УДК 533.6+539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ГИДРОДИНАМИКИ

И. И. Ефремов[1], ***Е. П. Лукащик***[2]

APPLICATION OF THE METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES TO SOLVE DYNAMIC CONTACT PROBLEMS OF THE ELASTICITY AND HYDRODYNAMICS THEORY

Efremov I. I., Lukaschik E. P.

Two problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions are considered: a dynamic antiplane problem for an elastic layer and the problem of oscillations of a plate on a layer of compressible fluid. The above problems are described by the Helmholtz equations for geometrically identical domains with the boundaries where the Dirichlet and Neumann conditions are interchanging. Boundary value problems are reduced to the boundary integral equations solved by the method of discrete singularities (sources and vortices). It is shown that the solutions of the above two problems have essentially different dynamic characteristics. To calculate proper frequencies of oscillations, asymptotical formulas have been obtained.

Математическое моделирование контактных задач теории упругости и задач гидроаэродинамики часто приводит к одним и тем же интегральным уравнениям. Однако в этих двух смежных областях механики сплошной среды получили развитие разные методы решения интегральных уравнений, которые можно с успехом переносить из одной области в другую.

В качестве тестовой задачи в настоящей работе выбрана антиплоская динамическая контактная задача для упругой среды. Указанная задача является характерной при решении широкого класса контактных задач теории упругости [1, 2]. Решение таких задач обычно строится с помощью применения преобразования Фурье и метода факторизации [1], асимптотических методов [2] или метода фиктивного поглощения [3,4] и, как правило, требует математических преобразований большой сложности и численных расчетов.

Для решения широкого класса задач гидроаэродинамики эффективно применяется метод дискретных особенностей [5], который с математической точки зрения является методом механических квадратур со сдвинутой коллокацией, что обеспечивает простоту его численной реализации. С помощью выбора расположения узлов квадратурной формулы (прямоугольников) и точек коллокации удается учесть физические особенности рассматриваемой задачи и получить решение в определенном классе функций, соответствующем требованиям физической задачи.

Однако следует учитывать, что несмотря на сходство математических постановок задач гидроаэродинамики и контактных задач теории упругости, каждый класс этих задач обладает и своей спецификой, обусловленной различными физическими постановками. Рассмотрим сходство и различия на примере двух наиболее близких задач: задачи о колебаниях пластины на поверхности слоя сжима-

[1]Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета.

[2]Лукащик Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.

емой жидкости и антиплоской контактной задачи для упругого слоя.

Общим для этих задач является основное уравнение движения среды — уравнение Гельмгольца

$$\Delta w + \nu^2 w = 0, y < 0, \nu = \frac{\omega a}{c}.$$

Для гидродинамической задачи w — потенциал скорости, для упругого слоя — перемещение точек слоя в направлении, перпендикулярном рассматриваемому сечению, c — скорость звука и скорость распространения сдвиговых волн соответственно, a — полуширина штампа или пластины, ω — частота колебаний.

Вследствие разных краевых условий для w (рис. 1) граничные интегральные уравнения отличаются в представлениях своих ядер в виде интеграла Фурье

$$\int\limits_{-a}^{+a} \tau(\xi) k(x-s)\, d\xi = f(x), \quad |x| \leqslant a,$$

для упругой задачи

$$k(x) \equiv k_e(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} L_2(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha,$$

для гидродинамической задачи

$$k(x) \equiv k_h(x) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\alpha) L_1(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha,$$

где $L_i(\alpha) \approx 1 + O(\alpha^{-2})$, $i = 1, 2$ при $|\alpha| \to \infty$.

Для гидродинамической задачи неизвестная плотность интеграла $\tau(x)$ является интенсивностью вихревого слоя, которым можно заменить колеблющуюся пластину. Ядро $k_h(x - s)$ является выражением вертикальной составляющей скорости в точке x пластины, индуцированной вихрем, расположенным в точке s пластины. При этом ядро $k_h(x - s)$ является сингулярным ядром Коши.

