{L}_0$  ЛДО, элементами которого являются алгебраические дополнения оператора  $\mathbf{L}_0^T$  (для решаемой задачи)

$$\mathbf{L}_0^* \left( \frac{d}{dx} \right) = \begin{vmatrix} D_0 \frac{d^4}{dx^4} + B_0 k_x^2 & B_0 k_x \frac{d}{dx} \\ B_0 k_x \frac{d}{dx} & B_0 \frac{d^2}{dx^2} \end{vmatrix}.$$

В результате подстановки (\*\*\*) в (5.2) приходим к уравнению относительно скалярной функции  $\vartheta(x, \xi)$  (для решаемой задачи  $\det(\mathbf{L}_0) = B_0 D_0 d^6/dx^6$ ):

$$\det(\mathbf{L}_0) \vartheta(x, \xi) = \delta(x - \xi), \tag{****}$$

где  $\det(\mathbf{L}_0)$  — определитель ЛДО (см. Замечание 1 и 2).

**ФА.** Для получения компонент МФР выгодно вместо использования операции интегрирования для восстановления оригиналов по известным трансформантам в ИПФ использовать только лишь операцию дифференцирования для предварительно построенных аппроксимирующих компоненты МФР функций, вид которых частично или полностью может быть предварительно определен из фундаментальных решений (или компонент МФР) для более простых задач (для решаемой задачи)

$$G_{11}(x, \xi) = f_1(x, \xi) + f_2(x, \xi) = \frac{|x - \xi|}{2B_0} + A|x - \xi|^n;$$

$$G_{21}(x, \xi) = G_{12}(x, \xi) = f_3(x, \xi) = B|x - \xi|^m;$$

$$G_{22}(x, \xi) = f_4(x, \xi) = \frac{|x - \xi|^3}{12D_0}$$

с привлечением теоремы Бетти о взаимности работ, из которой по теореме Максвелла о взаимности перемещений следует равенство компонент МФР  $G_{ij} = G_{ji}$  (компоненты МФР есть перемещения в точке  $i$  под действием единичной нагрузки в точке  $j$ ) (см. Замечание 3).

Для решаемой задачи с помощью ИПФ, АДО и ФА были получены идентичные компоненты МФР вида

$$G_{11}(x, \xi) = \text{sign}(x - \xi) \left[ \frac{1}{2B_0}(x - \xi) + \frac{k_x^2}{240D_0}(x - \xi)^5 \right];$$

$$G_{21}(x, \xi) = G_{12}(x, \xi) = \text{sign}(x - \xi) \frac{k_x}{48D_0}(x - \xi)^4;$$

$$G_{22}(x, \xi) = \text{sign}(x - \xi) \frac{1}{12D_0}(x - \xi)^3.$$

**Замечание 1.** Таким образом, определение компонент МФР системы линейных ОДУ с помощью АДО предполагает: 1) Определение компонент АДО  $\mathbf{L}_0^*$  по методике, аналогичной методике вычисления  $\mathbf{A}^{-1}$ ; 2) Решение уравнения (\*\*\*) относительно скалярной функции  $\vartheta(x, \xi)$  по одной из известных методик (ИПФ (по формулам для  $I_n, J_1, J_n$ ), метод последовательного интегрирования, метод вариации произвольных постоянных); 3) По найденному АДО  $\mathbf{L}_0^*$  вычисление всех необходимых производных скалярной функции  $\vartheta(x, \xi)$  по (\*\*).

