УДК 539.375 EDN: GCSOKA DOI: 10.31429/vestnik-21-1-21-25

Об одном энергетическом условии развития изолированного дефекта в пространственном случае

В. И. Дунаев[1]✉, **И. А. Терещенко**[1], **М. Г. Приходько**[1], **С. Ю. Молдованов**[2]

[1] Кубанский государственный технологический университет, ул. Московская, 2, Краснодар, 350072, Россия
[2] Роснефть-НТЦ, ул. Красная, 54, Краснодар, 350000, Россия

✉ Дунаев Владислав Игоревич; ORCID 0000-0002-4804-4251; SPIN 6403-8280; e-mail: dunaevatv@mail.ru

Аннотация. В работе получено энергетическое условие развития изолированного дефекта в пространственном случае, когда разрушающие нагрузки действуют и на внешней поверхности тела, и на поверхности дефекта. В отличие от классического условия разрушения А. Гриффитса предлагаемое условие явно зависит от линейного коэффициента теплового расширения и температуры материала. Рассмотрена модельная задача о развитии изолированного дефекта сферической формы в случае, когда на границе дефекта и на удаленной границе тела действуют равномерные давления.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, изолированный дефект, энергетическое условие, внутренняя энергия.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта «Фонд-М» (договор № 2470ГССС15-L/90177).

Цитирование: Дунаев В. И., Терещенко И. А., Приходько М. Г., Молдованов С. Ю. Об одном энергетическом условии развития изолированного дефекта в пространственном случае // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 1. С. 21–25. EDN: GCSOKA. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-21-25

Поступила 22 января 2024 г. После доработки 11 февраля 2024 г. Принято 17 февраля 2024 г. Публикация 26 марта 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

On One Energy Condition for the Development of an Isolated Defect in the Spatial Case

V. I. Dunaev[1]✉, **I. A. Tereshchenko**[1], **M. G. Prikhodko**[1], **S. Yu. Moldovanov**[2]

[1] Kuban State Technological University, Moskovskaya st., 2, Krasnodar, 350072, Russia
[2] Rosneft-NTC, Krasnaya st., 54, Krasnodar, 350000, Russia

✉ Vladislav I. Dunaev; ORCID 0000-0002-4804-4251; e-mail: dunaevatv@mail.ru

Abstract. In the work, an energy condition for the development of an isolated defect is obtained in the spatial case when destructive loads act both on the outer surface of the body and on the surface of the defect. Unlike the classical Griffiths fracture condition, the proposed condition clearly depends on the linear coefficient of thermal expansion and the temperature of the material. The model problem of the development of an isolated spherical defect is considered in the case when uniform pressures act on the boundary of the defect and on the remote boundary of the body.

Keywords: brittle fracture, isolated defect, energy condition, internal energy.

Funding. The work was carried out with the support of the "Fund-M" grant (contract No. 2470GSSS15-L/90177).

Cite as: Dunaev, V. I., Tereshchenko, I. A., Prikhodko, M. G., Moldovanov, S. Yu., On one energy condition for the development of an isolated defect in the spatial case. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 21–25. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-21-25

Received 22 January 2024. Revised 11 February 2024. Accepted 17 February 2024. Published 26 March 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

В работах [1–3] сформулированно и исследовано энергетическое условие типа Гриффитса, учитывающее термодинамические параметры материла, в случае плоского напряженно деформированного состояния. В настоящей работе получено условие хрупкого разрушения типа Гриффитса в пространственном случае, когда изолированный дефект развивается под действием нагрузок, приложенных как к внешней поверхности тела, так и к поверхности дефекта.

1. Условие развития изолированного дефекта в пространственном случае

Для однократного статического нагружения в изотермическом случае энергетическое условие разрушения типа Гриффитса имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}a} = 0, \quad W = U - A - \gamma\Sigma. \tag{1.1}$$

В условии (1.1) использованы обозначения: $U = U^{(0)} - U^{(1)}$ — высвобождающаяся внутренняя энергия, $A = A^{(0)} - A^{(1)}$, $\mathrm{d}A$ — работа внешних сил. Индекс (0) относится к соответствующим величинам до образования новой поверхности, индекс (1) — к величинам после ее образования. Здесь $\gamma\Sigma$ — внутренняя энергия, затраченная на образование поверхности дефекта Σ, в обозначениях формулы (1.1) имеющего площадь Σ, γ — удельная внутренняя энергия, отнесенная к еденице площади поверхности дефекта.

