

УДК 539.3

EDN: VYSEFT DOI: 10.31429/vestnik-21-1-57-69

## Двухэтапная вычислительная схема для моделирования возбуждения упругих колебаний в изотропном слое поверхностным пьезопреобразователем

М. В. Варелджан  

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Варелджан Михаил Владимирович; ORCID 0009-0009-5325-3232; SPIN 6017-0773;

e-mail: [michael.vareldzhan.777@mail.ru](mailto:michael.vareldzhan.777@mail.ru)

*Аннотация.* Рассматривается задача о возбуждении ультразвуковых колебаний пьезоактуатором в изотропном упругом слое. Его динамическое поведение описывается с использованием полуаналитического интегрального подхода, в рамках которого воздействие пьезопреобразователя на волновод учитывается через неизвестную вектор-функцию контактных напряжений. Для ее определения предлагается двухэтапная вычислительная схема, в которой на первом этапе динамическая пространственная контактная задача решается с помощью метода конечных элементов (МКЭ), и из полученного МКЭ-решения берутся смещения в области, совпадающей по форме с областью контакта, но взятой на противоположной стороне волновода. На втором этапе искомые контактные напряжения находятся из решения системы граничных интегральных уравнений, в которых найденные с помощью МКЭ смещения входят в правую часть. Для верификации предложенного подхода приводится сопоставление получаемых на его основе результатов с МКЭ-решениями, а также с экспериментальными данными. *Ключевые слова:* пьезоактуатор, изотропный упругий слой, метод конечных элементов, интегральный подход, бегущие упругие волны.

*Финансирование.* Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FZEN-2020-0017).

*Цитирование:* Варелджан М. В. Двухэтапная вычислительная схема для моделирования возбуждения упругих колебаний в изотропном слое поверхностным пьезопреобразователем // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 1. С. 57–69. EDN: VYSEFT. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-57-69

Поступила 26 декабря 2023 г. После доработки 7 февраля 2024 г. Принято 22 февраля 2024 г. Публикация 26 марта 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Two-step Computational Scheme for Modeling the Excitation of Elastic Waves by an Ultrasonic Piezoelectric Transducer

M. V. Vareldzhan 

Kuban State University, Stavropolskaya st., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Mikhail V. Vareldzhan; ORCID 0009-0009-5325-3232; e-mail: [michael.vareldzhan.777@mail.ru](mailto:michael.vareldzhan.777@mail.ru)

*Abstract.* The problem of excitation of ultrasonic vibrations by a piezoactuator in an isotropic elastic layer is considered. Its dynamic behavior is described using a semi-analytical integral approach, in which the effect of a piezoelectric transducer on a waveguide is taken into account through an unknown vector function of contact stresses. To determine it, a two-stage computational scheme is proposed, in which, at the first stage, the dynamic spatial contact problem is solved using the finite element method (FEM), and displacements in an area coinciding in shape with the contact area, but taken on the opposite side of the waveguide, are taken from the resulting FEM solution. At the second stage, the required contact voltages are found from the solution of a system of boundary integral equations in which the displacements found using FEM are included in the right part. To verify the proposed approach, the results obtained on its basis are compared with FEM solutions, as well as with experimental data.

*Keywords:* piezoactuator, isotropic elastic layer, finite element method, integral approach, elastic guided waves.

*Funding.* The work has been supported by the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FZEN-2020-0017).

Cite as: Vareldzhan, M. V., Two-step computational scheme for modeling the excitation of elastic waves by an ultrasonic piezoelectric transducer. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 57–69. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-57-69

Received 26 December 2023. Revised 7 February 2024. Accepted 22 February 2024. Published 26 March 2024.

The author declares no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

Пьезоактивные преобразователи, которые устанавливаются на поверхность инженерного объекта для возбуждения в нем упругих колебаний, являются ключевыми компонентами систем неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций на основе бегущих упругих волн [1, 2]. Наличие адекватных и эффективных с вычислительной точки зрения компьютерных моделей, описывающих волновые процессы в системе «пьезоактуатор – упругий слой», необходимо на этапе проектирования таких диагностирующих систем, например, для оценки пьезопреобразователя конкретного типа как источника упругих колебаний или для оптимизации расположения элементов сенсорно-актуаторной сети, позволяющей контролировать максимальную площадь конструкции и ее труднодоступные участки.

В инженерной практике распространенным подходом к решению данной задачи является использование метода конечных элементов (МКЭ) и его модификаций. Однако применение МКЭ для моделирования волновой динамики протяженных трехмерных конструкций требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому актуальным является дальнейшее развитие альтернативных численных схем на основе полуаналитических методов [3, 4] или сочетания сеточной дискретизации с аналитическими представлениями для бегущих упругих волн [5–7], позволяющих сократить вычислительные затраты и эффективно проводить параметрический анализ соответствующих волновых процессов.

Для бегущих волн, возбуждаемых заданной поверхностной нагрузкой в упругом изотропном слое, имеются явные интегральные и асимптотические представления, получаемые в рамках полуаналитического интегрального подхода [8]. Вся информация об источнике колебаний входит в них через вектор-функцию контактных напряжений, поэтому, если она известна, то становится возможным быстрое определение амплитудно-частотных характеристик возбуждаемых волн и анализ распределения между ними волновой энергии, поступающей от источника.

В рамках интегрального подхода задача определения неизвестных контактных напряжений может быть сведена к интегральному уравнению Винера–Хопфа. При расчете колебаний пьезопреобразователя используется как МКЭ [7], так и приближенные модели в рамках теории пластин [9]. В то же время соответствующие компьютерные модели требуют либо самостоятельной программной реализации МКЭ-решения, либо их вычислительная эффективность ограничена случаем пленочных пьезоактуаторов круговой формы.

Для описания работы пьезоэлемента в качестве источника колебаний наименее затратными являются модели на основе эффективных граничных условий, в которых используются явные представления для контактных напряжений, приближенно учитывающие особенности динамического воздействия пьезоактуатора на волновод [3, 4]. Диапазон практической применимости таких упрощенных подходов ограничен низкими и средними частотами, а с ростом частоты колебаний отличие численных результатов от экспериментальных становится существенным.