**Замечание 2.** По сравнению с методом ИПФ метод АДО представляется наиболее эффективным для нахождения компонент МФР. Для оценки трудозатрат, а также затрат времени при использовании АДО для нахождения компонент МФР длинной пологой цилиндрической панели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана, в сравнении с решением систем (\*) с помощью лишь ИПФ можно заключить следующее (для обоих методов использовалось также ИПФ (только для АДО ИПФ использовалось лишь для линейного ОДУ относительно скалярной функции  $\vartheta(x, \xi)$ ) и свойство симметричности МФР): при вычислении компонент МФР из систем (\*) с помощью ИПФ потребовалось вычислить конечные значения четырех несобственных интегралов при восстановлении оригиналов, а при использовании формул (\*\*\*) и (\*\*\*) потребовалось вычислить всего лишь один несобственный интеграл и взять три производных в соответствии с АДО. Казалось бы, что общее число операций совпадает (в обоих методах по четыре), но операция дифференцирования, к которой сводится процесс нахождения компонент МФР с помощью дифференцирования найденной скалярной функции  $\vartheta(x, \xi)$ , является процессом наименее трудоемким (известно, что для функции (тем более обобщенной) легко можно вычислить любую производную, в то время как не каждая подынтегральная функция имеет первообразную) по сравнению с операцией интегрирования (при вычислении конечных значений несобственных интегралов). Таким образом, заключаем, что

методика решения с помощью АДО наименее трудоемка по трудозатратам и, как следствие, затратам времени по сравнению лишь с ИПФ. Указанное заключение становится еще более оправданным при возрастании порядка разрешающей системы ОДУ.

**Замечание 3.** Таким образом, предложенный метод ФА позволяет полностью (в отличие от использования АДО, где нахождение фундаментального решения скалярной функции  $\vartheta(x, \xi)$  зависит от предпочтений исследователя), отказаться от ИПФ. Ограничением методов ИПФ и АДО стала применимость их лишь к линейным ОДУ (а также к дифференциальным уравнениям в частных производных) с постоянными коэффициентами. Кроме того, возникают трудности, связанные с вычислением конечных значений несобственных интегралов при использовании формулы обращения ИПФ для восстановления оригиналов компонент МФР. Метод ФА лишен этих недостатков (ниже новый предложенный метод ФА будет подробно описан).

## 7. Нахождение компонент МФР с помощью функционального анализа

Продемонстрируем реализацию новой методики на примере получения компонент МФР длинной пологой цилиндрической панели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана.

Из курса сопротивления материалов известны дифференциальные уравнения растяжения и изгиба прямолинейных стержней (эти задачи более простые по сравнению с задачей изгиба длинной пологой цилиндрической панели; при этом принципиально, что из более сложной задачи, как частный случай, должны быть получены решения для более простых задач (в случае равенства нулю кривизны панели  $k_x$ ):

$$B_0 \frac{d^2 u}{dx^2} = p_x; \quad D_0 \frac{d^4 w}{dx^4} = p_z, \quad (7.1)$$

где  $B_0, D_0$  — жесткости на растяжение и изгиб прямолинейных стержней соответственно;  $u$  и  $w$  — касательная и нормальная составляющие перемещений точки срединной поверхности соответственно;  $p_x$  и  $p_z$  — касательная и нормальная составляющие интенсивности распределенных нагрузок соответственно.

Фундаментальные решения дифференциальных уравнений растяжения и изгиба прямолинейных стержней можно найти, решив уравнения

$$B_0 \frac{d^2 G_1(x, \xi)}{dx^2} = \delta(x - \xi); \quad D_0 \frac{d^4 G_2(x, \xi)}{dx^4} = \delta(x - \xi). \quad (7.2)$$

Зная связи между обобщенными функциями ( $\delta$ -функцией Дирака, функцией Хевисайда, функцией знака и др.), с помощью метода последовательного интегрирования (решение также можно получить и с помощью метода вариации произвольных постоянных и с помощью ИПФ, но значительно сложнее [11]) были получены фундаментальные решения ОДУ растяжения и изгиба прямолинейных стержней вида

$$G_1(x, \xi) = \frac{|x - \xi|}{2B_0}; \quad G_2(x, \xi) = \frac{|x - \xi|^3}{12D_0}. \quad (7.3)$$

Вычислив фундаментальные решения дифференциальных уравнений растяжения и изгиба прямолинейных стержней, на основе теорем Бетти и Максвелла можно аппроксимировать компоненты МФР длинной пологой цилиндрической панели следующими функциями:

1. Из компоненты МФР  $G_{11}(x, \xi)$ , как частный случай (при условии равенства нулю кривизны панели  $k_x$ ), должно быть получено фундаментальное решение дифференциального уравнения растяжения прямолинейных стержней. Из этого следует, что одна из двух аппроксимирующих функций  $f_1(x, \xi)$  должна совпадать с фундаментальным решением дифференциального уравнения растяжения прямолинейных стержней (и не зависит от кривизны

панели  $k_x$ ). Компонента МФР  $G_{11}(x, \xi)$  также должна иметь еще одну аппроксимирующую функцию  $f_2(x, \xi)$  (обусловленную наличием у панели кривизны  $k_x$ ), о которой можно пока сказать лишь то, что она является (как и все остальные компоненты МФР) функцией от  $A|x - \xi|^n$  (ее показатель степени  $n$ , как и коэффициент  $A$ , нам пока не известны), но коэффициент  $A$  должен зависеть от кривизны панели  $k_x$  и ее жесткости  $D_0$  на изгиб (от жесткости на растяжение  $B_0$  коэффициент  $A$  не зависит; также анализ двух отмеченных для коэффициента  $A$  параметров (кривизны панели  $k_x$  и ее жесткости  $D_0$  на изгиб), что позволяет утверждать, что коэффициент  $A$  должен быть прямо пропорционален кривизне панели  $k_x$  и обратно пропорционален ее жесткости на изгиб  $D_0$ ; правильность отмеченного утверждения будет далее проверена)

$$G_{11}(x, \xi) = f_1(x, \xi) + f_2(x, \xi) = \frac{|x - \xi|}{2B_0} + A|x - \xi|^n;$$

2. Компонента МФР  $G_{21}(x, \xi) = G_{12}(x, \xi)$  должна иметь аппроксимирующую функцию  $f_3(x, \xi)$  (обусловленную наличием у панели кривизны  $k_x$ ), о которой можно пока сказать лишь то, что она является (как и все остальные компоненты МФР) функцией от  $B|x - \xi|^m$  (ее показатель степени  $m$ , как и коэффициент  $B$ , нам пока не известны). Анализ компоненты МФР  $G_{21}(x, \xi) = G_{12}(x, \xi)$  при условии равенства нулю кривизны панели  $k_x$  позволяет утверждать, что она должна обратиться в нуль (чтобы решаемая задача могла быть разбита на две независимых: задачу растяжения и изгиба прямолинейного стержня). Также отметим, что анализ коэффициента  $B$  позволяет утверждать, что он должен быть прямо пропорционален кривизне панели  $k_x$  и обратно пропорционален ее жесткости на изгиб  $D_0$  (от ее жесткости на растяжение  $B_0$  коэффициент  $B$  не зависит) — правильность отмеченного утверждения будет далее проверена)

$$G_{21}(x, \xi) = G_{12}(x, \xi) = f_3(x, \xi) = B|x - \xi|^m;$$

3. Из компоненты МФР  $G_{22}(x, \xi)$  вне зависимости от величины кривизны панели  $k_x$  должно быть получено фундаментальное решение дифференциального уравнения изгиба прямолинейных стержней. Из этого следует, что аппроксимирующая функция  $f_4(x, \xi)$  должна совпадать с фундаментальным решением дифференциального уравнения изгиба прямолинейных стержней (никаких других аппроксимирующих функций для компоненты МФР  $G_{22}(x, \xi)$  нет, т.к. она не зависит от кривизны панели  $k_x$ ) — правильность отмеченного утверждения будет далее проверена

$$G_{22}(x, \xi) = f_4(x, \xi) = \frac{|x - \xi|^3}{12D_0}.$$

Таким образом, подлежащими определению являются лишь 4 параметра:  $A$ ,  $B$ ,  $n$  и  $m$ . Рассматривая два нагружения панели единичными сосредоточенными силами, получим две системы из двух уравнений каждая (система (2.3), где нагружения таковы: первое:  $u^T = (G_{11}(x, \xi), G_{21}(x, \xi))$ ;  $F^T = (\delta(x - \xi), 0)$ ; второе:  $u^T = (G_{12}(x, \xi), G_{22}(x, \xi))$ ;  $F^T = (0, \delta(x - \xi))$ ).