Для высвобождающейся внутренней энергии U имеем [4, 5]

$$U = U^{(0)} - U^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\iiint\limits_{V_0} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)}\,\mathrm{d}v - \iiint\limits_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\,\mathrm{d}v\right) + \\ + 3\alpha_0 T_0 K_0 \left(\iiint\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij}\,\mathrm{d}v - \iiint\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)}\delta_{ij}\,\mathrm{d}v\right), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

В выражении (1.2) V_0, V_1 — области, занятые телом до и после образования дефекта соответсвенно, σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжения и деформаций соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, α_0 — линейный коэффициент теплового расширения, T_0 — абсолютная температура, $K_0 = E/\left(3(1-2\nu)\right)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Если в выражении (1.2) пренебречь вторым слагаемым, получим выражение для высвобождающейся потенциальной составляющей внутренней энергии, что соответствует классическому условию А. Гриффитса.

Рассмотрим случай, когда на внешней, удаленной от поверхности дефекта Σ, поверхности S_0 зафиксированы перемещения, соответствующие приложенной нагрузке к поверхности S_0 этого же тела, но до образования в нем дефекта [1, 2].

Для принятой модели развития дефекта перемещения $u_i^{(1)}(x_i) = u_i^{(0)}(x_i)$, $x_i \in S_0$. Тогда для величины A имеем

$$A = A^{(0)} - A^{(1)} = \oiint\limits_{S_0} \left(\sigma_{ij}^{(0)} - \sigma_{ij}^{(1)}\right) u_i^{(1)} n_j\,\mathrm{d}s + \oiint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(1)} n_j\,\mathrm{d}s. \tag{1.3}$$

В выражении (1.3) u_i — компоненты вектора перемещения, n_j — компоненты вектора внешней нормали к поверхностям S_0 и Σ.

Для достаточно удаленной от поверхности дефекта внешней поверхности тела S_0 $\sigma_{ij}^{(0)} \sim \sigma_{ij}^{(1)}$, поэтому, с учетом выражения (1.3) можно положить

$$A = \oiint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(1)} n_j\,\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

Воспользуемся теоремой взаимности для двух первых интегралов в выражении (1.2)

$$\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(1)}=\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(0)}.$$

Тогда для высвобождающейся внутренней энергии (1.2) получим

$$U=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V_1}\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(0)}-\varepsilon_{ij}^{(1)}\right)\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)}\,\mathrm{d}v+$$
$$+3\alpha_0T_0K_0\left(\iiint\limits_{V_0}\varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij}\,\mathrm{d}v-\iiint\limits_{V_1}\varepsilon_{ij}^{(1)}\delta_{ij}\,\mathrm{d}v\right).\quad(1.5)$$

В равенстве (1.5) V обозначает область $V=V_0/V_1$.

Проведем преобразование выражения (1.5), применим формулу Остроградского и ее следствия. Согласно этой формуле для функций $P\,(x,y,z)$, $Q\,(x,y,z)$, $R\,(x,y,z)$, непрерывных в месте со своими первыми производными в области V, ограниченной замкнутой поверхностью D, имеем

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3=\oiint\limits_{D}P\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3+\oiint\limits_{D}Q\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3+\oiint\limits_{D}R\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.\quad(1.6)$$

Пусть $P=fg$. По формуле Остроградского (1.6)

$$\iiint\limits_{V}f\frac{\partial g}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3=-\iiint\limits_{V}g\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3+\oiint\limits_{D}fg\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.\quad(1.7)$$

Аналогичные выражения имеют место для $Q=fg$, $P=R=0$ и $R=fg$, $P=Q=0$.