В настоящей работе для определения амплитудных коэффициентов, входящих в явные асимптотические представления для возбуждаемых в упругом слое пьезоактуатором цилиндрических бегущих волн предлагается двухэтапная вычислительная схема. На первом этапе пространственная контактная задача о динамическом взаимодействии пьезопреобразователя с упругой подложкой решается с помощью МКЭ с тем, чтобы использовать найденные контактные напряжения в асимптотиках. Это позволяет учесть его собственную деформацию, а также влияние таких сопутствующих факторов, как наличие клеевой прослойки между пьезоэлементом и волноводом, сложной геометрии электродирования пьезоэлемента

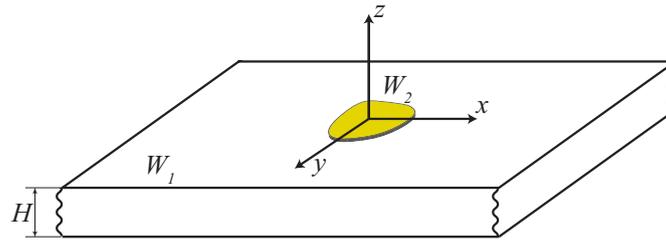


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometric representation of the problem

и т.п. на амплитудно-частотные характеристики возбуждаемых им упругих волн. Однако ввиду негладкости конечно-элементной аппроксимации напряжений в окрестности границ зоны контакта [10], их непосредственная подстановка в асимптотические представления дает неустойчивые результаты. Они стабилизируются, если контактные напряжения находятся из граничных интегральных уравнений (ГИУ), в которых найденные с помощью МКЭ смещения входят в правую часть, а ядро определяется матрицей Грина подложки. Для преобразователя произвольной в плане формы численное решение двумерных ГИУ строится с использованием метода коллокаций, причем в качестве правой части берутся смещения на противоположной стороне волновода.

Применение двухэтапной схемы для моделирования волновой динамики системы «пьеzoактуатор – упругий слой» иллюстрируется на решении задачи о возбуждении упругих колебаний в изотропном слое прямоугольным пьеzoэлементом. Наряду с численной и экспериментальной верификацией расчетных данных, получаемых с использованием предложенного подхода, приводятся результаты проведенного на его основе анализа влияния толщины и материала клеевой прослойки между пьеzoэлементом и упругим волноводом на закачиваемую в него энергию.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается упругий однородный изотропный слой, занимающий в декартовой системе координат  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  область  $W_1 : |x, y| < \infty, -H \leq z \leq 0$ . На его поверхности  $z = 0$  расположен пьеzoкерамический преобразователь, занимающий область  $W_2 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq h_p; \Omega = W_1 \cap W_2$  (рис. 1).

Динамическое поведение волновода в предположении возбуждения в нем пьеzoактуатором гармонических колебаний описывается уравнениями Ляме

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} + \mu\Delta \mathbf{u}^{(1)} + \rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{u}^{(1)} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{u}^{(1)} = \{u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}\} = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}\}$  – вектор-функция смещений точек волновода,  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме для материала слоя,  $\rho^{(1)}$  – его плотность;  $\omega = 2\pi f$  – безразмерная круговая частота,  $f$ , Гц – размерная частота.

Верхняя и нижняя границы волновода подразумеваются свободными от напряжений всюду, за исключением области приложения нагрузки – области контакта между пьеzoактуатором и упругим слоем:

$$\tau \Big|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad \tau \Big|_{z=-H} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z)$  – вектор напряжений,  $\mathbf{q}(x, y)$  неизвестная вектор-функция поверхностной нагрузки. Здесь и далее нижние индексы через запятую означают производную по соответствующей координате, а верхний индекс указывает на принадлежность к области  $W_1$  или  $W_2$  соответственно.

Динамика пьезокерамического преобразователя описывается уравнениями движения [11]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{l,jk}^{(2)} + e_{kij}\phi_{,jk} + \rho^{(2)}\omega^2 u_i^{(2)} &= 0, \\ e_{ikl}u_{k,li}^{(2)} - \varepsilon_{ik}\varphi_{,kl} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $C_{ijkl}$  — упругие постоянные для материала пьезопреобразователя,  $\phi$  — электрический потенциал,  $\varepsilon_{ik}$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости,  $e_{ikl}$  — компоненты тензора констант пьезоэлектрических напряжений. Боковые стороны преобразователя свободны от механических напряжений и электрических смещений  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial W_2 \setminus \{z = 0\}, \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial W_2 \setminus \{z = 0, z = h_p\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В области контакта между пьезоэлементом и упругим слоем задаются граничные условия непрерывности механических смещений и напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}|_{z=0} &= \mathbf{u}^{(2)}|_{z=0}, \\ \boldsymbol{\tau}^{(1)}|_{z=0} &= \boldsymbol{\tau}^{(2)}|_{z=0}, \end{aligned} \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.5)$$

Между свободной (верхней) и контактирующей с волноводом (нижней) поверхностями пьезопреобразователя задается разность электрических потенциалов  $V(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \phi|_{z=0} &= 0, \\ \phi|_{z=h_p} &= V(\omega), \end{aligned} \quad (x, y) \in W_2, \quad (1.6)$$

что приводит к возникновению механических деформаций вследствие обратного пьезоэффекта. Возникающие в таком случае механические напряжения в области контакта соответствуют функции  $\mathbf{q}(x, y)$  в граничных условиях (1.2), описывающей воздействие пьезопреобразователя на волновод. Замыкают постановку задачи условия излучения, в качестве которых используется принцип предельного поглощения [12].

## 2. Общая схема решения

Уравнения (1.1)–(1.6) образуют связную электромеханическую краевую задачу, явного аналитического решения которой не существует. Однако, поскольку пьезопреобразователь выступает лишь в роли источника колебаний и всё его воздействие на волновод описывается вектор-функцией  $\mathbf{q}$ , задача линейной динамической теории упругости (1.1)–(1.2) будет решаться с использованием полуналитического интегрального подхода, тогда как моделирование электромеханического поведения пьезоэлемента (1.3)–(1.6) будет осуществляться с помощью МКЭ. В таком случае ключевым вопросом становится построение алгоритма, который бы позволил связать оба полученных решения так, чтобы они вместе соответствовали решению исходной задачи (1.1)–(1.6).

