

УДК 531.39

EDN: ERCRUG DOI: 10.31429/vestnik-21-3-6-15

Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме

П. Г. Великанов¹✉, Ю. П. Артюхин²

¹ Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

² Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

✉ Великанов Пётр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Для расчета пологих и непологих оболочек вращения в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон продемонстрированы возможности методики комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек.

Ключевые слова: ортотропные пластинки и оболочки, пологие и непологие оболочки вращения, осесимметричная деформация, уравнение и функции Бесселя, функция Ломмеля, гипергеометрические функции.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 3. С. 6–15. EDN: ERCRUG. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-6-15

Поступила 2 февраля 2024 г. После доработки 31 июля 2024 г. Принято 14 августа 2024 г. Публикация 24 сентября 2024 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи, внесение правок и утверждение окончательного варианта (Великанов П.Г.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

The Study of Composites Using the Equations of General Theory of Orthotropic Shells in a Complex Form

P. G. Velikanov¹✉, Yu. P. Artyukhin²

¹ Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

² Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. To calculate shallow and non-shallow shells of rotation under conditions of different predominance of fiber reinforcement stiffness, the possibilities of a method for the complex representation of equations of the general theory of orthotropic shells are demonstrated. The spread of a similar complex representation of the initial differential equations, proposed earlier by Novozhilov V.V. for isotropic shells, orthotropic shells, as shown in the article, leads to some difficulties due to the appearance of complex conjugate unknown functions, which in a number of noted cases can be successfully overcome. Analogies between tangential and bending deformations were noted from the transformed equations of equilibrium and compatibility of deformations, which, with the introduction of complex forces, made it possible to form equations of the general theory of orthotropic shells in a complex form, from which, as a special case, equations for isotropic shells, etc., can be obtained. Taking into account the shallowness or non-shallowness, as well as the axisymmetry of shell deformations, makes it possible to significantly simplify the formulation of the tasks to be solved. The effectiveness of the proposed technique was tested on shallow conical orthotropic shells of rotation and non-shallow cylindrical orthotropic shells.

Keywords: orthotropic plates and shells, shallow and non-shallow shells of rotation, axisymmetric deformation, Bessel equation and functions, Lommel function, hypergeometric functions.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P. G., Artyukhin, Yu. P., The study of composites using the equations of general theory of orthotropic shells in a complex form. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 6–15. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-6-15

Received 2 February 2024. Revised 31 July 2024. Accepted 14 August 2024. Published 24 September 2024. The contribution of each co-author to the process of writing an article at different stages of its creation: the idea of the work (Y.P. Artyukhin), calculations (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article, making edits and approving the final version (P.G. Velikanov). The authors declare no competing interests. © The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Современное авиа-, ракето- и машиностроение очень часто ставят задачи по проектированию и расчету тонкостенных конструкций порой со взаимоисключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую надежность, жесткость, прочность, прочностную надежность и др., а с другой, — экономичность и легкость. Для успешного сочетания вышеперечисленных свойств вполне оправданным представляется использование в конструкциях ортотропных материалов и пластиков [1–10].

В статье на конкретных примерах продемонстрированы возможности методики комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которые позволили существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Особенностью предложенной методики для ортотропных оболочек является появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, которые в случае осесимметричной деформации обращаются в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

Проверка правильности предложенной методики была продемонстрирована на примерах пологой ортотропной конической оболочки и непологой ортотропной цилиндрической оболочки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон.

1. Предварительные сведения

Впервые Новожиловым В.В. в [11] было выполнено комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек. Представление уравнений в комплексной форме позволило существенно упростить решение задачи: сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Попытка построения аналогичного комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек натолкнулось на следующую трудность — появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, что первоначально не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Несмотря на указанную трудность, эта запись позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

2. Постановка задачи

Рассмотрим комплексное преобразование исходных уравнений общей теории ортотропных оболочек (более общее преобразование сделано Артюхиным Ю.П. для многослойной оболочки, составленной из произвольного числа ортотропных слоев [12], а также в [13]). Пусть тонкая ортотропная оболочка постоянной толщины испытывает упругие деформации, малые углы поворота и прогибы. Оси ортотропии параллельны координатным линиям кривизны α_1, α_2 . Считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа–Лява. Положительные направления для тангенциальных усилий (растяжения/сжатия и сдвига) T_j, S и моментов (изгибающих и крутящего) M_j, H считаются направления, принятые в монографии [11].

