УДК 615.035.4 EDN: KQGGWU DOI: 10.31429/vestnik-20-4-45-52

Аналитические решения тестовой задачи ветровых течений экмановского типа

В. С. Кочергин[1✉], **С. В. Кочергин**[1], **С. Н. Скляр**[2]

[1] Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия
[2] Американский Университет в Центральной Азии (AUCA), ул. Аалы Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизстан

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе представлены аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений при различном ветровом воздействии, полученные авторами в серии работ, посвященных данной тематике. В данной работе расчетные формулы для поиска аналитических решений собраны воедино для удобного их применения. Полученные выражения для различных компонент скорости использованы авторами при тестировании и анализе разностных схем и алгоритмов, применяемых при построении гидродинамических моделей динамики водоемов.

Ключевые слова: безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение, функция тока, интегральная скорость.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н. Аналитические решения тестовой задачи ветровых течений экмановского типа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 4. С. 45–52. EDN: KQGGWU. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-45-52

Поступила 14 декабря 2023 г. После доработки 25 декабря 2023 г. Принято 26 декабря 2023 г. Публикация 31 декабря 2023 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Analytical Solution of the Test Problem of Ekman-type Wind Currents

V. S. Kochergin[1✉], **S. V. Kochergin**[1], **S. N. Sklyar**[2]

[1] Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia
[2] American University of Central Asia, Aaly Tokombaev str., 7/6, Bishkek, 720060, Kirgizstan

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. In this paper, we consider a three-dimensional model of wind currents in a reservoir using a system of complete nonlinear equations of hydrothermodynamics written in traditional approximations. The analysis is carried out for the model in a dimensionless form with the exclusion of advective and diffusion terms from the system of equations. The problem is considered in a rectangular area with the assignment of the tangential stress of wind friction in a special way, which makes it possible to investigate complex wind situations. Under the above constraints, analytical exact solutions were found for the barotropic and “additional”, as well as the vertical velocity component for the wind flow model. A solution is presented with constant wind exposure. In addition, in this work, the components of the shear stress of wind friction are set in accordance with a special law that allows us to describe rather complex wind situations, and an analytical solution of the stationary and non-stationary problem is obtained.

Keywords: dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution, current function, integral velocity.

Funding. The work was carried out according to the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 “Complex interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal Research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Sklyar, S. N., Analytical solution of the test problem of Ekman-type wind currents. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 45–52. DOI: 10.31429/vestnik-20-4-45-52

Received 14 December 2023. Revised 25 December 2023. Accepted 26 December 2023. Published 31 December 2023.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

Численное моделирование динамики океана [1] при решении различных проблем, связанных с экологическим мониторингом, имеет большое значение. Развитие вычислительной техники позволило существенно продвинуться в данном направлении, особенно за счет увеличения дискретизации решаемых задач. Однако исследования, связанные с построением самих моделей, методами их численного решения, также развиваются довольно успешно. Совместное применение современной вычислительной техники, новых вычислительных схем и алгоритмов приводит к положительному эффекту при интегрировании таких моделей. При выборе той или иной модели, описывающей динамику океана, обычно сравнивают результаты, полученные по одним моделям с другими результатами и известными представлениями о динамических процессах для данной акватории. Наличие аналитического решения задачи дает возможность осуществлять обоснованный выбор схем и алгоритмов для численной реализации модели. Из-за сложности моделей динамики океана существуют аналитические решения для самых простых постановок, например, модель Стоммела [2–4]. В [5–7] такая задача реализуется при помощи метода обращения динамического оператора [5] для исследования применяемых вычислительных схем специального вида для вычисления полей скорости. В данной работе рассматривается модель, учитывающая переменность скорости по всем трем направлениям, что позволит анализировать точность вычисления не только ее горизонтальных компонент, но и вертикальной составляющей. Кроме этого, получены аналитические решения при задании ветрового воздействия достаточно сложной конфигурации, произведен анализ используемых разностных схем и представлены аппроксимации для вычисления производных от функции тока при вычислении горизонтальных компонент поля скорости. Рассмотрим задачу в безразмерном виде.