### 2.1. Волновое поле в упругом слое

С использованием полуналитического интегрального подхода и техники интегрального преобразования Фурье вектор-функция смещений  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \omega)$  может быть представлена в следующем виде [13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta, z) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{K} = \mathcal{F}_{xy}[k(\mathbf{x})]$  и  $\mathbf{Q} = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{q}]$  — Фурье-символы (результаты применения преобразования Фурье  $\mathcal{F}$  по горизонтальным координатам  $x$  и  $y$ ) матрицы Грина  $\mathbf{k}(\mathbf{x})$  для свободного изотропного слоя и вектор-функции  $\mathbf{q}(x, y)$ . Через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  обозначены параметры преобразования Фурье,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — контуры интегрирования, проходящие вдоль вещественных осей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и отклоняющиеся от них в комплексную плоскость при обходе вещественных полюсов элементов матрицы  $\mathbf{K}$  в соответствии с принципом предельного поглощения. Алгоритм построения  $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z)$  в случае изотропного слоя приводится, например, в работе [14]. В дальней зоне с использованием асимптотик интеграла (2.1) можно получить явные аналитические представления для бегущих волн, возбуждаемых нагрузкой  $\mathbf{q}$  [15]:

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = \sum_n \frac{\mathbf{a}_n(\varphi, z) e^{i\zeta_n r}}{\sqrt{\zeta_n r}} + O((\zeta_n r)^{-3/2}), \quad \zeta_n r \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{a}_n = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \operatorname{res} \mathbf{K}(-\alpha, \varphi, z)|_{\alpha=\zeta_n} \mathbf{Q}_n, \quad \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(-\zeta_n, \varphi), \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \\ \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \leq \varphi, \quad \gamma < 2\pi,$$

$\zeta_n$  — вещественные и комплекснозначные волновые числа (полюса Фурье-символа матрицы Грина) нормальных мод.

Таким образом, из представлений (2.1)–(2.3) следует, что для построения функции  $\mathbf{u}$ , описывающей колебания среды с учетом воздействия на нее пьезоактуатора, необходимо предварительно определить вид соответствующей функции поверхностной нагрузки  $\mathbf{q}$ .

## 2.2. Двухэтапная схема построения вектор-функции поверхностной нагрузки

Для отыскания неизвестной вектор-функции  $\mathbf{q}$  можно воспользоваться подходом, предложенным в работах [16, 17] для случая плоской деформации или в предположении осевой симметрии. Сначала с использованием МКЭ решается задача о динамическом взаимодействии пьезопреобразователя и упругого слоя. При этом рассматривается ограниченная расчетная область, а для моделирования оттока энергии бегущих волн на бесконечность к ее боковым торцам присоединяются дополнительные конечные области прямоугольной формы с градиентно возрастающей вязкостью. Далее, из полученного МКЭ-решения на равномерной сетке извлекаются значения вектора контактных напряжений между пьезоактуатором с подложкой, которые используются для поточечной аппроксимации  $\mathbf{q}$ .

Сложность реализации такой схемы заключается в том, что контактные напряжения имеют корневую особенность при приближении к границам области контакта [18], а на самих же границах терпят разрыв. В таком случае средств программной реализации МКЭ может оказаться недостаточно для получения численно устойчивого решения. В то же время упругие смещения непрерывны при переходе через границу области контакта, хотя и демонстрируют относительно резкое изменение амплитуд из-за существенной разницы упругих свойств состыкованных материалов. На противоположной стороне волновода поверхностные объекты отсутствуют, а потому для смещений характерно гладкое поведение. В качестве иллюстрации на рис. 3 (графики а, б) приводятся получаемые с использованием МКЭ-пакета COMSOL Multiphysics 5.6 значения амплитуд вертикальной компоненты напряжений  $|\sigma_z|$  и смещений  $|u_z|$  в области контакта между прямоугольным пьезопреобразователем размерами  $10 \times 30 \times 0,2 \text{ мм}^3$ , изготовленного из пьезокерамики PIC151 [19], и упругим слоем из алюминия (модуль Юнга  $E = 70 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,33$ , плотность  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ) толщины  $H = 2 \text{ мм}$ , рассчитанные вдоль отрезков координатных осей (см. соответствующую схему). На графиках (в) на обоих рисунках приведены также значения  $|u_z|$ , рассчитанные вдоль тех же отрезков, но на противоположной стороне волновода  $z = -H$ , иллюстрирующие гладкое и

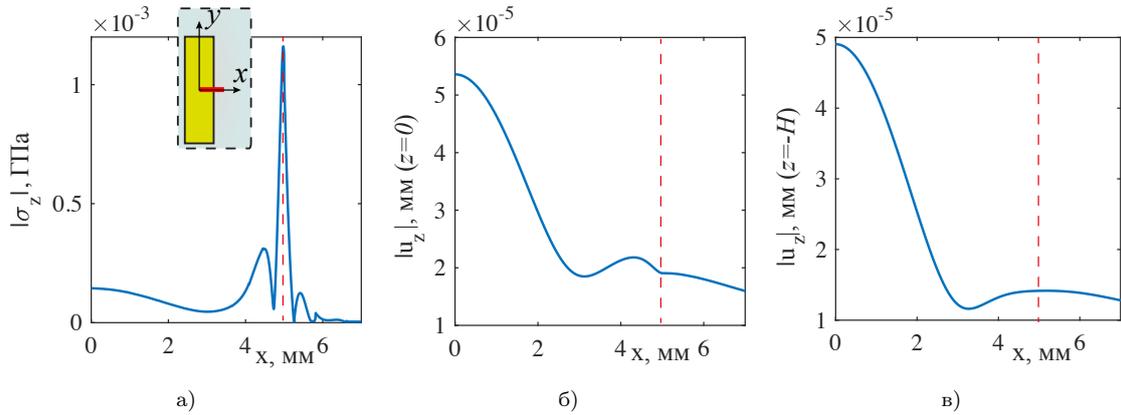


Рис. 2. Модули вертикальных напряжений (а) и смещений в области контакта (б) и на противоположной стороне волновода (в) вдоль оси  $Ox$  на частоте  $f = 200$  кГц; граница актуатора обозначена вертикальной пунктирной линией

Fig. 2. Modules of vertical stresses (a) and displacements in the contact area (б) and on the opposite side of the waveguide (в) along  $Ox$  axis at a frequency of  $f = 200$  kHz; the actuator boundary is indicated by a vertical dotted line

