

УДК 532.546:519.6

EDN: KLDUZZ DOI: 10.31429/vestnik-20-4-37-44

Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде

П. В. Коханов  , В. Г. Цибулин 

Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону, 344090, Россия

✉ Коханов Павел Владимирович; ORCID 0009-0005-7668-9646; e-mail: kokhanov@sfedu.ru

Аннотация. Работа посвящена численному исследованию конвекции несжимаемой теплопроводной жидкости в пористой круговой области при подогреве снизу. На основе модели Дарси с использованием смещенных сеток развита численная схема конечных разностей для решения уравнений в полярных координатах. Предложены специальные аппроксимации в окрестности полюса круговой области для задачи относительно функции тока и температуры. Показано, что разработанная схема сохраняет косимметрию задачи. Представлены результаты вычисления критических значений чисел Рэлея для задачи с линейным по высоте распределением температуры на границе.

Ключевые слова: конвекция в пористой среде, косимметрия, критические значения чисел Рэлея, конечно-разностная схема, круговая область.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1928).

Цитирование: Коханов П. В., Цибулин В. Г. Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 4. С. 37–44. EDN: KLDUZZ. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-37-44

Поступила 14 ноября 2023 г. После доработки 2 декабря 2023 г. Принято 4 декабря 2023 г. Публикация 31 декабря 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Numerical Scheme in Polar Coordinates for the Analysis of Convection in Porous Media

P. V. Kokhanov , V. G. Tsybulin

Southern Federal University, str. Milchakov, 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia

✉ Pavel V. Kokhanov; ORCID 0009-0005-7668-9646; e-mail: kokhanov@sfedu.ru

Abstract. The work is devoted to the numerical investigation of the convection of an incompressible heat-conducting fluid in a circle domain filled by porous media and heated from below. Based on the Darcy model using staggered grids, a numerical finite-difference scheme for solving equations in polar coordinates is developed. Discretization with a five-point stencil is used to provide a second order of accuracy. We propose special approximations in the pole's vicinity of a circular domain for the problem regarding the stream function and temperature. It is shown that the developed scheme preserves the cosymmetry of the problem. It is extremely important for further computation of the family of stationary regimes. We calculated the critical Rayleigh numbers for the problem with linear in vertical direction distribution of the temperature. The smallest one corresponds to the occurrence of convection.

Keywords: convection in porous media, cosymmetry, critical values of the Rayleigh numbers, finite-difference scheme, circular enclosure.

Funding. The work was supported by a grant from the Government of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2019-1928).

Cite as: Kokhanov, P. V., Tsybulin, V. G., Numerical scheme in polar coordinates for the analysis of convection in porous media. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 37–44. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-37-44

Received 14 November 2023. Revised 2 December 2023. Accepted 4 December 2023. Published 31 December 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Актуальность исследования конвекции в пористых средах обусловлена различными научными и техническими приложениями в геофизике и энергетике, например, при моделировании процессов в мантии земного шара или при хранении ядерных и других отходов [1, 2]. Для этого, как правило, применяются численные методы решения задач, формулируемых на основе моделей Дарси–Буссинеска, Бринкмана и др. [2].

При изучении фильтрационной конвекции Дарси в цилиндре Д.В. Любимовым [3] была обнаружена мультстабильность — ответвление семейства стационарных конвективных режимов от состояния механического равновесия. Это явление было объяснено В.И. Юдовичем на основе разработанной им теории косимметрии [4]. В [5] показано, что случай косимметрии не может быть следствием существования какой-либо непрерывной группы симметрии.

Задачи об анализе конвективных движений в основном рассматривались на основе декартовых или криволинейных координат без учёта особых точек в цилиндрических и сферических системах координат [6]. Например, для задачи Дарси в [7–9] цилиндрические координаты применялись при анализе конвективных движений для односвязных кольцевых областей, не включавших полюс.

1. Постановка задачи

Рассматривается конвекция жидкости в круговой области $D = [0, R] \times [0, 2\pi]$ (рис. 1), заполненной пористой средой. На границе задано линейное распределение температуры по высоте

$$T_b(\varphi, t) = T_1 + (R + \cos \varphi)\delta T, \quad \delta T = \frac{T_2 - T_1}{2R}. \quad (1.1)$$

Здесь r и φ — радиальная и азимутальная координаты, t — время, R — радиус круговой области, T_1 и T_2 — температуры при $y = 0$ и $y = 2R$ соответственно, δT — градиент температуры по высоте. Используется замена $T(r, \varphi, t) = T_b(\varphi, t) + \delta T\theta(r, \varphi, t)$, где θ — девиация температуры.