Для преобразования двух первых интегралов (1.5) используем последовательно соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial}x_i\right),\quad(1.8)$$

формулу Остроградского (1.7) и уравнения равновесия

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j=0,\quad i,j=1,2,3.\quad(1.9)$$

Для преобразования третьего и четвертого интегралов в выражении (1.5) последовательно применим соотношения Коши (1.8) и формулу Остроградского (1.6). После указанных преобразований выражения (1.5) с учетом равенств (1.6)–(1.9) получаем

$$U=\frac{1}{2}\oiint\limits_{S_0+\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)n_j\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\oiint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(0)}n_j\,\mathrm{d}s+$$
$$+3\alpha_0T_0K_0\left(\oiint\limits_{S_0+\Sigma}\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)\delta_{ij}n_j\,\mathrm{d}s+\oiint\limits_{\Sigma}u_i^{(0)}\delta_{ij}n_j\,\mathrm{d}s\right).\quad(1.10)$$

Поскольку на внешней поверхности S_0 тела с дефектом и без дефекта $u_i^{(0)}=u_i^{(1)}$, с учетом равенств (1.10) и (1.4) получаем следующее выражение для W:

$$W=\frac{1}{2}\oiint\limits_{\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(0)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(1)}\right)n_j\,\mathrm{d}s+3\alpha_0T_0K_0\oiint\limits_{\Sigma}u_i^{(1)}\delta_{ij}n_j\,\mathrm{d}s-\gamma\Sigma.\quad(1.11)$$

Тогда условие разрушения (1.1) с учетом выражения (1.11) при $\gamma=\mathrm{const}$ имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{2}\oiint\limits_{\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(0)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(1)}\right)n_j\,\mathrm{d}s+3\alpha_0T_0K_0\oiint\limits_{\Sigma}u_i^{(1)}\delta_{ij}n_j\,\mathrm{d}s\right)-\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\Sigma(a)=0.\quad(1.12)$$

2. Модельная задача

Определим критическую нагрузку, необходимую для развития центрального дефекта сферической формы радиуса a в сфере радиуса b, когда на поверхности дефекта и на внешней, удаленной поверхности действуют равномерные давления P и p соответственно.

Если массовые силы отсутствуют, уравнения теории упругости в перемещениях имеют вид

$$\mu \Delta u_i^{(1)} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

В выражении (2.1) использованы обозначения

$$\theta^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} \delta_{ij}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (.) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (.) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (.)$$

— оператор Лапласа,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Решение уравнений (2.1) ищем в виде [6]

$$u_i^{(1)} = \varphi(r) x_i, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{2.2}$$

Подставляя выражение (2.2) в уравнения (2.1) получим для функции $\varphi(r)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^3}. \tag{2.3}$$

При этом

$$\theta = 3\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 3C_1. \tag{2.4}$$

Обозначим через $P(r)$ нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной к радиусу r, тогда с учетом (2.3) и (2.4) получим

$$P(r) = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_i^{(1)} x_i}{r} \right) = (3\lambda + 2\mu) C_1 - \frac{4\mu}{r^3} C_2. \tag{2.5}$$

В соответствии с принятой моделью развития дефекта

при $r = b$ $u_i^{(1)} = u_i^{(0)}$,

при $r = a$ $P(a) = -P$.

Из этих граничных условий определяем постоянные C_1 и C_2 в выражении (2.3).

С учетом равенств (2.2) и (2.5) имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1-2\nu}{E} \frac{P(1+\nu) a^3 + 2p(1-2\nu) b^3}{(1+\nu) a^3 + 2(1-2\nu) b^3}, \\ C_2 &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{(P-p) a^3 b^3}{(1+\nu) a^3 + 2(1-2\nu) b^3}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Также для вычисления величин,входящих в условие (1.12), воспользуемся соотношениями [6]

$$\begin{aligned} u_i^{(0)} &= -p(1-2\nu) \frac{x_i}{E}, \\ \sigma_{11}^{(0)} &= \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = -p, \\ \sigma_{12}^{(0)} &= \sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