Таким образом, получаем совместную систему уравнений (4 уравнения и 4 неизвестных). Нам остается лишь подставить аппроксимированные функциями компоненты МФР  $G_{ij}(x, \xi)$ , ( $i, j = 1, 2$ ) длинной пологой цилиндрической панели в эти четыре дифференциальных уравнения, продифференцировать их и решить уравнения (приравнять подобные слагаемые), найти искомые параметры  $A$ ,  $B$ ,  $n$  и  $m$ .

Стоит также отметить, что, вычисляя все необходимые производные от компонент МФР (в соответствии с известным ЛДО) по правилу дифференцирования обобщенных функций (2.2) и сопоставляя показатели степени для получения в уравнениях систем тождеств, вполне достаточно подставлять аппроксимированные функциями компоненты МФР лишь для любой одной из двух систем, что позволяет вдвое сократить объем работы по поиску искомых параметров.

В результате искомые параметры  $A$ ,  $B$ ,  $n$  и  $m$  оказались равными

$$m = 4; \quad n = m + 1 = 5; \quad B = \frac{k_x}{48D_0}; \quad A = \frac{Bk_x}{5} = \frac{k_x^2}{240D_0}.$$

Подстановка найденных искомых параметров в аппроксимирующие компоненты МФР  $G_{ij}(x, \xi)$ , ( $i, j = 1, 2$ ) позволяет получить окончательные их результаты (ранее отмеченные расчет искомых параметров утверждения успешно подтвердились).

Предложенная здесь методика нахождения компонент МФР с помощью ФА была также успешно реализована для длинной непологой цилиндрической панели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана, а также для пологой и непологой цилиндрических панелей для модели, основанной на гипотезах Тимошенко. Результаты всеми тремя методами (ИПФ, АДО и ФА) совпали, но, по мнению автора, метод ФА менее трудоемок по сравнению с АДО, а АДО — по сравнению с ИПФ.

### 8. Примеры реализации НМГЭ и ПМГЭ с использованием обобщенных функций, функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Радцига

**Пример 6.1.** Длинная пологая цилиндрическая панель, основанная на гипотезах Дюамеля–Неймана, постоянной толщины  $h$  и радиуса кривизны  $R$  находится под действием равномерно распределенной внешней поперечной нагрузки  $q$  и линейно распределенного по толщине температурного поля  $T$ . Механические и геометрические характеристики панели:  $h = 0,01$  м,  $L = 1$  м,  $q = 0,3$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $R = 2$  м,  $\alpha_t = 0,125 \cdot 10^{-4}$   $1/^\circ\text{C}$ ,  $t_1 = 100$   $^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 0$   $^\circ\text{C}$ ,  $T = (t_1 + t_2)/2 + (\Delta T/h)z$ , где  $\Delta T = t_1 - t_2$  — перепад температуры по толщине цилиндрической панели.

На рис. 2–4 изображено распределение компонент перемещения  $u$  и  $w$ , а также изгибных  $\sigma^{\text{изг}}$  напряжений при наличии температурного поля (линии с точками: линии соответствуют точному, точки — численному решению МГЭ (ПМГЭ и НМГЭ, реализованные с помощью обобщенных функций, функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Радцига, — решения получились идентичными)), которое по толщине пластины меняется по линейному закону и без него (линии без точек). Непрерывные линии — граничные условия жесткой заделки, пунктирные (с коротким пунктиром) — шарнирному закреплению, пунктирные (с длинным пунктиром) — смешанные граничные условия (левый край жестко заделан, а правый — шарнирно оперт).