Для упругого слоя штамп является простым слоем источников колебаний. Интенсивность источников равна касательному напряжению $\tau \equiv \tau_{yz}$. Ядро $k_e(x - s)$ — перемещение точки x штампа под действием источника, расположенного в точке s. В данном случае ядро $k_e(x - s)$ имеет логарифмическую особенность.

1. Антиплоская контактная задача о колебаниях полосового штампа на упругом слое, полупространстве

Краевую задачу формулируем для перемещений $w(x, y, t)$ в направлении, перпендикулярном упругой полуплоскости $y \leqslant 0$.

Считая зависимость перемещений от времени экспоненциальной

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{-i\omega t},$$

получим выражение для касательных напряжений в виде

$$\tau(x, t) = \mu \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = \tau(x) e^{-i\omega t}.$$

Комплексные амплитуды колебаний $w(x, y)$, $\tau(x)$ — комплекснозначные функции действительного аргумента.

Имеем следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta w + \nu^2 w = 0, \quad y < 0, \quad \nu^2 = \frac{\rho \omega^2 a}{\mu}, \tag{1.1}$$

$$w|_{y=0} = f(x), \quad |x| \leqslant 1, \tag{1.2}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\tau}{\mu} = 0, \quad |x| > 1,$$

$$w = 0, \quad y = -h.$$

(μ — модуль сдвига, ρ — плотность среды).

Кроме того, решение уравнения (1.1) должно удовлетворять условиям излучения, а именно, должно соответствовать волнам, уходящим от источника на бесконечность.

В случае упругой полуплоскости $h \to \infty$, и решение задачи ищем в виде потенциала простого слоя

$$w(x, y) = \\ = \frac{1}{2i} \int\limits_{-a}^{+a} \tau(\xi) H_0^{(1)}(\nu \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2})\, d\xi. \tag{1.3}$$

Функция перемещений в форме (1.3) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям излучения и затухания возмущений на бесконечности, поскольку

$$H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\pi}{4})}, \quad |z| \to \infty.$$

Для определения неизвестного распределения касательных напряжений $\tau(x)$ получим

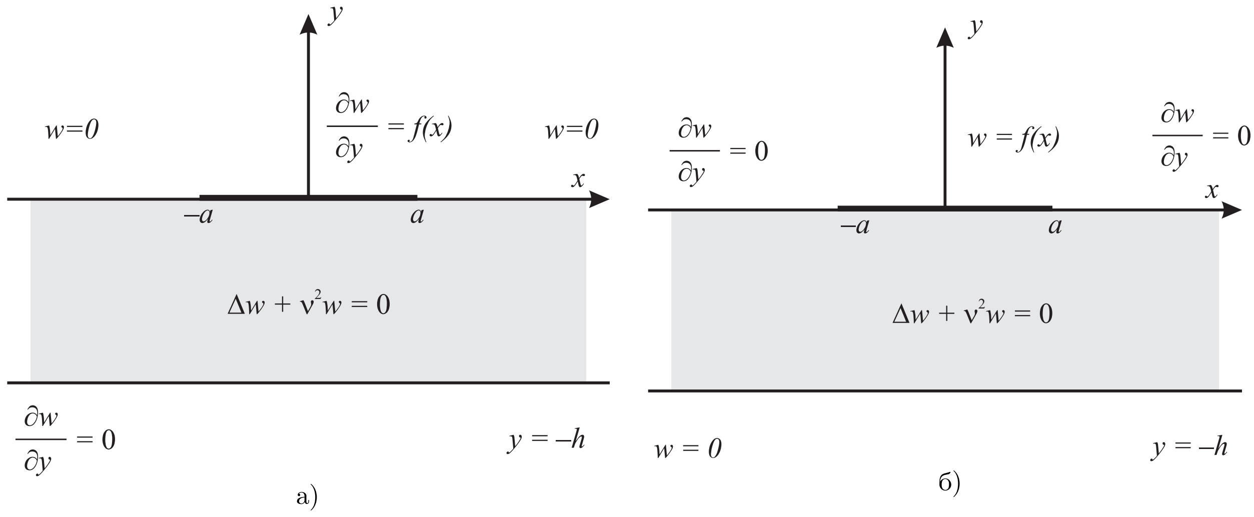

Рис. 1

интегральное уравнение на основе граничного условия контакта без трения (1.2)

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{-a}^{+a}\tau(s)H_0^{(1)}(\nu|x-s)\,ds = f(x), \qquad (1.4)$$

$$|x| \leqslant a.$$

Ядро интегрального уравнения (1.4) имеет логарифмическую особенность при $x = s$.