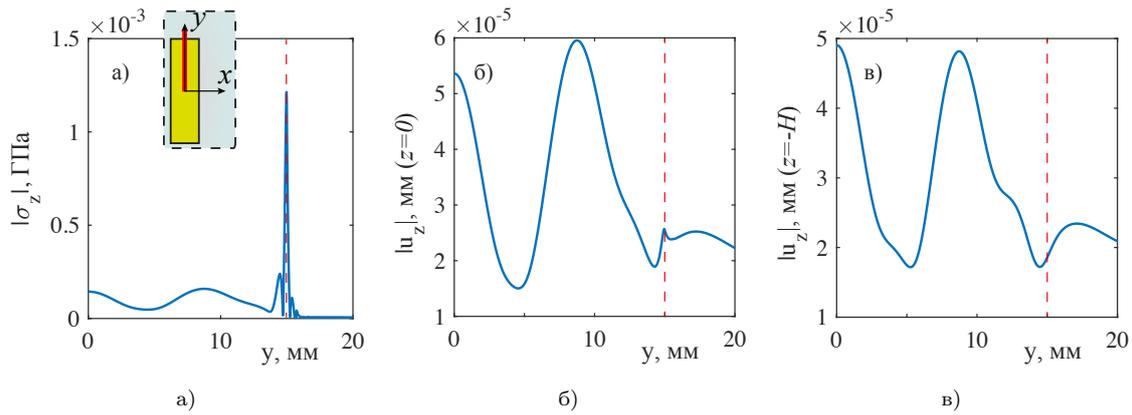


Рис. 3. Модули вертикальных напряжений (а) и смещений в области контакта (б) и на противоположной стороне волновода (в) вдоль оси  $Oy$  на частоте  $f = 200$  кГц; граница актуатора обозначена вертикальной пунктирной линией

Fig. 3. Modules of vertical stresses (a) and displacements in the contact area (б) and on the opposite side of the waveguide (в) along  $Oy$  axis at a frequency of  $f = 200$  kHz; the actuator boundary is indicated by a vertical dotted line

непрерывное подведение амплитуд смещений. Для моделирования бесконечно-протяженной по горизонтальным координатам упругой подложки использовались идеально согласованные слои (PML — Perfectly Matched Layer).

Таким образом, предлагается модифицировать описанный выше алгоритм, извлекая из МКЭ-решения не контактные напряжения, а смещения, причем в области на нижней поверхности волновода  $z = -H$ , соответствующей области контакта. Поиск вектор-функции  $\mathbf{q}(x, y)$  осуществляется аналогично случаю решения контактной задачи — перемещения, получаемые в области  $\{\mathbf{x} : (x, y) \in \Omega, z = -H\}$  с использованием интегрального представления (2.1), приравняются к смещениям  $\mathbf{u}^{\mathbf{F}}(x, y, z = -H)$ , рассчитанным на основе МКЭ:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, -H) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \mathbf{u}^{\mathbf{F}}(x, y, -H). \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) с учетом гладкости матрицы Грина  $\mathbf{k}(x, y, z)$  при  $z = -H$  является интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Для его решения вектор-функция  $\mathbf{q}(x, y)$  ищется в виде разложения по полной в  $L_2(\Omega)$  системе функций  $\varphi_k(x, y)$

$$\mathbf{q}(x, y) \approx \mathbf{q}_a(x, y) = \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{c}_k \varphi_k(x, y) \quad (2.5)$$

с неизвестными коэффициентами  $\mathbf{c}_k$ . В случае произвольной в плане формы области  $\Omega$  в качестве  $\varphi_k(x, y)$  можно рассматривать, например, финитные «шапочки» [20]

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{r_k}{h_k} \right)^2 \right), & r_k < h_k, \\ 0, & r_k > h_k, \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $r_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$ ,  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$  и  $h_k$  — координаты центра и радиус носителя каждой  $\varphi_k(x, y)$  соответственно. В предельном случае при  $h_k \rightarrow 0$  функции  $\varphi_k(x, y)$  вырождаются в точечные источники  $\varphi_k(x, y) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ .

Неизвестные коэффициенты  $\mathbf{c}_k$  можно определить, используя, например, метод коллокаций. В этом случае равенство (2.4) рассматривается на наборе точек  $\mathbf{x}_l = (x_l, y_l, -H)$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_k$ , что приводит к системе линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}$ . Элементы матрицы  $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_{kl}\}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, N$ , представляющие собой блоки размера  $3 \times 3$ , определяются по следующей формуле:

$$\mathbf{a}_{kl} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, -H) \Phi_k(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_l + \alpha_2 y_l)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2.7)$$

где  $\Phi_k(\alpha_1, \alpha_2)$  — Фурье-символ базисной функции из разложения (2.5), а компоненты вектора правой части системы  $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , берутся из МКЭ-решения:  $\mathbf{f}_i = \mathbf{u}_F(\mathbf{x}_l)$ .

Для упрощения вычисления двойного интеграла (2.7) по бесконечным контурам с учетом осесимметричности базисных функций (2.6) можно перейти к полярной и цилиндрической системам координат по  $(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $(x, y, z)$  соответственно. В таком случае он сводится к интегралу по полубесконечному контуру вида

$$\mathbf{a}_{kl} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K} \left( i \frac{\partial}{\partial x}, i \frac{\partial}{\partial y}, \alpha, -H \right) \Phi_k(\alpha h_k) J_0(\alpha r_{kl}) \alpha d\alpha, \quad (2.8)$$

где  $r_{kl} = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|$ ,  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка, контур интегрирования  $\Gamma$  идет вдоль положительной части вещественной оси, отклоняясь о нее вниз или вверх для обхода вещественных полюсов Фурье-символа матрицы Грина в соответствии с принципом предельного поглощения. В случае базисных функций вида (2.6) [20]

$$\Phi_k(\alpha h_k) = 8 \frac{J_2(\alpha h_k)}{(\alpha h_k)^2},$$

а для точечных источников  $\Phi_k \equiv 1$ .

### 3. Верификация полученных результатов

Для проверки корректности работы предложенной двухэтапной вычислительной схемы проводилось сопоставление получаемых на ее основе результатов с МКЭ-расчетами. В качестве тестовой задачи рассматривалось моделирование возбуждения колебаний прямоугольным пьезоэлементом в упругом слое из алюминия (параметры пьезоэлемента и упругого волновода такие же, как приведенные ранее в разделе 2).