**Пример 6.2.** Даны два наружных корпуса камер сгорания (КС) двух газотурбинных двигателей. Необходимо выполнить расчеты КС с использованием метода конечных элементов (МКЭ) и сравнить полученные результаты с МГЭ. Геометрические двумерные модели для расчета построены в полном соответствии с трехмерными моделями корпусов КС (рис. 5). Материалы корпусов КС — жаропрочные сплавы: модель а) 10X11H20T2P (ЭИ696А); модель б) ХН45МВТЮБР (ЭП718), свойства которых приняты в соответствии с [17].

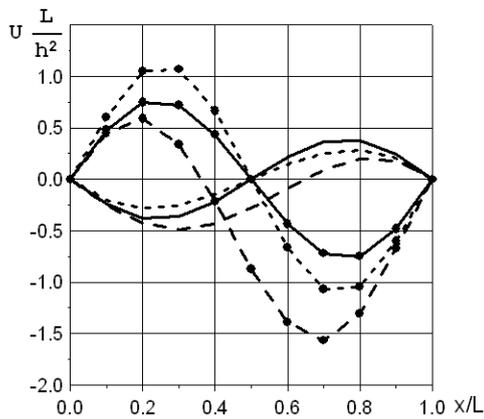


Рис. 2. Распределение тангенциальных перемещений  $u$

Fig. 2. Distribution of tangential displacements  $u$

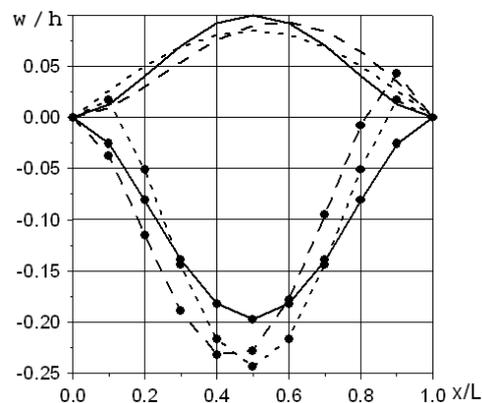


Рис. 3. Распределение прогиба  $w$

Fig. 3. Deflection distribution  $w$

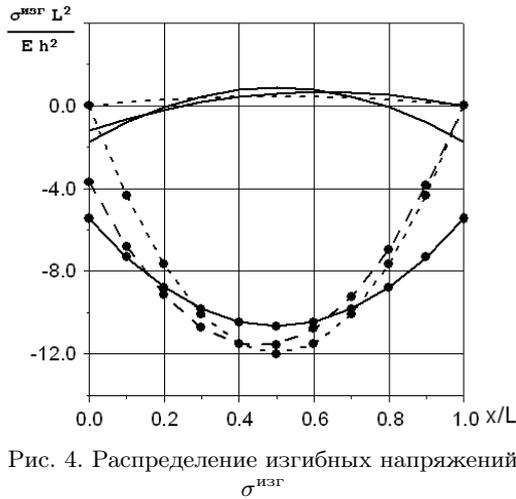


Рис. 4. Распределение изгибных напряжений  $\sigma_{изг}$

Fig. 4. Flexural stress distribution  $\sigma_{изг}$

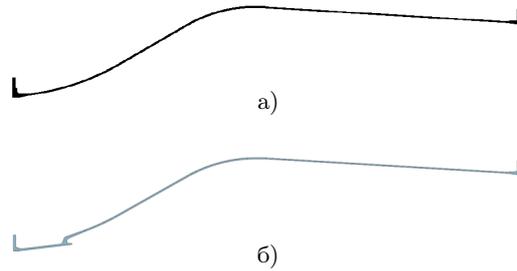


Рис. 5. Геометрические двумерные модели наружных корпусов КС (модель а) и б))

Fig. 5. Geometric two-dimensional models of the outer casings of the compressor station (model a) and б))