1. Задача в безразмерном виде

В рассматриваемой задаче [8] поверхность водоема в плоскости $x0y$ имеет форму прямоугольника
$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]\,,$$
где $H > 0$ — его глубина. Оси системы координат направлены следующим образом: $0x$ — на восток, $0y$ — на север, $0z$ — вертикально вниз. В области $\Omega = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in \Omega, 0 \leqslant z \leqslant H\}$, рассмотрим задачу Экмановского типа в безразмерной форме
$$\begin{cases} -\ell v = -\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \ell u = -\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad t > 0, \quad (x, y, z) \in \Omega^0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$
с граничными условиями
$$\left\{t > 0,\ z = 0,\ (x, y) \in \Omega_0^0\right\}:\ k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \tag{1.2}$$

$$\left\{t>0,\ z=H,\ (x,y)\in\Omega_0^0\right\}:\ k\frac{\partial u}{\partial z}=-\tau_x^b,\quad ,k\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y^b,\quad w=0; \tag{1.3}$$

$$\{t>0,\ 0\leqslant z\leqslant H,\ (x,y)\in\partial\Omega_0\}:\ Un_x+Vn_y=0. \tag{1.4}$$

В (1.4) интегральные скорости вводятся следующим образом:

$$U(t,x,y)=\int\limits_0^H u(t,x,y,z)dz,\quad V(t,x,y)=\int\limits_0^H v(t,x,y,z)dz,$$

а в (1.3) параметризации придонного трения задается следующим образом:

$$\tau_x^b=\mu U,\quad \tau_y^b=\mu V,\quad \mu\equiv\mathrm{const}>0. \tag{1.5}$$

Пусть в соответствии с моделью Стоммела имеем

$$\ell=\ell_0+\beta y,\quad k\equiv\mathrm{const}; \tag{1.6}$$

$$\tau_x=\frac{Fq}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right),\quad \tau_y=0.$$

Горизонтальные компоненты скорости ищем в виде

$$u=UH^{-1}+\hat{u},\quad v=VH^{-1}+\hat{v}, \tag{1.7}$$

где первые слагаемые называются баротропными, а вторые назовем добавочными составляющими скорости.

2. Аналитическое решение. Баротропные составляющие

Каждое уравнение системы (1.1)–(1.6) проинтегрируем по переменной z в пределах от 0 до H с учетом граничных условий. В результате такого интегрирования получаем задачу для интегральных скоростей. Исключим градиенты давления с использованием перекрестного дифференцирования, вводя функцию тока $\Psi(x,y)$ по формулам

$$U=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad V=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Тогда для функции тока получим следующую постановку:

$$\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)+\beta\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}=-F\sin\left(\dfrac{\pi y}{q}\right),\quad (x,y)\in\Omega_0^0,\\ \Psi=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_0;\end{cases} \tag{2.1}$$

В итоге интегральные скорости определяются по формулам

$$\begin{gathered}U(x,y)=-\frac{F}{\mu(\pi/q)}\left(C_1e^{Ax}+C_2e^{Bx}-1\right)\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right),\\ V(x,y)=\frac{F}{\mu(\pi/q)^2}\left(C_1Ae^{Ax}+C_2Be^{Bx}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{q}\right),\\ C_1=\frac{1-e^{Br}}{e^{Ar}-e^{Br}},\quad C_1+C_2=1,\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$A=-\frac{\beta}{2\mu}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{\pi}{q}\right)^2};\quad B=-\frac{\beta}{2\mu}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}. \tag{2.3}$$

3. Аналитическое решение. Добавочные составляющие

В работе [8] получены расчетные формулы для добавочных переменных по всем трем направлениям скоростей

$$\hat{u} = \frac{\mu V}{\ell H} + \frac{\eta}{\ell C(H)} \left\{ -\frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right) [Sc(H-z) - Cs(H-z)] - \right.$$

$$\left. - \mu (U+V)\, Cs(z) + \mu (U-V)\, Sc(z) \right\},$$

$$\hat{v} = -\frac{\mu U - \frac{Fq}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right)}{\ell H} + \frac{\eta}{\ell C(H)} \left\{ -\frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right) [Sc(H-z) + Cs(H-z)] + \right.$$

$$\left. + \mu (U-V)\, Cs(z) + \mu (U+V)\, Sc(z) \right\}, \quad (3.1)$$

$$Cs(z) = \cos(H-z)\eta \operatorname{sh}(H+z)\eta + \cos(H+z)\eta \operatorname{sh}(H-z)\eta,$$
$$Sc(z) = \sin(H-z)\eta \operatorname{ch}(H+z)\eta + \sin(H+z)\eta \operatorname{ch}(H-z)\eta,$$
$$C(z) = \cos(H-z)\eta \operatorname{ch}(H+z)\eta - \cos(H+z)\eta \operatorname{ch}(H-z)\eta,$$
$$S(z) = \sin(H-z)\eta \operatorname{sh}(H+z)\eta - \sin(H+z)\eta \operatorname{sh}(H-z)\eta,$$
$$\eta = \sqrt{\frac{\ell}{2k}},$$
$$L(z) = \frac{C(z)}{C(H)} - \frac{z}{H}, \quad M(z) = \frac{S(z)}{C(H)}.$$

4. Аналитическое решение. Вертикальная компонента вектора скорости.