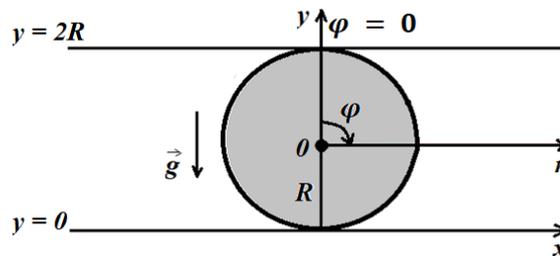


Рис. 1. Круговая область

Fig. 1. Circular area

Далее используется система безразмерных уравнений конвекции в полярных координатах [10, 11], состоящая из уравнения, связывающего девиацию температуры и функцию тока, и уравнения теплопроводности

$$0 = \Delta\psi - \lambda G(\theta), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta\theta + G(\psi) - J(\psi, \theta), \quad J(\psi, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial r} q_2, \quad (1.3)$$

где

$$G(\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta \cos \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) \sin \varphi, \quad (1.4)$$

$$q_1 = -\frac{\partial\theta}{\partial r}, \quad q_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}. \quad (1.5)$$

Число Рэлея λ вычисляется следующим образом [10, 11]:

$$\lambda = \frac{g\beta l^2 \delta T}{k\alpha}. \quad (1.6)$$

Здесь g — ускорение свободного падения, β — температурный коэффициент линейного расширения, l — масштаб длины, $k = \nu/K$ — отношение кинематической вязкости к проницаемости среды, $\alpha = \frac{\chi}{c_p \rho}$ — температуропроводность, χ — коэффициент теплопроводности, c_p — изобарная удельная теплоёмкость, ρ — плотность.

Для системы (1.2)–(1.6) задаются условия в центре круговой области ($r = 0$)

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad q_1 = 0 \quad (1.7)$$

и на границе ($r = R$)

$$\psi = 0, \quad \theta = 0. \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.2)–(1.8) является косимметричной в смысле определения В. И. Юдовича [4]. Действительно, вектор $\mathbf{L} = (\theta, -\psi)$ ортогонален вектору правой части (1.2)–(1.3) с учетом (1.7)–(1.8) и не обращается в нуль для $\psi \neq 0$. В [5] показано, что в случае плоской задачи конвекции Дарси первое критическое значение числа Рэлея λ_{cr} является двукратным для произвольной области. При $\lambda < \lambda_{cr}$ состояние покоя $\psi = \theta = 0$ устойчиво.

2. Дискретизация системы уравнений

Для численного исследования задачи (1.2)–(1.8) используется метод конечных разностей, аналогично [8]. Вводятся равномерные сетки по координатам

$$r_j = (j - 1/2)h_r, \quad j = \overline{1, N_r}, \quad h_r = \frac{R}{N_r - 1/2}, \quad (2.1)$$

$$\varphi_i = ih_\varphi, \quad i = \overline{0, N_\varphi}, \quad h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}, \quad (2.2)$$

где N_r, N_φ — число узлов, h_r, h_φ — шаги. Также используются смещённые сетки

$$r_{j-1/2} = (j - 1)h_r, \quad j = \overline{1, N_r}, \quad (2.3)$$

$$\varphi_{i-1/2} = (i - 1/2)h_\varphi, \quad i = \overline{1, N_\varphi}. \quad (2.4)$$

На двухточечных шаблонах определяются разностные операторы первых производных, а также операторы вычисления среднего для целых и полуцелых индексов j и i :

$$(\delta_1\theta)_{j-1/2}^i = \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{h_r}, \quad (\delta_2\theta)_j^{i-1/2} = \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{h_\varphi}, \quad (2.5)$$

$$(\delta_0^1\theta)_{j-1/2}^i = \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{2}, \quad (\delta_0^2\theta)_j^{i-1/2} = \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{2}, \quad (2.6)$$