Для решения этого уравнения применим метод дискретных особенностей. Предпосылкой к такому шагу являются результаты исследований интегральных уравнений с логарифмическими ядрами [6], показывающие возможность применения методов решения сингулярных интегральных уравнений.

Отметим, что касательные напряжения τ имеют интегрируемые особенности вблизи кромок.

Однозначное определение решения интегральных уравнений в интересующем нас классе функций требует дополнительного условия, в качестве такового можно взять уравнение движения центра масс штампа

$$M\frac{d^2 f}{dt^2} = T - \int\limits_{-a}^{+a}\tau(s)\,ds. \qquad (1.5)$$

Здесь M — масса штампа, T — усилия, действующие на штамп.

В случае штампа с плоской подошвой

$$f(x,t) = f_c e^{-i\omega t},$$

уравнение (1.5) принимает вид

$$\int\limits_{-a}^{+a}\tau(s)\,ds - M\omega^2 f_c = T.$$

Для плоской подошвы штампа $f(x)$ — четная функция, в силу чего решение $\tau(x)$ также будет четной функцией.

Учитывая свойство четности и комплекснозначность функций $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $H_0^{(1)} = J_0 + iN_0$, $f = f_1 + if_2$, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\tau_{1j}k_1(x_i,s_j) - \tau_{2j}k_2(x_i,s_j)) = f_{1i},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\tau_{1j}k_2(x_i,s_j) + \tau_{2j}k_1(x_i,s_j)) = f_{2i},$$

$$i = \overline{1,N}, \qquad (1.6)$$

$$\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\tau_{1j} = T + m\nu^2 f_1,$$

$$\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\tau_{2j} = m\nu^2 f_2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} &T = 1,\\ &x_i = (i - 0,75)a/N,\\ &s_j = (j - 0,25)a/N,\\ &k_1 = (N_0(\nu|x - s|) + N_0(\nu|x + s|))/2,\\ &k_2 = -(J_0(\nu|x - s|) + J_0(\nu|x + s|))/2,\\ &m = M/(\rho a^2),\\ &\tau_1 = Re(\tau/\mu),\\ &\tau_2 = \mathrm{Im}(\tau/\mu). \end{aligned} \tag{1.7}$$

В качестве характеристик колебаний рассмотрим амплитуду и фазу колебаний подошвы штампа

$$f = f_1 + if_2 = |f|\, e^{i\psi},$$

$$|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad \psi = \mathrm{arctg}\, \frac{f_2}{f_1}.$$

Анализ результатов показывает, что амплитуда колебаний подошвы штампа имеет локальные максимумы при частотах $\nu = \nu^*$, зависящие от относительной массы m.

Результаты расчетов при $m = 5, 10, 20$ приведены на рис. 2, 3.

Нетрудно заметить, что при $\nu = \nu^*$ сдвиг фазы между колебаниями усилия T и колебаниями центра масс штампа составляет $\pi/2$, что свидетельствует о существовании конечных резонансов при $m > 0$.

Приближенно оценку резонансных частот при больших m можно производить по формуле

$$\nu^* = 1/\sqrt{m}.$$

Результаты, полученные по предложенной методике, в целом хорошо согласуются с данными, приведенными в [2].

В случае конечной толщины слоя h, измеряемой в долях полуширины полосы, ядро

$$k_e(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{th(h\sqrt{\alpha^2 - \nu^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

следует вычислять на основе теории вычетов, имея в виду основное правило обхода действительных полюсов, обеспечивающее выполнение условия излучения [1, 7], замыкая контуры интегрирования на нижнюю полуплоскость при $x > s$ и на верхнюю полуплоскость при $x < s$. В результате получим следующие формулы для вычисления ядра:

$$k_{e1}(x) = \frac{-1}{h} \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - b_n^2}} \sin \sqrt{\nu^2 - b_n^2}|x| - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - b_n^2}} e^{-\sqrt{\nu^2 - b_n^2}|x|} \right),$$

$$k_{e2}(x) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - b_n^2}} \cos \sqrt{\nu^2 - b_n^2}|x|,$$

$$b_n = \frac{2n - 1}{2h}\pi,$$

где N_0 — число вещественных полюсов символа ядра $K(\alpha)$.