Из преобразованных уравнений равновесия и совместности деформаций следуют аналогии [11]

$$T_1 \leftrightarrow \kappa_2; \quad T_2 \leftrightarrow \kappa_1; \quad S \leftrightarrow -\tau;$$

$$M_1 \leftrightarrow -\varepsilon_2; \quad M_2 \leftrightarrow -\varepsilon_1; \quad H \leftrightarrow \frac{\omega}{2},$$

где ε_j, ω — тангенциальные, а κ_j, τ — изгибные деформации.

Проведем ряд преобразований и введем комплексные усилия

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_1 - i\mu\kappa_2, \quad (\vec{1}, \vec{2}); \quad \tilde{S} = S + i\mu\tau; \quad i = \sqrt{-1}, \\ \tilde{M}_1 &= M_1 + i\mu\varepsilon_2, \quad (\vec{1}, \vec{2}); \quad \tilde{H} = H - i\mu(\omega/2); \quad \mu = h^2 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}}, \\ \tilde{M}_1 &= ic(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1); \quad \tilde{M}_2 = ic\delta(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2); \\ \tilde{H} &= -ic[\lambda \tilde{S} + (\varepsilon + \nu_2) \tilde{S}], \quad c = h/K, \end{aligned}$$

где соотношения упругости для ортотропных оболочек имеют вид [14]

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), \quad (\vec{1}, \vec{2}); \quad S = \tilde{G}h\omega; \\ M_1 &= D_1(\kappa_1 + \nu_2 \kappa_2), \quad (\vec{1}, \vec{2}); \quad H = \left(\tilde{G}h^3/6\right)\tau, \end{aligned}$$

где $B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}$ и $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$ — жесткости ортотропной оболочки на растяжение и изгиб соответственно; символ $(\vec{1}, \vec{2})$ означает, что последующее выражение получается из предыдущего путем перестановки индексов; \tilde{G} — модуль сдвига; h — толщина; E_j, ν_j — модули упругости Юнга и коэффициенты Пуассона j -го направления; \tilde{T}_1, \tilde{S} — комплексно-сопряженные величины. С учетом введенных обозначений получим [12]

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}) + \frac{ic}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] &= -A_1 A_2 q_1; \\ L_2(\tilde{T}_2, \tilde{T}_1, \tilde{S}) + \frac{ic}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] &= -A_1 A_2 q_2; \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{T}_1}{R_1} + \frac{\tilde{T}_2}{R_2} - \frac{ic}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] \right\} &= q_3, \end{aligned}$$

где

$$L_1(T_1, T_2, S) = \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2;$$

A_j — коэффициенты Ляме; R_j — радиусы кривизны; q_j, q_3 — касательные и нормальная нагрузки, а безразмерные величины $\delta, \lambda, \varepsilon, K$ полностью определяют упругие свойства ортотропного материала

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{E_2}{E_1}; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \delta; \\ \lambda &= \frac{E_2}{4\tilde{G}} + \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\tilde{G}} - \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} - \nu_2. \end{aligned}$$

Для изотропного материала эти параметры равны

$$\delta = \lambda = 1; \quad \varepsilon = 0; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu^2)}.$$

Если допустить, что для ортотропного материала между модулем сдвига (модулем упругости второго рода) и модулями упругости Юнга (модулями упругости первого рода) и коэффициентами Пуассона существует связь

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})},$$

то $\delta = \lambda^2$; $\varepsilon = 0$; $K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)}\lambda$ и задача путем аффинного преобразования координат может быть сведена к задаче деформирования изотропной оболочки. В этом случае решение будет зависеть только от отношения модулей $\delta = E_2/E_1$. Такое решение может давать неплохие результаты, если сдвиговая деформация мало влияет на другие искомые характеристики интегрального типа.

3. Пологие оболочки

Рассмотрим изгиб пологой оболочки нормальной нагрузкой $q_3(\alpha_1, \alpha_2)$. В этом случае в первых двух уравнениях (2.1) можно пренебречь членами уравнения со множителями $1/R_j$ по сравнению с остальными (главными). Упрощенным таким образом двум уравнениям удовлетворим с помощью комплексной функции усилий [11]

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1} \left(\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \right); \\ \tilde{S} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1} \right) \right]; \quad \tilde{F} = F - i\mu w, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где F — вещественная функция усилий; w — прогиб.