Вертикальную компоненту «w» вектора скорости определяем из уравнения неразрывности, для этого проинтегрируем уравнение неразрывности по переменной «z» от 0 до z, учитывая краевое условие (1.2) и уравнение неразрывности для интегральных скоростей

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

можно получить

$$w(z) = D + C, \quad (4.1)$$

$$D = \left[\frac{F}{\ell}\sin\left(\frac{\pi y}{q}\right) + \frac{\beta q F}{\pi \ell^2}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right)\right] L(H-z) +$$

$$+ \left[\frac{\beta\mu}{\ell^2} U - \frac{\beta V - F\sin(\pi y/q)}{\ell}\right] L(z) + \frac{\beta\mu}{\ell^2} V M(z). \quad (4.2)$$

Для удобства вычисления величины B, введем следующие функции:

$$P(z) = (H+z)\left[\cos(H-z)\eta \operatorname{sh}(H+z)\eta + \sin(H+z)\eta \operatorname{ch}(H-z)\eta\right],$$
$$Q(z) = (H+z)\left[\sin(H-z)\eta \operatorname{ch}(H+z)\eta - \cos(H+z)\eta \operatorname{sh}(H-z)\eta\right];$$
$$CY(z) = \frac{\beta}{4k\eta C(H)}\left[P(z) - P(-z)\right], \quad SY(z) = \frac{\beta}{4k\eta C(H)}\left[Q(z) - Q(-z)\right].$$

Тогда окончательно:

$$C = -\frac{Fq}{\pi\ell}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right)\left\{CY(H-z) - CY(H)\left[L(H-z) + \frac{H-z}{H}\right]\right\} -$$

$$- \frac{\mu U}{\ell}\left\{CY(z) - CY(H)\left[L(z) + \frac{z}{H}\right]\right\} - \frac{\mu V}{\ell}\left[SY(z) - CY(H)\, M(z)\right]. \quad (4.3)$$

5. Постоянный ветер

В работе [9] получено аналитическое решение при $\tau_x = \text{const}$, $\tau_y = \text{const}$. В данной постановке интегральные скорости тождественно равны нулю $U \equiv V \equiv 0$. Следовательно горизонтальные составляющие u, v совпадают с составляющими $\hat{u}$, $\hat{v}$. Кроме того, в силу (1.5)

$$\tau_x^b = \tau_y^b = 0. \tag{5.1}$$

С учетом краевых условий на поверхности и дне получено

$$\begin{aligned} u = \hat{u} = -\frac{\tau_y}{\ell H} + \frac{\eta}{\ell C\,(H)}[(\tau_y + \tau_x)Cs\,(H-z) + (\tau_y - \tau_x)Sc\,(H-z)], \\ v = \hat{v} = \frac{\tau_x}{\ell H} + \frac{\eta}{\ell C\,(H)}[(\tau_y - \tau_x)Cs\,(H-z) - (\tau_y + \tau_x)Sc\,(H-z)]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Вертикальная компонента вектора скорости при постоянном ветре

Вертикальную компоненту «w» вектора скорости определяем из уравнения неразрывности. Для этого проинтегрируем уравнение неразрывности по переменной z от 0 до z, учитывая краевое условие (1.2). Имеем

$$\begin{aligned} w\,(z) = \frac{\beta}{\ell^2}[\tau_x L(H-z) + \tau_y M(H-z)] - \frac{\tau_x}{\ell}\left\{CY\,(H-z) - CY\,(H)\left[L\,(H-z) + \frac{H-z}{H}\right]\right\} - \\ - \frac{\tau_y}{\ell}\left[SY\,(H-z) - CY\,(H)\,M\,(H-z)\right]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

7. Неоднородный по пространству ветер

В работе [10] получено аналитическое решение при переменном по пространству форсинге достаточно сложного вида.