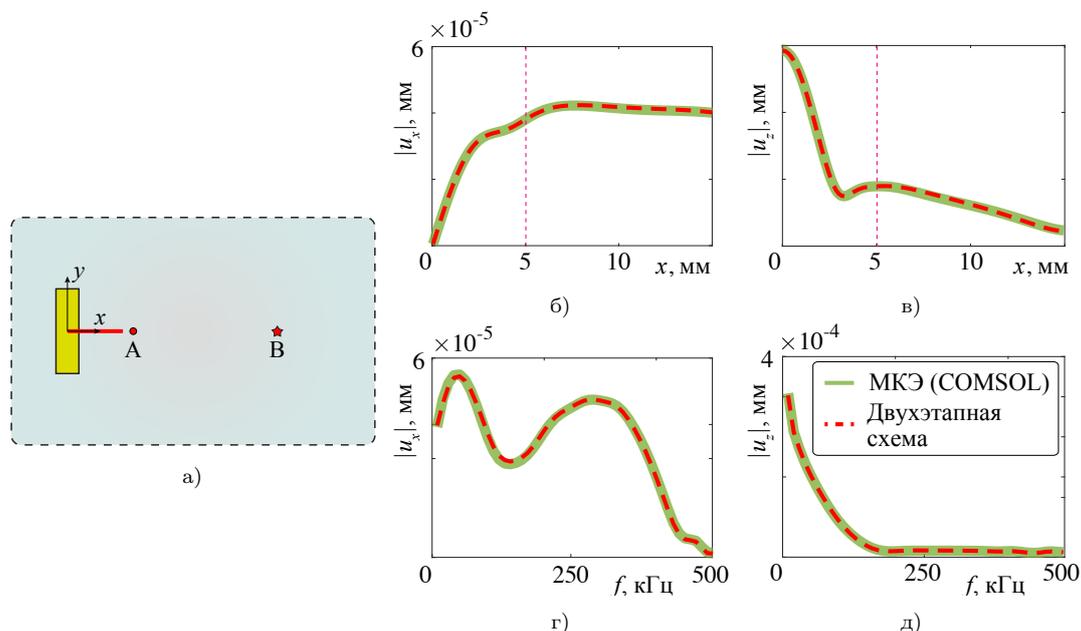


Рис. 4. Сопоставление амплитуд компонент упругих смещений на нижней поверхности волновода (а); б) и в) — вдоль оси  $Ox$  на частоте  $f = 200$  кГц; г) и д) — в точке А в зависимости от частоты колебаний

Fig. 4. Comparison of the amplitudes of the elastic displacement components on the lower surface of the waveguide (a); б) and в) — along the  $Ox$  axis at a frequency  $f = 200$  kHz; г) and д) — at point A depending on the oscillation frequency

На рис. 4 приводятся полученные с использованием разработанного подхода и МКЭ графики зависимостей амплитуд горизонтальной  $|u_x|$  и вертикальной  $|u_z|$  компонент вектора смещений на поверхности  $z = -H$  от горизонтальной координаты при постоянной частоте колебаний  $f = 200$  кГц (графики б, в) и в фиксированной точке  $A(20, 0, -H)$  в зависимости от частоты колебаний (г, д). При реализации двухэтапной схемы в МКЭ-пакете COMSOL Multiphysics рассматривалась расчетная область размерами  $30 \times 50 \times 2$  мм<sup>3</sup>, обрамленная PML-блоками шириной 10 мм. Для дискретизации использовались тетраэдральные КЭ с полиномами четвертого порядка, максимальный размер которых выбирался по правилу  $\hat{\lambda}/5$ , где  $\hat{\lambda}$  — минимальное значение длин распространяющихся волн во всем рассматриваемом частотном диапазоне. С учетом степени использованных в КЭ полиномов такой выбор шага дискретизации КЭ-сетки обеспечивает достаточное для моделирования задач волновой динамики количество степеней свободы на длину волны [21]. В качестве базисных функции в разложении (2.5) использовались точечные источники, равномерно распределенные в области контакта  $\Omega$  вплоть до ее границ с шагом  $h_k = h = 0,67$  мм ( $N_k = 675$ ). Горизонтальные координаты точек коллокаций выбирались совпадающими с центрами точечных источников.

Из графиков видно, что двухэтапная схема дает результаты, совпадающие с хотя и родственным, но полученным независимо численным МКЭ-решением.

Наряду с численной верификацией проводилось также сопоставление с экспериментальными данными. Для этого использовался экспериментальный образец в виде алюминиевой пластины (размеры  $600 \times 600 \times 2$  мм<sup>3</sup>, инженерные константы приведены в разделе 2), на поверхность которой с помощью цианакрилатного клея приклеена прямоугольная пьезокерамическая пластина из материала PIC151 с размерами  $10 \times 30 \times 0,2$  мм<sup>3</sup>. На пьезоактуатор для возбуждения в образце механических колебаний с помощью генератора сигналов произвольной формы Tektronix AFG3021B подавались нестационарные электрические напряжения (тональная посылка) в виде двух циклов синуса, модулированных синус-окном

$$p(t) = \begin{cases} V_\alpha \frac{1}{2} \sin(2\pi f_c t) \sin\left(\frac{\pi f_c t}{2}\right), & 0 \leq t \leq \frac{2}{f_c}, \\ 0, & t > \frac{2}{f_c}, \end{cases}$$

где  $V_\alpha$ ,  $B$  – амплитуда электрических напряжений,  $f_c$  – центральная частота. На расстоянии 98 мм от центра области контакта на поверхности образца с помощью лазерного виброметра Polytec PSV-500-HV была измерена скорость вертикальной компоненты смещений  $v_z^e(\mathbf{x}, t) = u_{z,t}^e(\mathbf{x}, t)$ .

В рамках рассматриваемой компьютерной модели нестационарный сигнал вычислялся как суперпозиция его частотного спектра:

$$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{+\infty} P(\omega)(-i\omega)\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right]. \quad (3.1)$$

Здесь  $P(\omega)$  – Фурье-образ тональной посылки  $p(t)$ , а для расчета интеграла пределы интегрирования по  $\omega$  выбирались таким образом, чтобы в выбранный частотный диапазон входили все значения  $|F(\omega)|$  до порога в  $-40$  дБ.