В СЛАУ (1.6) необходимо положить

$$k_l = k_{el}(x - s) + k_{el}(x + s), \quad l = 1, 2,$$

а значения x_i и s_j определяются по формулам (1.7).

Проведенные расчеты подтверждают все качественные выводы, предсказанные И. И. Воровичем и наблюдавшиеся в предыдущих расчетах [4]. Ниже приводится таблица значений частот изолированных бесконечных резонансов ν_B^* для различных значений толщины слоя и относительной массы штампа, полученных методом вынужденных колебаний.

Таблица

m	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$
1	1,24	0,74	0,50
5	0,70	0,52	0,42
10	0,52	0,40	0,34
20	0,36	0,28	0,26
30	0,30	0,23	0,20

Приведенные данные для резонансных частот удовлетворяют основному теоретическому выводу: они не должны превышать частоту запирания волновода $\nu_з = \pi/2h$. Для приближенной оценки резонансных частот можно предложить формулу

$$\nu^* \approx \frac{\pi}{2\sqrt{h(m + h)}}. \tag{1.8}$$

Следует заметить, что согласно нулевой асимптотике упругий слой малой толщины h можно рассматривать как винклеровское основание

$$\tau \approx \frac{Gf}{h},$$

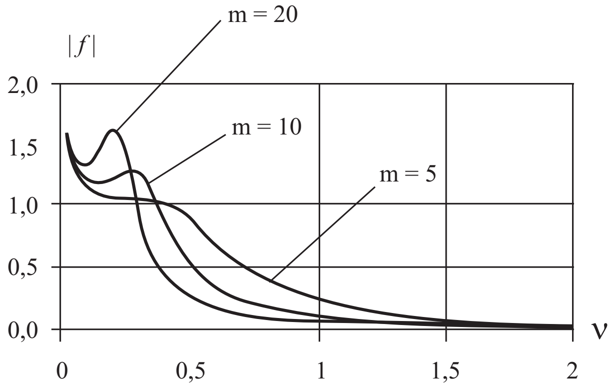

Рис. 2. Зависимость модуля колебаний от приведенной частоты

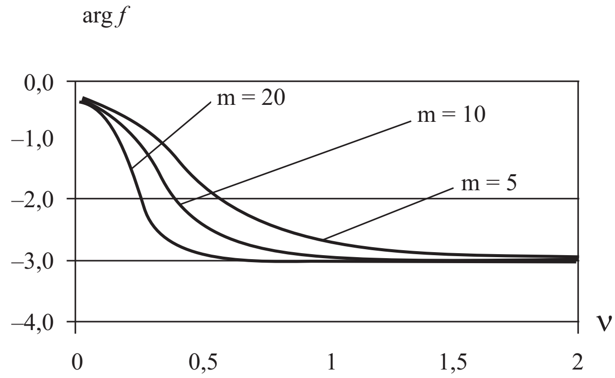

Рис. 3. Зависимость сдвига фаз колебаний от приведенной частоты

что приводит к самой грубой оценке резонансных частот

$$\nu^* = \sqrt{\frac{2}{hm}}. \tag{1.9}$$

Формула (1.8) является уточнением формулы (1.9).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод дискретных источников может быть успешно использован для решения ряда контактных задач теории упругости.

2. Гидродинамическая задача о колебаниях пластинки на слое сжимаемой жидкости

В этом случае ядро интегрального уравнения имеет вид

$$k_h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma} \frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{\alpha}\times$$
$$\times\, th(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2})e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \tag{2.1}$$

где контур интегрирования по-прежнему огибает положительные действительные полюса сверху, а отрицательные — снизу.