С помощью данных формул строятся операторы для вычисления разностных производных и среднего на четырёхточечном шаблоне

$$(d_0\theta)_j^i = (\delta_0^1\delta_0^2\theta)_j^i, \quad (d_1\theta)_j^i = (\delta_0^2\delta_1\theta)_j^i, \quad (d_2\theta)_j^i = (\delta_0^1\delta_2\theta)_j^i, \quad (2.7)$$

и разностные операторы первых производных на трёхточечных шаблонах

$$(D_1\theta)_j^i = (\delta_0^1\delta_1\theta)_j^i, \quad (D_2\theta)_j^i = (\delta_0^2\delta_2\theta)_j^i, \quad (2.8)$$

а также дискретный аналог лапласиана

$$\Delta_h \theta_j^i = \left(\frac{1}{r} \delta_1 (r \delta_1 \theta) + \frac{1}{r^2} \delta_2 \delta_2 \theta \right)_j^i = \frac{1}{r_j} (\delta_1 r q_1)_j^i + \frac{1}{r_j} (\delta_2 r q_2)_j^i. \quad (2.9)$$

Данные формулы позволяют обеспечить второй порядок аппроксимации системы уравнений (1.2)–(1.8) для внутренних узлов сетки аналогично проведенному в [7–9] для случаев, исключавших полюс. В настоящей работе предлагается специальная аппроксимация для включения центра круговой области в разностную схему, порядок далее также определяется с помощью вычислительного эксперимента и процесса Эйткена [12].

Для аппроксимации уравнений (1.2)–(1.8) использовались интегро-интерполяционный метод [13], формула Ньютона–Лейбница, методы центральных прямоугольников и трапеций. Уравнения (1.2)–(1.3) интегрировалось по ячейке $[r_{j-1/2}, r_{j+1/2}] \times [\varphi_{i-1/2}, \varphi_{i+1/2}]$. В результате получаются аппроксимации уравнений (1.2)–(1.8) для внутренних узлов

$$0 = \Delta_h \psi_j^i - \lambda G_j^i(\theta), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta_j^i}{\partial t} = \Delta_h \theta_j^i + G_j^i(\psi) - J_j^i(\psi, \theta). \quad (2.11)$$

Здесь

$$G_j^i(\theta) = \frac{1}{r_j} (D_2 \theta \cos \varphi)_j^i + \frac{1}{r_j h_\varphi} (D_1 r \theta)_j^i \sin \varphi_i \sin \frac{h_\varphi}{2}, \quad (2.12)$$

$$q_{1,j-1/2}^i = -(\delta_1 \theta)_{j-1/2}^i, \quad q_{2,j}^{i-1/2} = -\frac{1}{r_j} (\delta_2 \theta)_j^{i-1/2}, \quad (2.13)$$

$$J(\psi, \theta)|_{(r_j, \varphi_i)} \approx J_j^i(\psi, \theta) = \frac{1}{3} J_{1,j}^i + \frac{2}{3} J_{2,j}^i. \quad (2.14)$$

Здесь

$$J_{1,j}^i = \frac{1}{r_j} [D_1(\theta D_2 \psi) - D_2(\theta D_1 \psi)]_j^i, \quad (2.15)$$

$$J_{2,j}^i = \frac{1}{r_j} [d_1(d_0 \theta d_2 \psi) - d_2(d_0 \theta d_1 \psi)]_j^i. \quad (2.16)$$

Центру круговой области соответствует узел с номером $j = 1/2$, и для всех $i = \overline{1, N_\varphi}$ выполняются дискретные аналоги условий (1.7)

$$(\delta_1 \psi)_{1/2}^i = 0, \quad q_{1,1/2}^i = 0. \quad (2.17)$$

На границе круговой области обнуляются функция тока и девиация температуры (1.8)

$$\psi_{N_r}^i = 0, \quad \theta_{N_r}^i = 0. \quad (2.18)$$

Построенные разностные схемы сохраняют косимметрию и дискретные симметрии по азимутальной координате исходной задачи, что необходимо при численном исследовании косимметричных задач, характеризующихся сильной неединственностью решений.