Вводя усилия (3.1) в третье уравнение (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{ic}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \nabla_1^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \nabla_2^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\nabla_1^2 \tilde{F} - \nabla_2^2 \tilde{F}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\nabla_2^2 \tilde{F} - \nabla_1^2 \tilde{F}) \right] + \varepsilon \nabla_3^4 \tilde{F} \right\} - D(\tilde{F}) = q_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \right] \right\}; \\ \nabla_2^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \right] + \delta \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \right] \right\}; \\ \nabla_3^4 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \right\}; \\ D() &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2 A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

4. Осесимметричная деформация пологих оболочек

Для решения многих задач теории круглых пластин, сферических и конических оболочек вращения можно эффективно использовать гипергеометрические функции.

Плодотворность привлечения для указанной цели теории гипергеометрических функций объясняется тем, что разрешающие дифференциальные уравнения при определенных профилях пластин и законах изменения кривизны оболочек вращения, имеющих практическую значимость, приводятся к хорошо изученным гипергеометрическим уравнениям. В то же время

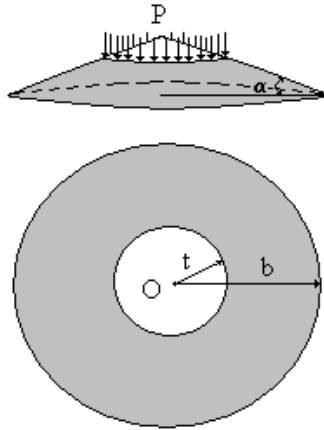


Рис. 1. Коническая оболочка под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки

Fig. 1. Conical shell under concentrated ring load

использование многочисленных соотношений между этими функциями дает возможность существенно улучшать решения: усиливать сходимость и сокращать число рядов, подлежащих суммированию, — операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики Wolfram Mathematica [16, 17]. Ниже приведены результаты по применению гипергеометрических функций в теории оболочек.

5. Осесимметричная деформация пологой конической оболочки

Радиусы кривизны полого конуса примем равными $1/R_1 = 0$; $1/R_2 = \operatorname{tg} \alpha / \rho \approx \alpha / \rho$ при $\alpha < 0,2$, где α — угол конусности (рис. 1).

Из уравнения (3.2) в соответствии с введенными кривизнами следует

$$\frac{d^4 \tilde{F}}{d\rho^4} + \frac{2 d^3 \tilde{F}}{\rho d\rho^3} + \frac{\chi^2}{4} \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{d\tilde{F}}{d\rho} \right) + \frac{\tilde{\beta}^2}{4\rho} \frac{d^2 \tilde{F}}{d\rho^2} = -\frac{i}{c} q_3(\rho), \quad (5.1)$$

где

$$\frac{\chi^2}{4} = \delta; \quad \frac{\tilde{\beta}^2}{4} = \frac{i\alpha}{c}.$$

Проводя для (5.1) преобразования и введя обозначение $\tilde{f} = \frac{d\tilde{F}}{d\rho}$, получим [18–21]

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \left[\tilde{f}'' + \frac{\tilde{f}'}{\rho} + \left(\tilde{\beta}^2 - \frac{\chi^2}{\rho} \right) \frac{\tilde{f}}{4\rho} \right] \right\} = -\frac{i q_3 \rho}{c}. \quad (5.2)$$

Интегрируя однородное уравнение и делая в нем замену $\rho = z^2 / \tilde{\beta}^2$, придем к неоднородному уравнению Бесселя

$$\tilde{f}''(z) + \frac{1}{z} \tilde{f}'(z) + \left(1 - \frac{\chi^2}{z^2} \right) \tilde{f}(z) = \frac{4 \cdot \operatorname{const}}{\tilde{\beta}^2}, \quad (5.3)$$

где const — постоянная интегрирования. Выбирая $\operatorname{const} = \tilde{\beta}^2 / 4$, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Ломмеля $S_{1,n}(z)$.