В подынтегральной функции ядра множитель при $e^{-i\alpha x}$ не стремится к нулю при $\alpha \to \infty$, однако применение теоремы Коши о вычетах допустимо в некотором обобщенном смысле. Для этого необходимо выделить слагаемое, пропорциональное $\operatorname{sign}\alpha$, и воспользоваться известным представлением ядра Коши как обобщенной функции [8] в виде интеграла Фурье

$$P\frac{1}{x} = -\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\alpha e^{-i\alpha x}\,d\alpha.$$

На практике можно обходиться без такой операции и применить теорему Коши непосредственно к выражению ядра в виде (2.1). В результате приходим к следующим формулам для гидродинамической задачи:

$$k_{h1}(x) = \frac{-\operatorname{sign}(x)}{h}\times$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{b_n^2}{\nu^2-b_n^2}\sin\sqrt{\nu^2-b_n^2}|x| - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=N_0+1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\nu^2-b_n^2}e^{-\sqrt{\nu^2-b_n^2}|x|}\right),$$

$$k_{h2}(x) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{h}\sum_{n=1}^{N_0}\frac{b_n^2}{\nu^2-b_n^2}\cos\sqrt{\nu^2-b_n^2}|x|,$$

$$b_n = \frac{2n-1}{2h}\pi.$$

В случае вертикальных колебаний с симметричной относительно середины пластинки амплитудой, функция $\gamma(x)$ — нечетная функция с интегрируемыми особенностями вблизи обеих кромок. Дополнительное условие для обеспечения единственности решения, которое соответствует ограниченности давления на кромках, в данном случае совпадает с условием бесциркуляционности течения и для нечетной функции $\gamma(x)$ выполняется автоматически. В итоге приходим к следующей СЛАУ метода дискретных вихрей

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\gamma_{1j}k_1(x_i,s_j) - \gamma_{2j}k_2(x_i,s_j)) = V_{y1},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\gamma_{1j}k_2(x_i,s_j)+\gamma_{2j}k_1(x_i,s_j))=V_{y2},$$

$$i=\overline{1,N},$$

$$k_l=k_{hl}(x-s)-k_{hl}(x+s),\quad l=1,2.$$

с сохранением положения точек x_i, s_j. Здесь $V_{y1}+iV_{y2}=V_y$, $V_y(x)$ — заданная вертикальная скорость точек пластинки.

Числовыми характеристиками задачи являются коэффициент нормальной силы или коэффициент присоединенных масс

$$C_n=\int_{-1}^{1}p(x)dx=-\int_{-1}^{1}s\gamma(s)ds$$

и резонансные частоты колебаний пластинки на слое сжимаемой жидкости. Результаты расчетов амплитуды колебаний C_n при различных значениях ширины канала h представлены на рис. 4.

В отличие от контактных задач теории упругости в задачах гидроаэродинамики динамические свойства системы: слой сжимаемой жидкости — тонкий профиль проявляются при любой массе профиля в том числе и при нулевой. При этом величина собственных частот системы слабо зависит от соотношения между длиной профиля и шириной канала.

Приближенный анализ колебаний пластинки на слое сжимаемой жидкости можно провести на основе асимптотики малой толщины слоя. При этом для гидродинамических задач нулевая асимптотика оказывается нетривиальной и приводит к дифференциальному уравнению для распределения давления по профилю. По существу, происходит вырождение основного разрешающего интегрального уравнения в дифференциальное. Формализм такой трансформации основан на переходе к функции давления

$$p(x)=\int_{-1}^{x}\gamma(\xi)\,d\xi$$

и использовании при малых h приближенного соотношения

$$th(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2})\approx h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}.$$

В результате преобразований приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\nu^2p=\frac{V_y}{h}$$

с краевыми условиями ограниченности давления на кромках и бесциркуляционности течения газа

$$p(-1)=p(1)=0.$$

В случае вертикальных колебаний с постоянной вдоль профиля амплитудой для частот собственных колебаний системы получаем формулу

$$\nu_n^*=\frac{2n-1}{2}\pi.$$

Обращает на себя внимание независимость асимптотических значений собственных частот от соотношения между длиной профиля и шириной канала. Однако в численных расчетах на основе полного интегрального уравнения такая зависимость, хотя и слабая, все же имеет место, что демонстрируется на рис. 4. Для оценки собственных частот колебаний пластинки на акустической полуплоскости можно также применить асимптотику (для больших частот) к уравнению колебаний тонкого профиля на акустической полуплоскости