3. Численный эксперимент

Полученная в результате дискретизации система уравнений (2.10)–(2.11) может быть представлена в векторном виде

$$\dot{\Theta} = \mathbf{A}\Theta + \mathbf{B}\Psi + \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

$$0 = \mathbf{A}\Psi - \lambda \mathbf{B}\Theta, \quad (3.2)$$

Таблица 1. Критические значения чисел Рэлея λ_j^i

Table 1. Critical values of Rayleigh numbers λ_j^i

Сетка	λ_1^1	$\lambda_1^2 = \lambda_2^1$	λ_2^2
8×8	28,38	78,97	124,57
12×12	25,33	67,71	81,07
16×16	24,34	63,94	70,43
24×24	23,66	61,14	63,74
32×32	23,43	60,11	61,52
36×36	23,37	59,83	60,93
48×48	23,26	59,35	59,96
64×64	23,21	59,08	59,42
80×80	23,18	58,96	59,17
Квадрат, $a = 2$	19,74	49,35	78,96
Квадрат, $a = \sqrt{2}$	39,48	98,70	157,91
Квадрат, $a = \sqrt{\pi}$	25,13	62,83	100,53

где ленточная матрица \mathbf{A} соответствует дискретному аналогу оператора Лапласа (2.9), ленточная матрица \mathbf{B} — дискретному аналогу силы всплытия G (2.13), нелинейное слагаемое \mathbf{F} — дискретному аналогу конвективного члена (2.14), Θ — массив узловых значений отклонения температуры θ размерности $(N_r - 1)N_\varphi$, Ψ — массив узловых значений функции тока той же размерности

$$\Theta = \{ \theta_1^1, \theta_1^2, \dots, \theta_j^i, \theta_j^{i+1}, \dots, \theta_{N_r-1}^{N_\varphi} \}, \quad (3.3)$$

$$\Psi = \{ \psi_1^1, \psi_1^2, \dots, \psi_j^i, \psi_j^{i+1}, \dots, \psi_{N_r-1}^{N_\varphi} \}. \quad (3.4)$$

Например, первая строка матрицы \mathbf{A} имеет следующие ненулевые компоненты

$$A_1^1 = -\frac{2}{r_1^2 h_\varphi^2} - \frac{r_{3/2}}{r_1 h_r^2}, \quad A_1^2 = \frac{1}{r_1^2 h_\varphi^2}, \quad A_1^4 = \frac{1}{r_1^2 h_\varphi^2}, \quad A_2^1 = \frac{r_{3/2}}{r_1 h_r^2}. \quad (3.5)$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты, которые являются элементами первой строки матрицы \mathbf{B}

$$B_1^2 = \frac{\cos \varphi_2}{2h_\varphi r_1}, \quad B_1^4 = -\frac{\cos \varphi_4}{2h_\varphi r_1}, \quad B_2^1 = \frac{r_2 \sin \varphi_1 \sin \frac{h_\varphi}{2}}{h_r h_\varphi r_1}. \quad (3.6)$$

Далее исследовалась спектральная задача для определения порога возникновения конвективных движений, которая получается из (3.1)–(3.2) при нулевых \mathbf{F} и $\dot{\Theta}$. В результате решения находились критические числа Рэлея λ_j^i , где i, j — порядковые номера по азимутальной и радиальной координатам. Расчёт проводился для круговой области радиуса $R = 1$ в среде MATLAB.

В табл. 1 приведены вычисленные критические числа Рэлея $\lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_2^2$ для круговой области при различных дискретизациях. Из таблицы следует, что при увеличении числа узлов сетки наблюдается сходимость чисел Рэлея λ_j^i . Отметим, что в вычислительном эксперименте получена двукратность этих значений, что подтверждает сохранение косимметрии системы для разностного аналога задачи.

В табл. 1 также представлены числа Рэлея для квадратной области со стороной a , рассчитанные по формуле [10]

$$\lambda_j^i = 4\pi^4 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{a^2} \right). \quad (3.7)$$

Здесь i и j соответствуют порядковым номерам по декартовым координатам x и y .

Таблица 2. Эффективный порядок точности p

Table 2. Effective precision rank p

N_r / N_φ	12/24/48	16/32/64
12	2,042	2,037
16	2,042	2,019
20	2,042	2,019
24	2,042	2,037

Сравнение критических значений $\lambda_{cr} = \lambda_1^1$ для круга λ_d и различных квадратов (описанного, вписанного и эквивалентной площади) λ_q проводилось на сетке 16×16 узлов по формуле [11]

$$\varepsilon = \frac{|\lambda_d - \lambda_q|}{\lambda_d}. \quad (3.8)$$

Видно, что критические значения чисел Рэлея, полученные для квадратной области, равной площади круговой, близки к значениям для круга $\varepsilon = 3\%$. Для круга и описанного около него квадрата из (3.8) получено $\varepsilon = 19\%$, для круга и вписанного в него квадрата — $\varepsilon = 62\%$.