Таким образом, можно построить общее решение уравнения (5.1) вида [18–21]

$$\tilde{F}(z) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 JK(z, \chi) + \tilde{C}_3 JK(z, -\chi) + \tilde{C}_4 S1(z) + F_q(z), \quad (5.4)$$

где

$$JK(z, \chi) = \int z J_\chi(z) dz = \frac{2^{-\chi} z^{2+\chi}}{(2+\chi)\Gamma(1+\chi)} {}_1F_2 \left[\left\{ 1 + \frac{\chi}{2} \right\}; \left\{ 1 + \chi, 2 + \frac{\chi}{2} \right\}; -\frac{z^2}{4} \right];$$

$$S1(z) = \int z S_{1,\chi}(z) dz = \frac{z^2}{2} \left[1 - {}_2F_3 \left(\{1, 1\}; \left\{ 2, 1 - \frac{\chi}{2}, 1 + \frac{\chi}{2} \right\}; -\frac{z^2}{4} \right) \right];$$

$$S_{1,\chi}(z) = \frac{z^2}{(4-\chi^2)} {}_2F_3 \left[\{1\}; \left\{ 2 - \frac{\chi}{2}, 2 + \frac{\chi}{2} \right\}; -\frac{z^2}{4} \right];$$

$F_q(z)$ — частное решение; $J_\chi(z)$ — функция Бесселя 1-го рода; $\Gamma(1+\chi)$ — гамма-функция.
 Если $q_3 = -q = \text{const}$, т.е. действует равномерное давление, то правая часть уравнения (5.3) в этом случае будет равна $\frac{2iqz^4}{c\tilde{\beta}^6}$. Поэтому

$$F_q(z) = \frac{4iq}{c\tilde{\beta}^8} \int z S_{5,\chi}(z) dz = \frac{4iq}{c\tilde{\beta}^8} S5(z),$$

где

$$S_{5,\chi}(z) = \frac{z^6}{(6^2 - \chi^2)} {}_1F_2 \left[\{1\}; \left\{ 4 - \frac{\chi}{2}, 4 + \frac{\chi}{2} \right\}; -\frac{z^2}{4} \right];$$

$$S5(z) = \frac{z^2}{12} \left\{ 2z^4 + 3z^2(\chi^2 - 4^2) + 6(\chi^4 - 20\chi^2 + 64) \left[1 - {}_2F_3 \left(\{1, 1\}; \left\{ 2, 1 - \frac{\chi}{2}, 1 + \frac{\chi}{2} \right\}; -\frac{z^2}{4} \right) \right] \right\}.$$

Исследование вышеприведенных выражений показало, что коническая оболочка в вершине $\rho = 0$; $z = 0$ при $\chi < 0$ имеет не только физическую, но и геометрическую особенности — скачок угла. Поэтому следует исключить эту особую точку и рассматривать усеченную коническую оболочку в области $b_0 < \rho < b$.

6. Непологая цилиндрическая ортотропная оболочка

Введем на непологой цилиндрической оболочке линии кривизны $\xi = x/R$, $\phi = y/R$, R — радиус цилиндра.

В соответствии с этими параметрами Ляме будут: $A_1 = A_2 = R$, а уравнения (2.1) при $1/R_1 = 0$, $R_2 = R$ примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \phi} = -q_1 R; \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(1 + \frac{i\lambda}{2b^2} \right) \tilde{T}_2 + \frac{i\delta}{2b^2} \tilde{T}_1 + \frac{i\varepsilon}{2b^2} \tilde{\bar{T}}_2 \right] = -q_2 R; \\ \tilde{T}_2 - \frac{i}{2b^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}_2}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \phi^2} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}_2}{\partial \phi^2} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \tilde{\bar{T}}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\bar{T}}_2}{\partial \phi^2} \right) \right] = q_3 R, \end{cases} \quad (6.1)$$

где

$$2b^2 = \frac{R}{h} \sqrt{12\delta(1 - \nu_1\nu_2)}.$$

Приведем систему (6.1) к одному разрешающему уравнению, считая $q_1 = q_2 = 0$. Первое уравнение удовлетворяется тождественно, если положить

$$\tilde{T}_1 = -\frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{i\lambda}{2b^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2}; \quad \tilde{S} = \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{i\lambda}{2b^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \phi}. \quad (6.2)$$

Второму уравнению можно удовлетворить с погрешностью $(h/R)^2$ по сравнению с единицей, используя следующее выражение для \tilde{T}_2 :

$$\tilde{T}_2 = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} - \frac{i\delta}{2b^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} - \frac{i\varepsilon}{2b^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} \right). \quad (6.3)$$

Выбранная таким образом комплексная функция \tilde{F} с такой же степенью точности будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \phi^4} + 2ib^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} \right) = -i2b^2 R^3 q_3. \quad (6.4)$$