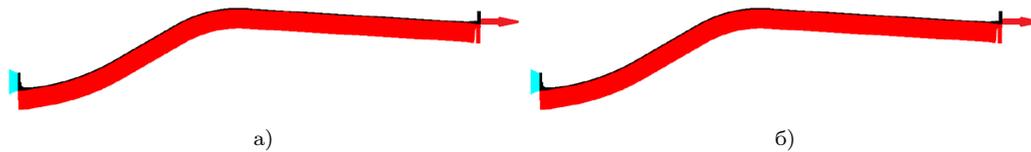


Рис. 6. Граничные условия и нагрузки (модель а) и б))

Fig. 6. Boundary conditions and loads (model a) and б))

Для построения расчетной сетки был использован четырехузловой совместный (согласованный, конформный), совместимый, изопараметрический конечный элемент Plane42 из библиотеки Ansys. В качестве граничных условий к моделям были приложены: осевые силы от соплового аппарата первой ступени — модель а) 5,7 т; модель б) 6 т; внутренние избыточные давления — модель а) 7,85 кг/см<sup>2</sup>; модель б) 8,5 кг/см<sup>2</sup>; действующая температура — для обеих моделей 320 °С. Закрепление модели осуществлялось по торцу переднего фланца. Схематично граничные условия и нагрузки показаны на рис. 6, а распределение эквивалентных напряжений по критерию прочности Мизеса–Губера–Генки — на рис. 7.

Величины максимальных значений эквивалентных напряжений по критерию прочности Мизеса–Губера–Генки, полученные с помощью МКЭ, составляют: модель а)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 23,52 \text{ кг/мм}^2$ ; модель б)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 26,28 \text{ кг/мм}^2$ . Эти же величины для обеих моделей (модель а) и б)), полученные с помощью МГЭ, меньше на 6 % (отличия в результатах обусловлены погрешностями аппроксимации, дискретизации и счета). Пределы длительной прочности при растяжении для этих материалов: модель а)  $\sigma_{\text{дл}}^{320^\circ\text{C}} = 82,35 \text{ кг/мм}^2$ ; модель б)  $\sigma_{\text{дл}}^{320^\circ\text{C}} = 70 \text{ кг/мм}^2$  [18] (материалы 10X11H20T2P (ЭИ696А) и ХН45МВТЮБР (ЭП718) соответственно).

Минимальные коэффициенты запасов по местным напряжениям (статической прочности) составляют (результаты с помощью МКЭ): модель а)  $K_M = \sigma_{\text{дл}}^{320^\circ\text{C}} / \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 3,50$ ; модель б)  $K_M = \sigma_{\text{дл}}^{320^\circ\text{C}} / \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 2,66$ .

Для обеих моделей (модель а) и б)) минимальные коэффициенты запасов по местным напряжениям, полученным с помощью МКЭ, удовлетворяют требованиям нормативной документации [18]. Еще в большей степени эти требования будут удовлетворяться для результатов, полученных с помощью МГЭ.