Расчет критических чисел Рэлея проводился на последовательности сеток, для уточнения и оценки порядка точности применялся процесс Эйткена [12]. Вычисления проводились на сетках с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, где величина $h = \max(h_r, h_\varphi) \equiv h_\varphi$.

Для оценки эффективного порядка точности аппроксимации p применялась следующая формула:

$$p = \log_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad (3.9)$$

где λ_k — рассчитанные критические значения λ_1^1 для сеток с фиксированным числом узлов по радиальной координате и разными шагами по азимутальной координате $h_k = 2\pi/(kN_\varphi)$, $k = 1, \dots, 3$.

Приведенные в табл. 2 значения вычисленных p показывают сохранение второго порядка аппроксимации для предложенной дискретизации с размещением в центре круговой области узла, в котором задается азимутальная скорость и тепловой поток по радиальной координате.

На рис. 2а построены графики зависимости вычисленного числа Рэлея λ_{cr} от количества узлов по азимутальной координате λ_{cr} для трех сеток по радиальной координате ($N_r = 16, 24, 36$). Аналогично при фиксированном числе узлов по азимутальной координате ($N_\varphi = 16, 24, 36$) были построены графики зависимости $\lambda_{cr}(N_\varphi)$ (рис. 2б).

Из рис. 2 видно, что сходимость для λ_{cr} наблюдается при достаточно детальных разбиениях, причем дискретизация по азимутальной координате требует большего количества узлов.

Заключение

Для уравнений конвекции Дарси в полярных координатах и сеток со смещёнными узлами предложены специальные разностные аппроксимации системы с функцией тока и температурой. Построенные конечно-разностные схемы сохраняют косимметрию исходной задачи и дискретную симметрию по азимутальной координате. Для линейного по высоте профиля температуры проведены вычисления критических значений чисел Рэлея и дано сопоставление с критическими числами для близких квадратных областей. Изучена численная сходимость при росте числа узлов и найдены величины эффективного порядка точности на основе процесса Эйткена.

Развитые численные схемы будут применены для изучения сценариев конвективных переходов и проведения эксперимента по вычислению стационарных и колебательных режимов.

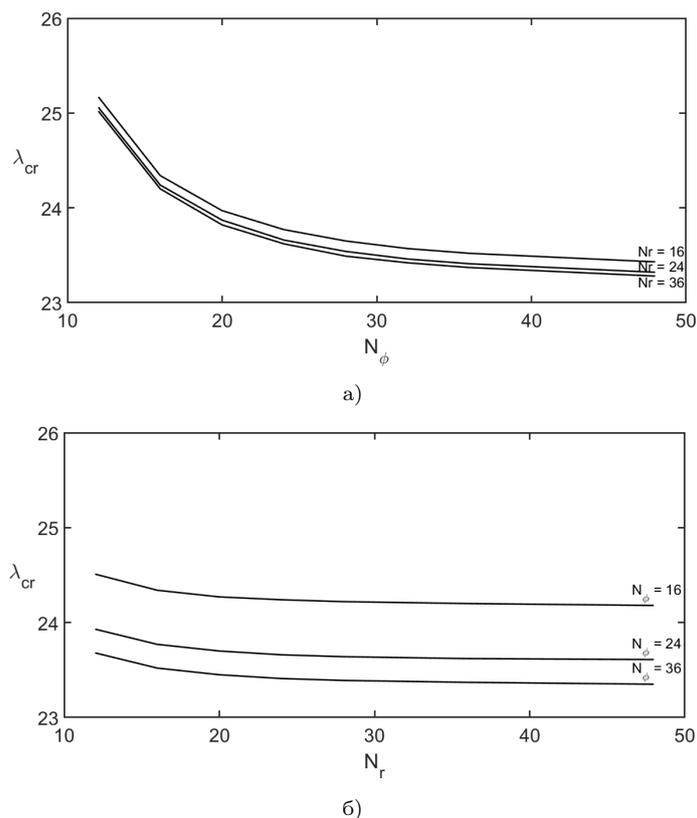


Рис. 2. Графики зависимости критических значений чисел Рэлея от количества узлов: а) $\lambda_{cr}(N_\phi)$ при различных N_r ; б) $\lambda_{cr}(N_\phi)$ при различных N_ϕ