Компоненты ветрового воздействия зададим в следующем виде:

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y). \end{cases} \tag{7.1}$$

Здесь приняты обозначения

$$r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q};$$

$$l, s = 0, 1, 2, \ldots; \quad m, p = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных (F_1, F_2, G_1, G_2) и четыре целых (l, m, s, p) числовых параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Например, при $F_1 = Fq/\pi$, $F_2 = G_1 = G_2 = 0$, $l = 0$, $m = 1$ имеем

$$\tau_x = \frac{Fq}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \tag{7.2}$$

а при

$$F_1 = \frac{Fq}{\pi}, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -\frac{Fq}{\pi}, \quad G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1 \tag{7.3}$$

имеем циклон над акваторией.

8. Основные формулы для стационарной модели

Выпишем все необходимые для программирования формулы. Пусть решение задачи для функции тока имеет вид

$$\Psi(x,y) = \Psi_1(x,y) + \Psi_2(x,y),$$

где

$$\Psi_1(x,y) = \left[C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)\right] \sin\left(q_m y\right),$$

$$D_1 = \frac{\mu(r_l^2+q_m^2)F_1 + \beta r_l F_2}{\mu^2(r_l^2+q_m^2)^2+\beta^2 r_l^2} q_m, \quad D_2 = \frac{\mu(r_l^2+q_m^2)F_2 - \beta r_l F_1}{\mu^2(r_l^2+q_m^2)^2+\beta^2 r_l^2} q_m.$$

Тогда

$$C_1 = D_1 \frac{e^{Br} - (-1)^l}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_2 = D_1 \frac{(-1)^l - e^{Ar}}{e^{Ar} - e^{Br}},$$

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}, \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}.$$

Аналогично для второй составляющей решения имеем

$$\Psi_2(x,y) = \left[\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)\right] \sin(q_p y),$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\beta r_s G_1 - \mu(r_s^2+q_p^2)G_2}{\mu^2(r_s^2+q_p^2)^2+\beta^2 r_s^2} r_s, \quad \bar{D}_2 = \frac{\mu(r_s^2+q_p^2)G_1 + \beta r_s G_2}{\mu^2(r_s^2+q_p^2)^2+\beta^2 r_s^2} r_s,$$

$$\bar{C}_1 = \bar{D}_1 \frac{e^{\bar{B}r} - (-1)^s}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}, \quad \bar{C}_2 = \bar{D}_1 \frac{(-1)^s - e^{\bar{A}r}}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}$$

$$\bar{A} = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}, \quad \bar{B} = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} U\left(x,y\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\Psi_1(x,y)+\Psi_2(x,y)\right] = \\ &= q_m \left[C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)\right] \cos\left(q_m y\right) + \\ &+ q_p \left[\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)\right] \cos(q_p y); \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} V(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi_1(x,y)+\Psi_2(x,y)\right] = \\ &= -\left[AC_1 e^{Ax} + BC_2 e^{Bx} - r_l D_1 \cdot \sin(r_l x) + r_l D_2 \cos(r_l x)\right] \sin\left(q_m y\right) - \\ &- \left[\bar{A}\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{B}\bar{C}_2 e^{\bar{B}x} - r_s \bar{D}_1 \sin(r_s x) + r_s \bar{D}_2 \cos(r_s x)\right] \sin(q_p y). \end{aligned} \tag{8.2}$$

9. Эволюционная модель

В работе [11] построено решение для эволюционной модели. Множество решений эволюционной задачи

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,t) &= \Psi(x,y) + \Phi_0(x,y,t) = \\ &= \Psi(x,y) + \sin\left(r_k x\right) \sin\left(q_n y\right) e^{-\mu t} \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] \end{aligned} \tag{9.1}$$

Выбор конкретного решения из множества (9.1) определяется выбором параметров S_1, S_2, k, n. Интегральные скорости находим по формулам

$$U(x,y,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + q_n \sin(r_k x) \cos(q_n y) \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] e^{-\mu t}, \quad (9.2)$$

$$V(x,y,t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - r_k \cos(r_k x) \sin(q_n y) \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] e^{-\mu t} -$$
$$- \alpha_k^n \sin(r_k x) \sin(q_n y) \left[S_1 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) - S_2 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] e^{-\mu t}. \quad (9.3)$$

Напомним, что первые слагаемые в формулах (9.2) и (9.3) являются стационарными интегральными скоростями, их значения вычисляются по формулам (8.1) и (8.2), найденным в предыдущем разделе.