Для более адекватного учета особенностей использовавшегося экспериментального образца при построении модели в COMSOL в рамках двухэтапного подхода клеевая прослойка между волноводом и актуатором была также учтена (толщина  $h_{gl} = 0,02$  мм, упругие модули цианакрилатного клея  $E_{gl} = 1,7$  ГПа,  $\mu_{gl} = 0,4$ ,  $\rho_{gl} = 1248$  кг/м<sup>3</sup>). При этом реализация второго этапа схемы не претерпела изменений, поскольку наличие клея влияет только на поверхностную нагрузку.

На рис. 5 представлены результаты сопоставления экспериментальных и расчетных волновых сигналов для двух центральных частот  $f_c = 100$  и  $f_c = 200$  кГц. Наблюдается хорошее совпадение как амплитуд колебаний, так и времени прихода волновых пакетов, соответствующих фундаментальным симметричной  $S_0$  и антисимметричной  $A_0$  модам. Соответствующие частотные спектры нестационарных сигналов также приводятся на рис. 5. В качестве дополнительной иллюстрации эффективности предложенного подхода на обоих рисунках штрихпунктирными линиями показаны результаты, получаемые на основе модели эффективных граничных условий (модели точечных сил) [4]. Видно, что, даже несмотря на малую толщину пьезоактуатора, упрощенный подход в отличие от двухэтапной схемы адекватно описывает экспериментальные данные только на относительно низких частотах.

#### 4. Влияние клеевой прослойки на энергетические характеристики

Клеевая прослойка, через которую пьезоактуатор контактирует с волноводом, может значимым образом влиять на возбуждаемые им волновые поля [22]. Степень такого воздействия зависит как от типа используемого клея, так и толщины самой прослойки. Для демонстрации влияния данных параметров на динамическое поведение системы «пьезоактуатор – упругий волновод» с использованием разработанной двухэтапной схемы рассчитывалась волновая энергия, закачиваемая поверхностным пьезоэлементом в упругий слой [23]

$$E_0 = -\frac{\omega}{8\pi^2} \operatorname{Im} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) \mathbf{Q}_a(\alpha_1, \alpha_2), \mathbf{Q}_a(\alpha_1^*, \alpha_2^*)) d\alpha, \quad (4.1)$$

где звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения, и  $\mathbf{Q}_a(\alpha_1, \alpha_2)$  вычислялся на основе соотношения (2.5). Кроме того, рассматривались вклад энергии, уносимой фундаментальными волнами Лэмба на бесконечность через цилиндрическое сечение волновода, в общую энергию  $E_0$  [23]

$$\hat{E}_{0,n} = \left( \int_0^{2\pi} E_n(\varphi) d\varphi \right) / E_0, \quad (4.2)$$

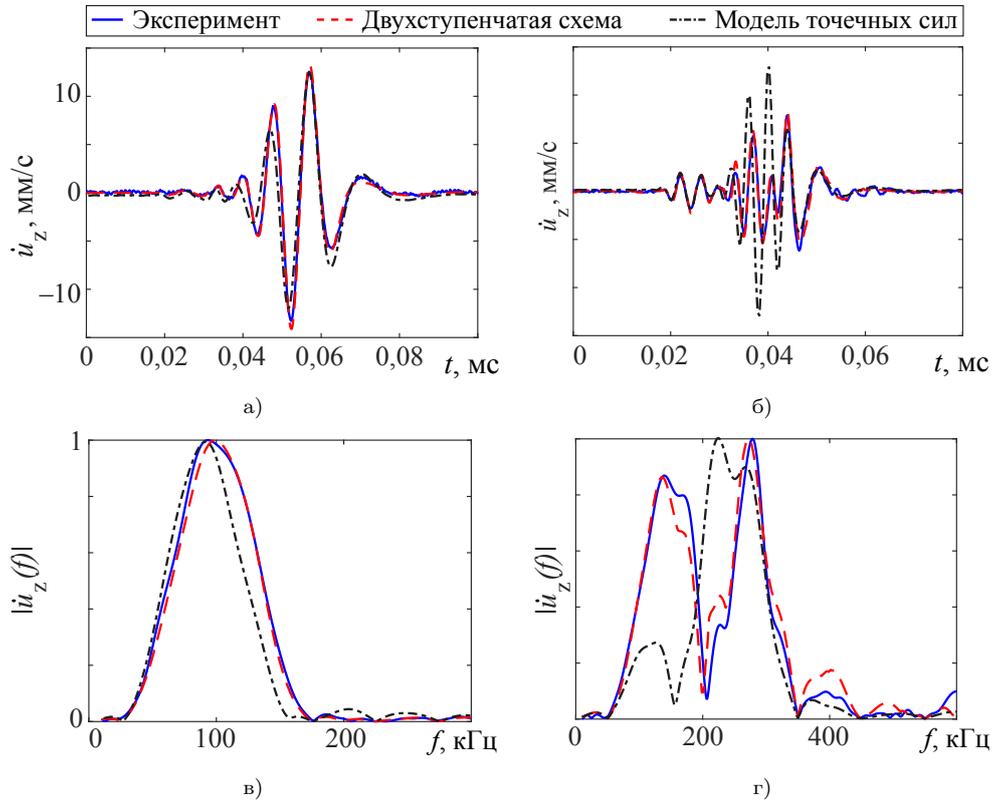


Рис. 5. Сопоставление скоростей вертикальной компоненты смещений для центральных частот: а)  $f_c = 100$  кГц; б)  $f_c = 200$  кГц

Fig. 5. Comparison of the velocities of the vertical displacement component for central frequencies: а)  $f_c = 100$  kHz; б)  $f_c = 200$  kHz

$$E_n(\varphi) = \int_{-H}^0 e_{r,n}(r, \varphi, z) dz, \quad r \rightarrow \infty$$

$$e_r(r, \varphi, z) = -\frac{\omega}{8\pi^2} \text{Im} [\mathbf{u}_n(r, \varphi, z) \cdot \boldsymbol{\tau}_{r,n}(r, \varphi, z)].$$

Здесь нижний индекс  $n$  соответствует конкретной нормальной моде в разложении (2.3), использовавшемся в (4.2) для вычисления векторов смещений  $\mathbf{u}_n$  и напряжений  $\boldsymbol{\tau}_{r,n}$ . Указанные напряжения вычислялись вдоль вектора нормали к боковой поверхности цилиндра.