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\gamma(s)ds\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{\alpha}e^{-i\alpha x}d\alpha=-V_y.$$

Соответствующее асимптотическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2p}{dx^2}+2\nu^2p=-2i\nu V_y.$$

Нетрудно установить, что собственные частоты для полуплоскости $\nu_{\text{п}}$ и для слоя малой толщины $\nu_{\text{с}}^*$ связаны соотношением

$$\nu_{\text{с}}^*=\sqrt{2}\nu_{\text{п}}^*. \tag{2.2}$$

Результаты расчета по формуле (2.2) согласуются с аналогичными расчетами первой собственной частоты колебаний на акустической полуплоскости, полученные в работе [9] на основе точного решения в виде рядов по функциям Матье.

Расчеты амплитуды колебаний позволяют делать вывод о том, что акустическая полуплоскость создает значительные демпфирующие силы. Однако с уменьшением толщины слоя демпфирование ослабевает, что приводит к обострению резонансных пиков на графиках зависимости амплитуды колебаний от частоты.

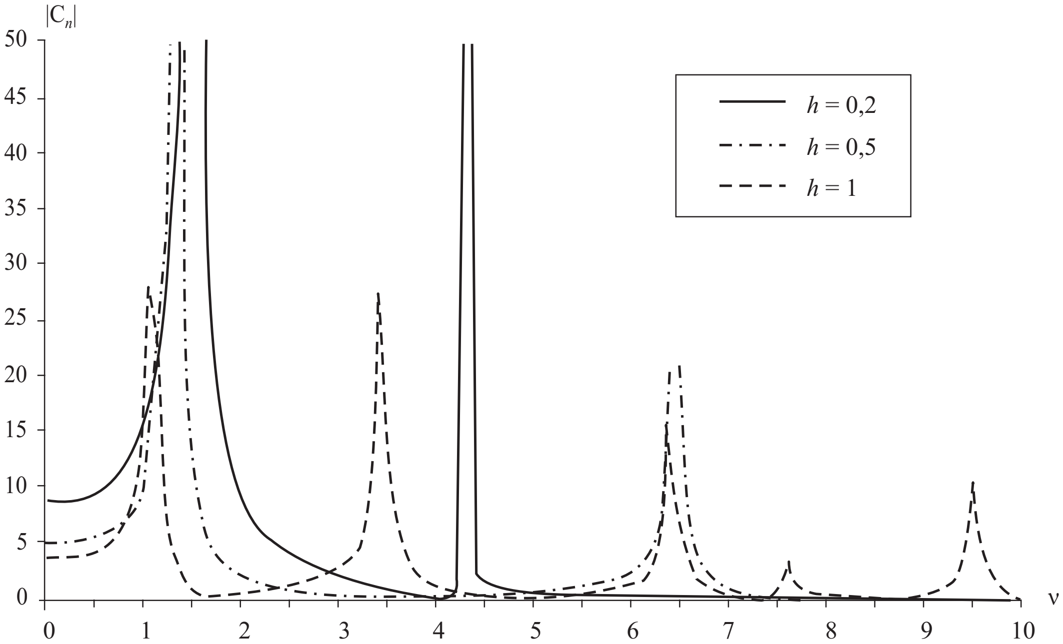

Рис. 4. Зависимость амплитуды C_n от приведенной частоты ν для пластинки, колеблющейся в канале различной ширины

Литература

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М: Наука, 1979. 320 с.
2. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М: Наука, 1986. 386 с.
3. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М: Наука, 1984. 256 с.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М: Научный мир, 1996. 248 с.
5. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М: Наука, 1985. 256 с.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
7. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М: Наука, 1989. 344 с.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М: Наука, 1985. 512 с.
9. *Хаскинд М. Д.* Гидродинамическая теория качки // М.: Наука, 1973. 328 с.

Статья поступила 20 июня 2005 г.
Кубанский государственный университет
© Ефремов И. И., Лукащик Е. П., 2005