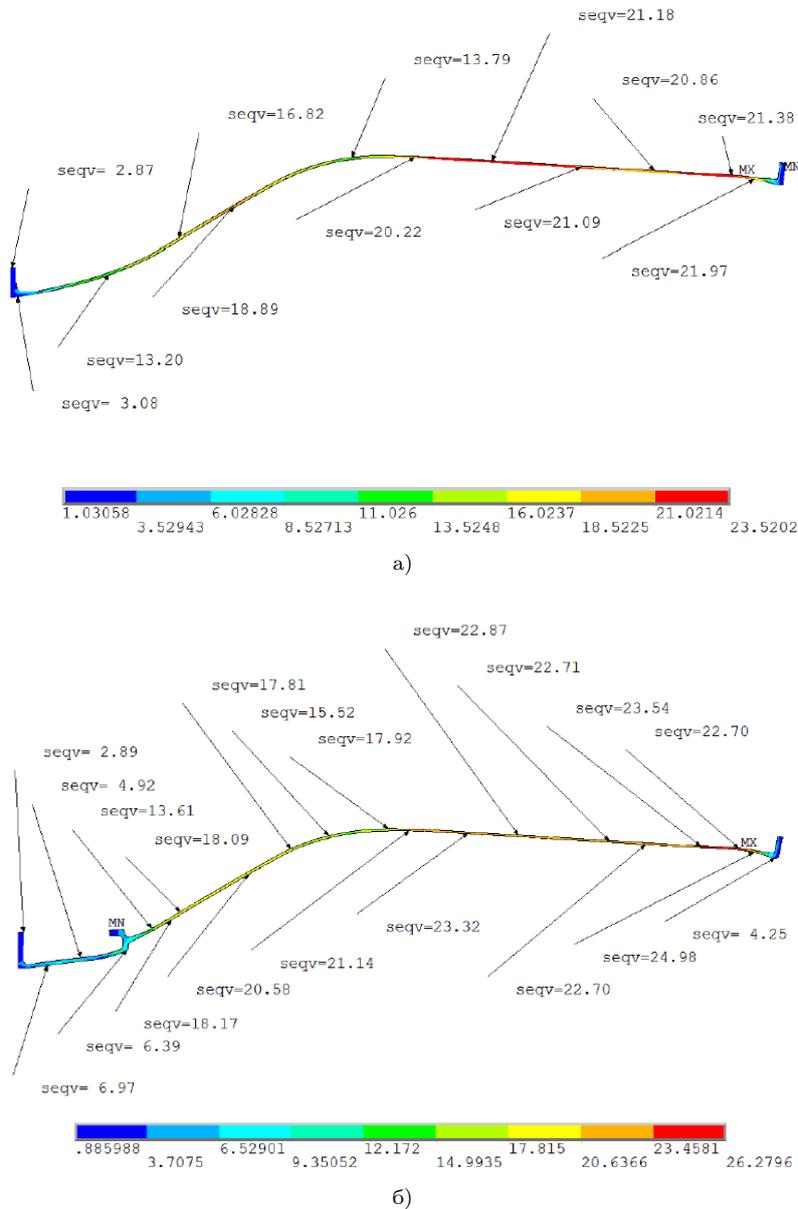


Рис. 7. Распределение эквивалентных напряжений по критерию прочности Мизеса–Губера–Генки (модель а) и б))

Fig. 7. Distribution of equivalent stresses according to the Mises–Huber–Genki strength criterion (model a) and б))

### Заключение

В статье на примере решения задачи деформирования длинной пологой термоупругой цилиндрической панели по модели, основанной на гипотезах Дюамеля–Неймана, были использованы математические аналоги и аналогии для: выбора разновидности МГЭ; выбора функций (среди обобщенных, функциональных прерывателей Герсеванова и зеркальных форм Радцига); получения компонент МФР (с помощью ИПФ, АДО и ФА).

Также, используя математические аналоги и аналогии, был выполнен расчет наружных корпусов двух КС газотурбинных двигателей.