В качестве примера рассматривались два типа клеевой прослойки: слой цианакрилатного клея (параметры приведены в разделе 3) и слой двухсторонней клейкой ленты (модуль Юнга  $E_{gl} = 0,5$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{gl} = 0,4$  плотность  $\rho_{gl} = 930$  кг/м<sup>3</sup>) [24] и использовался тот же пьезоэлемент, что и в разделах 2 и 3.

На рис. 6 представлены поверхности  $E_0$  и  $\hat{E}_{0,n}$  для мод  $A_0$  и  $S_0$  в случае цианакрилатного клея и клейкой ленты соответственно в зависимости от частоты колебаний и толщины клеевой прослойки  $h_{gl}$ . Поверхность общей энергии нормирована относительно наибольшего значения  $E_0$  в рассматриваемом диапазоне изменения параметров  $f$  и  $h_{gl}$ .

Из представленных результатов видно, что на относительно низких частотах колебаний толщина клеевой прослойки и ее упругие свойства оказывают незначительное влияние на перераспределение волновой энергии между фундаментальными модами. С ростом частоты на графиках  $E_0$  наблюдается появление близких к вертикальным областей высоких значений данного параметра, обусловленных влиянием собственных частот пьезоэлемента и соответству-

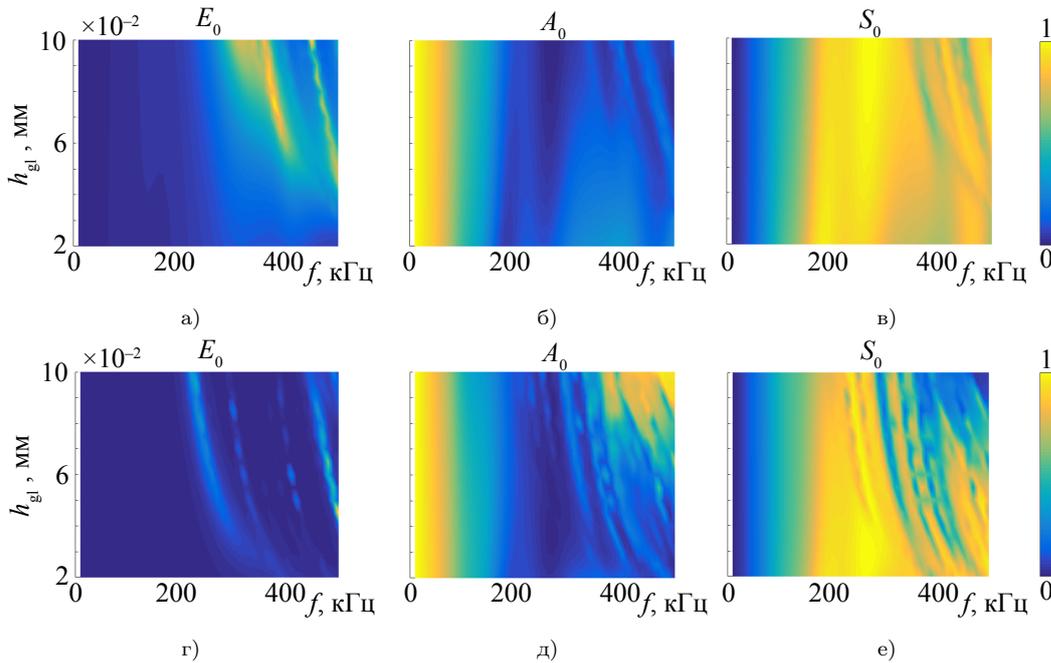


Рис. 6. Энергетические характеристики в случае установки пьезокерамического преобразователя с использованием цианакрилатного клея (а, б, в) и с использованием двухсторонней клейкой ленты (г, д, е)

Fig. 6. Energy characteristics in the case of installing a piezoceramic transducer using cyanoacrylate glue (a, б, в) and using double-sided adhesive tape (г, д, е)

ющим резонансным характером его взаимодействия с упругой подложкой. При этом в случае более мягкого материала (двухсторонняя клейкая лента) такие полосы начинают проявляться на более низких частотах колебаний из-за меньшей механической связности актуатора и подложки.

## Закключение

Предложенная в настоящей статье двухэтапная вычислительная схема для моделирования процессов возбуждения упругих колебаний в изотропном слое произвольным в плане формы пьезопреобразователем и их распространения по волноводу основана на совместном использовании метода конечных элементов и полуаналитического интегрального подхода. Получаемые на ее основе результаты верифицированы конечноэлементными расчетными и экспериментальными данными. К основным особенностям разработанного подхода можно отнести относительную простоту его реализации, отсутствие необходимости в конечно-элементной дискретизации протяженных трехмерных областей, естественный учет сложной геометрии пьезоэлемента и сопутствующих факторов (наличие клеевой прослойки, сложной формы электродирования), а также возможность использования эффективных асимптотических представлений волновых полей, несущих в себе информацию об особенностях источника колебаний, для последующего анализа соответствующих волновых процессов. Единственным ограничением, возникающим при применении предложенной двухэтапной схемы, является невозможность ее использования в частотных диапазонах обратных волн Лэмба, что следует из особенностей стандартных РМЛ-условий, применяемых на первом этапе для моделирования открытого волновода. Дальнейшие исследования по данной тематике будут направлены на модификацию подхода с целью учета в нем не только пьезопреобразователя, но сенсорных элементов, а также адаптацию на случай многослойных изотропных волноводов.