Граничные условия для компонентов тензора напряжения на контуре Σ, соответствующие условию $P(a) = -P$, имеют вид
$$\sigma_{ij} n_j = -\frac{x_i}{a} P. \tag{2.8}$$
Проводя интегрирование в выражении (1.11) с учетом формул (2.2), (2.3), (2.6), (2.7) и граничных условий (2.8) при $n_i = x_i/r$, $\mathrm{d}s = a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\Sigma = 4\pi a^2$, $\gamma = \mathrm{const}$ получим
$$W = \frac{2\pi a^3}{E\left((1+\nu)\, a^3 + 2\,(1-2\nu)\, b^3\right)} \Big[3\,(1-\nu)\,(P-p)^2\, b^3 - P^2 \left((1+\nu)\, a^3 + 2\,(1-2\nu)\, b^3\right) + \\ + 6\alpha_0 T_0 K_0 \left((1+\nu)\, P\left(b^3 - a^3\right) - 3\,(1-\nu)\, p b^3\right)\Big] - 4\pi a^2 \gamma. \tag{2.9}$$
Переходя к пределу при $b \to \infty$ в равенстве (2.9) имеем
$$W = \frac{\pi a^3}{E}\left[(1+\nu)\, P^2 - 3\,(1-\nu)\left(2Pp - p^2\right) + 6\alpha_0 T_0 K_0 \left((1+\nu)\, P - 3\,(1-\nu)\, p\right)\right] - 4\pi a^2\gamma. \tag{2.10}$$
Дифференцируя равенство (2.10) в соответствии с условием (1.12), получаем
$$a = \frac{8}{3}\gamma E \left[(1+\nu)\, P^2 - 3\,(1-\nu)\left(2Pp - p^2\right) + 6\alpha_0 T_0 K_0 \left((1+\nu)\, P - 3\,(1-\nu)\, p\right)\right]^{-1}. \tag{2.11}$$
Выражение (2.11) устанавливает соотношение между величинами давления P и p при которых возможно развитие дефекта с характерным размером a в зависимости от физико механических параметров, линейного коэффициента теплового расширения и температуры материала.

Заключение

Для пространственного случая получено энергетическое условие развития изолированного дефекта, когда нагрузки действуют и на внешней поверхности тела, и на поверхности дефекта. Предложенное в настоящей работе условие обобщает классическое условие А. Гриффитса и явно зависит от термодинамических параметров материала.

Литература [References]

1. Дунаев, И.М., Дунаев, В.И., Об энергетическом условии разрушения твердых тел. *ДАН*, 2000, т. 372, № 1, с. 43–45. [Dunaev, I.M., Dunaev, V.I., On the energy condition for the destruction of solids. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2000, vol. 372, no. 1, pp. 43–45. (in Russian)]
2. Дунаев, И.М., Дунаев, В.И., Энергетическое условие разрушения твердых тел. *Механика твердого тела*, 2003, № 6, с. 69–81. [Dunaev, I.M., Dunaev, V.I., Energy condition for the destruction of solids. *Mekhanika tverdogo tela = Solid Body Mechanics*, 2003, no. 6, pp. 69–81. (in Russian)]
3. Дунаев, В.И., Терещенко, И.А., Молдаванов, С.Ю., Величко, Е.И., Шиян, С.И., Об одном условии развития изолированного дефекта. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 2, с. 8–13. [Dunaev, V.I., Tereshchenko, I.A., Moldavanov, S.Yu., Velichko, E.I., Shiyan, S.I., On one condition for the development of an isolated defect. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 8–13. (in Russian)] EDN: TNJMPT DOI: 10.31429/vestnik-18-2-8-13
4. Ильюшин, А.А., *Механика сплошной среды.* Москва, Из-во МГУ, 1990. [Ilyushin, A.A., *Mekhanika sploshnoy sredy = Mechanics of solid media.* Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1990. (in Russian)]
5. Новацкий, В., *Динамические задачи термоупругости.* Москва, Мир, 1970. [Novatsky, V., *Dinamicheskie zadachi termouprugosti = Dynamic problems of thermoelasticity.* Moscow, Mir, 1970. (in Russian)]
6. Лейбензон, Л.С., *Курс теории упругости.* Москва, Гостехиздат, 1947. [Leibenzon, L.S., *Kurs teorii uprugosti = Course on the theory of elasticity.* Moscow, Gostekhizdat, 1947. (in Russian)]