## Литература [References]

1. Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. Москва, Добросвет, 2000. [Gelfand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions and actions on them*. Moscow, Dobrosvet, 2000. (in Russian)]
2. Шилов, Г.Е., *Математический анализ. Второй специальный курс*. Москва, Изд-во МГУ, 1984. [Shilov, G.E., *Mathematical analysis. The second special course*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1984. (in Russian)]
3. Владимиров, В.С., Жаринов, В.В., *Уравнения математической физики*. Москва, Физико-математическая литература, 2000. [Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V., *Equations of mathematical physics*. Moscow, Physical and mathematical literature, 2000. (in Russian)]
4. Шевченко, В.П., *Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек*. Донецк, Донецкий государственный университет, 1977. [Shevchenko, V.P., *Integral transformations in the theory of plates and shells*. Donetsk, Donetsk State University, 1977. (in Russian)]
5. Хермандер, Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. Москва, Мир, 1986. [Hermander, L., *Analysis of linear partial differential operators*. Vol. 1. Theory of distributions and Fourier analysis. Moscow, Mir, 1986. (in Russian)]
6. Shanz, M., Antes, H., A boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko beam. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, no. 3, pp. 348–359.
7. Грибов, А.П., Куканов, Н.И., *Фундаментальные решения задач деформирования пластин и панелей с учетом поперечного сдвига. Тезисы докладов XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов»*. Санкт-Петербург. 2003, с. 68–70. [Gribov, A.P., Kukanov, N.I., *Fundamental solutions to the problems of deformation of plates and panels taking into account transverse shear. Abstracts of the XX International Conference “Mathematical modeling in continuum mechanics. Methods of boundary and finite elements”*. Saint Petersburg, 2003, pp. 68–70. (in Russian)]
8. Великанов, П.Г., *Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений. Труды 3-го Международного форума «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки. Ч. 3»*. Самара: Изд-во СамГТУ, 2007, с. 15–19. [Velikanov, P.G., *Investigation of thermomechanical bending of a long flat cylindrical panel by the method of boundary integral equations. Proc. of the 3rd International Forum “Actual problems of modern Science. Natural Sciences. Pt. 3”*. Samara, Publishing House of SamSTU, 2007, pp. 15–19. (in Russian)]
9. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., *Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020»*, 2020, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., *Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. All-Russian scientific conference with international participation “Actual problems of continuum mechanics – 2020”*, 2020, pp. 111–115. (in Russian)]
10. Вольмир, А.С., *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. Москва, Наука, 1972. [Volmir, A.S., *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow, Nauka, 1972. (in Russian)]
11. Аргюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements*. Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]
12. Герсеванов, Н.М., *Функциональные прерыватели и их приложение в строительной механике. Тр. ВНИИОС. Вып. 2*. Москва, Госстройиздат, 1934. [Gersevanov, N.M., *Functional interrupters and their application in construction mechanics. Works of VNIIOS. Iss. 2*. Moscow, Gosstroizdat, 1934. (in Russian)]
13. Коянкин, А.А., Илизаров, А.Г., *Развитие методики расчета балки кусочно-постоянного сечения, выполняемого с использованием прерывателей Герсеванова. Известия высших учебных заведений. Строительство*, 2015, № 3 (675), с. 111–118. [Konkin, A.A., Elizarov, A.G., *Development of a method for calculating a beam of piecewise constant cross-section performed using Gersevanov interrupters. News of Higher Educational institutions. Construction*, 2015, no. 3 (675), pp. 111–118. (in Russian)]
14. Радциг, Ю.А., Колупаев, А.Н., *Зеркальные функции и их применение при решении задач строи-*

- тельной механики. Москва, Стройиздат, 1980. [Radzig, Yu.A., Kolupaev, A.N., *Mirror functions and their application in solving problems of structural mechanics*. Moscow, Stroyizdat, 1980. (in Russian)]
15. Адамар, Ж., *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*. Москва, Наука, 1978. [Hadamard, J., *The Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type*. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
  16. Градштейн, И.С., Рыжик, И.М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва, Наука, 1971. [Gradstein, I.S., Ryzhik, I.M., *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow, Nauka, 1971. (in Russian)]
  17. Шалин, Р.Е., *Авиационные материалы. Справочник в девяти томах. Том 3. Жаропрочные стали и сплавы. Сплавы на основе тугоплавких металлов. Ч. 1. Деформируемые жаропрочные стали и сплавы* Москва, ОНТИ, 1989. [Shalin, R.E., *Aviation materials. The handbook is in nine volumes. Vol. 3. Heat-resistant steels and alloys. Alloys based on refractory metals. Pt. 1. Deformable heat-resistant steels and alloys*. Moscow, ONTI, 1989. (in Russian)]
  18. *Нормы прочности авиационных газотурбинных двигателей гражданской авиации*. Москва, ЦИАМ, 2004. [*Strength standards of aviation gas turbine engines of civil aviation*. Moscow: CIAM, 2004. (in Russian)]