## Литература [References]

1. Farrar, C.R., Worden, K., An introduction to structural health monitoring. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 2006, vol. 365, pp. 303–315. DOI: [10.1098/rsta.2006.1928](https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1928)
2. Giurgiutiu, V., Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Columbia, Elsevier Inc., 2014.
3. Raghavan, A., Cesnik, E.S., Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring. *Smart Materials and Structures*, 2005, vol. 14, pp. 1448–1461. DOI: [10.1088/0964-1726/14/6/037](https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/6/037)
4. Еремин, А.А., Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., Применение пленочных пьезопреобразователей для возбуждения и регистрации бегущих упругих волн в системах активного мониторинга протяженных конструкций. *Дефектоскопия*, 2020, № 10, с. 24–38. [Eremin, A.A., Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Application of piezoelectric wafer active sensors for elastic guided wave excitation and detection in structural health monitoring systems for elongated constructions. *Defektoskopiya = Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2020, no. 10, pp. 24–38. (in Russian)] DOI: [10.31857/S0130308220100036](https://doi.org/10.31857/S0130308220100036)
5. Benmeddour, F., Treysède, F., Laguerre, L., Numerical modeling of guided wave interaction with non-axisymmetric cracks in elastic cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, iss. 5, pp. 764–774. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2010.11.013](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.11.013)
6. Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., Евдокимов, А.А., Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах. *Акустический журнал*, 2018, № 1, с. 3–12. [Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Evdokimov, A.A., Hybrid numerical-analytical scheme for calculating elastic wave diffraction in locally inhomogeneous waveguides. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustical Physics*, 2018, no. 1, pp. 3–12. (in Russian)] DOI: [10.7868/S0320791918010082](https://doi.org/10.7868/S0320791918010082)
7. Golub, M.V., Shpak, A.N., Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 65, pp. 234–255. DOI: [10.1016/j.apm.2018.08.019](https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.019)
8. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических тел*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh tel = Dynamic mixed problems of the theory of elasticity for non-classical bodies*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
9. Glushkov, E., Glushkova, N., Kvasha, O., Seemann, W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate. *Smart Materials and Structures*, 2007, vol. 16, pp. 650–664. DOI: [10.1088/0964-1726/16/3/012](https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/3/012)
10. Sinclair, G.B., Cormier, N.G., Griffin, J.H., Meda, G., Contact stresses in dovetail attachments: finite element modeling. *The Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, vol. 124, iss. 1, pp. 182–189. DOI: [10.1115/1.1391429](https://doi.org/10.1115/1.1391429)
11. Партон, В.З., Кудрявцев, Б.А., *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. Москва, Наука, 1998. [Parton, V.Z., Kudryavcev, B.A., *Electromagnitoupругost piezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel = Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive media*, Moscow, Nauka, 1998 (in Russian)]
12. Свешников, А.Г., Принцип предельного поглощения для волновода. *ДАН*, 1951, т. 80, № 3, с. 341–344. [Sveshnikov, A.G., The principle of limiting absorption for a waveguide. *Doklady Akademii nauk = Report of the Academy of Sciences*, 1951, vol. 80, no. 3, pp. 341–344. (in Russian)]
13. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве, поверхностными источниками. *Акустический журнал*, 1986, т. 32, вып. 3, с. 366–371. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Analysis of wave fields generated in a stratified elastic half-space by surface sources. *Sov. Phys. Acoust. (USA)*, 1986, no. 32(3), pp. 223–226.]
14. Глушкова, Н.В., *Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости*. Диссертация на соискание ученой степени доктора наук, 2000, Ростовский федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия. [Glushkova, N.V., *Determination and accounting singular terms in Elasticity. Diss. ... Doctor of Sciences*, 2000, Rostov State University, Rostov-on-Don, Russia. (in Russian)]
15. Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., Варелджан, М.В., Сравнительный анализ эффективности программной реализации полуаналитических методов расчета волновых полей в многослойных анизотропных композитах. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия:*

- Математическое моделирование и программирование*, 2022, т. 15, вып. 2, с. 56–69. [Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Vareldzhan, M.V., Comparative analysis of software implementation efficiency of the semi-analytical methods for calculating wave fields in multilayer anisotropic composites. *Bull. of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 2, pp. 56–69. (in Russian)]
16. Moulin, E., Assaad, J., Delebarre, C., Osmont, D., Modeling of Lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element–normal modes expansion method. *Acoustical Society of America*, 2000, vol. 107, iss. 1, pp. 87–94. DOI: [10.1121/1.428294](https://doi.org/10.1121/1.428294)
  17. Quaegebeur, N., Ostiguy, P-C, Masson, P., Hybrid empirical/analytical modeling of guided wave generation by circular piezoceramics. *Smart Materials and Structures*, 2015, vol. 24, no. 3. DOI: [10.1088/0964-1726/24/3/035003](https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/3/035003)
  18. Liu, Y., Fan, H., Yang, J., Analysis of the shear stress transferred from a partially electroded piezoelectric actuator to an elastic substrate. *Smart Materials and Structures*, 2000, vol. 9, no. 2, pp. 248–254. DOI: [10.1088/0964-1726/9/2/406](https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/2/406)
  19. Huang, J., Heng-I, Y., Dynamic electromechanical response of piezoelectric plates as sensors or actuators. *Materials Letters*, 2000, vol. 46, iss. 2–3, pp. 70–80. DOI: [10.1016/S0167-577X\(00\)00145-2](https://doi.org/10.1016/S0167-577X(00)00145-2)
  20. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях. *Известия АН СССР. МТТ*, 1978, № 3, с. 61–67. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Dynamic contact problems with arbitrary areas. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela = Bull. of the USSR Academy of Sciences. Solid Mechanics*, 1978, no. 3, pp. 61–67. (in Russian)]
  21. Lowe, M.J.S., Cawley, P., Kao, J-Y., Diligent, O., The low frequency reflection characteristics of the fundamental antisymmetric Lamb wave from a rectangular notch in a plate. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, vol. 112, iss. 6, pp. 2612–2622. DOI: [10.1121/1.1512702](https://doi.org/10.1121/1.1512702)
  22. Ha, S., Lonkar, K., Mittal, A., Chang, F., Adhesive Layer Effects on PZT-induced Lamb Waves at Elevated Temperatures. *Structural Health Monitoring*, 2010, vol. 9, iss. 3, pp. 247–256. DOI: [10.1177/1475921710365267](https://doi.org/10.1177/1475921710365267)
  23. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Fomenko, S.I., Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, vol. 137, iss. 4, pp. 1802–1812. DOI: [10.1121/1.4916607](https://doi.org/10.1121/1.4916607)
  24. Wilde, M.V., Golub, M.V., Eremin, A.A., Elastodynamic behaviour of laminate structures with soft thin interlayers: theory and experiment. *Materials*, 2022, vol. 15, iss. 4, no. 1307, pp. 1–32. DOI: [10.3390/ma15041307](https://doi.org/10.3390/ma15041307)