Fig. 2. Graphs of the dependence of critical values of Rayleigh numbers on the number of nodes: а) $\lambda_{cr}(N_\phi)$ for different N_r ; б) $\lambda_{cr}(N_\phi)$ for different N_ϕ

Литература [References]

1. Гершуни, Г.З., Жуховицкий, Е.М., Непомнящий, А.А., *Устойчивость конвективных течений*. Москва, Наука, 1989. [Gershuni, G.Z., Zhukhovitsky, E.M., Nepomnyashchy, A.A., *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy = Stability of convective currents*. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]
2. Nield, D.A., Bejan, A., *Convection in Porous Media*. Springer, 2017. DOI: [10.1007/978-3-319-49562-0](https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0)
3. Трофимова, А.В., Цибулин В.Г., Конвективные движения в пористом кольцевом секторе. *Прикладная механика и техническая физика*, 2011, т. 52, № 3, с. 116–125. [Trofimova, A.V., Tsybulin V.G., Convective motions in a porous ring sector. *Applied mechanics and technical physics*, 2011, vol. 52, no. 3, pp. 427–435. DOI: [10.1134/S0021894411030138](https://doi.org/10.1134/S0021894411030138)]
4. Karasözen, B., Trofimova, A.V., Tsybulin, V.G., Natural convection in porous annular domains: Mimetic scheme and family of steady states. *Journal of Computational Physics*, 2012, vol. 231, iss. 7, pp. 2995–3005. DOI: [10.1016/j.jcp.2012.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.01.004)
5. Трофимова, А.В., Цибулин В.Г., Фильтрационная конвекция в кольцевой области и ответвление семейства стационарных режимов. *Механика жидкости и газа*, 2014, № 4, с. 73–83. [Trofimova, A.V., Tsybulin V.G., Filtration convection in an annular domain and branching of a family of steady-state regimes. *Fluid dynamics*, 2014, no. 4, pp. 481–490. DOI: [10.1134/S0015462814040085](https://doi.org/10.1134/S0015462814040085)]
6. Govorukhin, V.N., Sumbatyan, M.A., Tsybulin, V.G., Multistability of convective flows in a porous enclosure. *Advanced Structured Materials*, 2023, vol. 170, pp. 305–320. DOI: [10.1007/978-3-031-26186-2_19](https://doi.org/10.1007/978-3-031-26186-2_19)
7. Любимов, Д.В., О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу. *Прикладная механика и техническая физика*, 1975, № 2, с. 131–137. [Lyubimov, D.V., On convective movements in a porous medium heated from below. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied*

- mechanics and technical physics*, 1975, no. 2, pp. 131–137. (in Russian)]
8. Юдович, В.И., Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции. *Мат. заметки*, 1991, т. 49, вып. 5, с. 142–148. [Yudovich, V.I., Cosymmetry, degeneracy of the solutions of operator equations, the emergence of filtration convection. *Matematicheskie zametki = Math Notes*, 1991, vol. 49, no. 5, pp. 540–545. (in Russian)]
 9. Yudovich, V.I., Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos*, 1995, vol. 5, no. 2, pp. 402–411. DOI: [10.1063/1.166110](https://doi.org/10.1063/1.166110)
 10. Хрусталеv, Б.М., Несенчук, А.П., *Тепло- и массообмен*. Минск, БНТУ, ч. 1, 2007. [Khrustalev, B.M., Nesenchuk, A.P., *Тепло- и массообмен = Heat and mass transfer*. Minsk, BNTU, pt. 1, 2007. (in Russian)]
 11. Андреев, В.К., Гапоненко, Ю.А., *Современные математические модели конвекции*. Москва, Физматлит, 2008. [Andreev, V.K., Gaponenko, Y.A., *Sovremennye matematicheskie modeli konveksii = Modern mathematical models of convection*. Moscow, Fizmatlit, 2008. (in Russian)]
 12. Калиткин, Н.Н., *Численные методы*. Москва, Наука, 1978. [Kalitkin, N.N., *Chislennyye metody = Numerical methods*. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
 13. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1989. [Samarsky, A.A., *Teoriya raznostnykh skhem = Theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]