В работе [12] представлены численные методы решения поставленных задач, проанализированы различные разностные дискретизации [13–18] уравнения для функции тока. Показано, что достаточно хорошей точностью обладает схема Ильина [17]. В работе [19] на основе интегро-интерполяционного подхода представлена согласованная схема с основной задачей для аппроксимации производных от функции тока, что важно при вычислении компонент скорости особенно в области пограничных и внутренних слоев.

Заключение

Представлено аналитическое решение модели ветровой циркуляции для использования его в качестве тестового решения при анализе схем и алгоритмов при построении адекватных динамических моделей водоемов. Аналитические выражения для различных компонент поля скорости получены при ветровом воздействии различной конфигурации.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана*. Москва, Наука, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie cirkulyacii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation*. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
2. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, p. 202–206.
3. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description*. University of California Press, 1965.
4. Стоммел, Г., *Гольфстрим*. Москва, Иностранная литература, 1965. [Stommel, H., *Gol'fstrim = Gulf Stream*. Moscow, Inostrannaya literatura, 1965. (in Russian)]
5. Кочергин, В.П., Теория и методы океанических течений. Москва, Наука, 1978. [Kochergin, V.P., *Teoriya i metody okeanicheskih techenij = Theory and methods of ocean currents*. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
6. Еремеев, В.Н, Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, "Экоси-гидрофизика", 2001. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-sea basins*. Sevastopol', Ekosi-Gidrofizika, 2001. (in Russian)]
7. Kochergin, V.P., Dunets, T.V., Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
8. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*, 2019, № 2(20), с. 193–198. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Processy v geosredah = Processes in geomedia*, 2019, no. 2(20), pp. 193–198. (in Russian)]

9. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическое решение тестовой задачи ветровых течений при постоянном ветре. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 1, с. 32–35. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the test problem of wind currents with constant wind. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 1, pp. 32–35. (in Russian)] EDN: YQAXTP DOI: 10.31429/vestnik-18-1-32-35

10. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 16–25. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the equation for the stream function in a flow model with spatially variable wind action. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 16–25. (in Russian)] EDN: XAPDKT DOI: 10.31429/vestnik-19-1-16-25

11. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитические решения для нестационарной модели ветровых течений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 17–24. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solutions for an unsteady model of wind currents. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 17–24. (in Russian)] EDN: LOQDNL DOI: 10.31429/vestnik-19-3-17-24

12. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Тестирование разностных схем при решении уравнения для функции тока на основе решения задачи ветровых течений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 2, с. 53–61. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Testing difference schemes for solving the equation for the stream function based on solving the problem of wind currents. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 53–61. (in Russian)] EDN: EBWSAI DOI: 10.31429/vestnik-19-2-53-61

13. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980. [Roache, P.J., *Vychislitel'naya gidrodinamika = Computational fluid dynamics*. Moscow, Mir, 1980. (in Russian)]

14. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. Москва. Наука, 1983. [Samarskiy, A.A., *Teoriya raznostnyh skhem = Theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]

15. Булеев, Н.И., Тимухин, Г.И., О составлении разностных уравнений гидродинамики вязкой неоднородной среды. *Численные методы механики сплошной среды*, 1972, т. 3, № 4, с. 19–26. [Buleev, N.I., Timukhin, G.I., On the compilation of difference equations for the hydrodynamics of a viscous inhomogeneous medium. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy = Numerical methods of continuum mechanics*, 1972, vol. 3, no. 4, pp. 19–26. (in Russian)]

16. Булеев, Н.И., *Пространственная модель турбулентного обмена*. Москва, Наука, 1983. [Buleev, N.I., *Prostranstvennaya model' turbulentnogo obmena = Spatial model of turbulent exchange*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]

17. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)]

18. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. Москва, Мир, 1983. [Doolan, E.P., Miller, J.J.H., Schilders, W.H.A., *Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem = Uniform numerical methods for solving problems with a boundary layer*. Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]

19. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости. *Морской гидрофизический журнал*, 2023, т. 39, № 3(231), с. 299–313. DOI: 10.29039/0233-7584-2023-3-299-313 [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Calculation of the total flow components in the models of wind fluid motion. *Physical Oceanography*, 2023, vol. 30, iss. 3, pp. 274–287. DOI: 10.29039/1573-160X-2023-3-274-287]