Соотношения (6.2) и (6.3) дают возможность определить выражения для усилий и кривизн

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{R^2} \left(\operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} - \frac{\lambda}{2b^2} \operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} \right); \quad S = \frac{1}{R^2} \left(\operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \phi} - \frac{\lambda}{2b^2} \operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \phi} \right); \\ T_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(\operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + \frac{\delta}{2b^2} \operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} - \frac{\varepsilon}{2b^2} \operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} \right); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{\mu R^2} \left(\operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} - \frac{\delta}{2b^2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} - \frac{\varepsilon}{2b^2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} \right); \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\mu R^2} \left(\operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} + \frac{\lambda}{2b^2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} \right); \quad \tau = \frac{1}{\mu R^2} \left(\operatorname{Im} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \phi} + \frac{\lambda}{2b^2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Компоненты изменения кривизн и тангенциальные деформации срединной поверхности выражаются через касательные смещения u , v и прогиб w следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right); \quad \tau = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right); \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right); \quad \omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Пусть на свободно опертую замкнутую цилиндрическую оболочку длины L в точке $\xi = \xi_0$, $\phi = 0$ действует сосредоточенная нагрузка P

$$q_3 = -\frac{P}{R^2} \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi) = -\frac{P}{R^2} \delta(\xi - \xi_0, \phi).$$

Граничные условия будут удовлетворены, если комплексную функцию \tilde{F} представить в виде двойного тригонометрического ряда

$$\tilde{F} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \sin(f_m \xi) \cos(n\phi). \quad (6.7)$$

Можно разложить в аналогичный ряд периодическую обобщенную δ -функцию Дирака

$$\delta(\xi - \xi_0, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0^n) q_m \sin(f_m \xi) \cos(n\phi). \quad (6.8)$$

Здесь

$$q_m = \frac{\sin(f_m \xi_0)}{\pi \xi_1}, \quad \xi_1 = \frac{L}{R}, \quad \delta_0^n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad f_m = \frac{m\pi}{\xi_1}.$$

Таблица 1. Свойства однонаправленных композитов на основе эпоксидной смолы (волокна занимают порядка 60 % всего объема композита) [22]

Table 1. Properties of unidirectional composites based on epoxy resin (fiber occupy about 60 % of the total volume of the composite) [22]

	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	ν_1	ν_2	\tilde{G} , ГПа	$N_{\text{матер}}$
Углепластик (волокна AS)	140	8,96	0,3	0,0192	7,1	1
Углепластик (волокна IM6)	200	11,1	0,32	0,01776	8,35	2
Органопластик (волокна кевлар-49)	76	5,5	0,33	0,023882	2,33	3

Подставляя (6.7), (6.8) в уравнение (6.4), получаем

$$\begin{cases} a_{mn}F_{mn} + b_{mn}\bar{F}_{mn} = ic_{mn}; \\ b_{mn}F_{mn} + \bar{a}_{mn}\bar{F}_{mn} = -ic_{mn}, \end{cases} \quad (6.9)$$

где

$$a_{mn} = a_{mn}^{(1)} - ia_m^{(2)}; \quad b_{mn} = \varepsilon(2n^2 - 1)f_m^2; \quad c_{mn} = 2b^2RP(2 - \delta_0^n)q_m; \\ a_{mn}^{(1)} = f_m^4 + 2\lambda f_m^2 n^2 + \delta n^2(n^2 - 1); \quad a_m^{(2)} = 2b^2 f_m^2.$$

Из решения (6.9) следует:

$$F_{mn} = \frac{c_{mn}}{\Delta_{mn}} \left[i \left(a_{mn}^{(1)} + b_{mn} \right) - a_m^{(2)} \right]; \quad \Delta_{mn} = \left(a_{mn}^{(1)} \right)^2 + \left(a_m^{(2)} \right)^2 - b_{mn}^2.$$

Определяя компоненты деформаций (6.5) согласно (6.6) и интегрируя с учетом граничных условий, найдем прогиб

$$w = -\frac{PR^2}{D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0^n) w_{mn} \sin(f_m \xi) \cos(n\phi),$$

где

$$w_{mn} = \frac{q_m}{\Delta_{mn}} \left[a_{mn}^{(1)} + \delta n^2 + 2\varepsilon n^2 f_m^2 \right].$$

Если сила P приложена в середине пролета, то $\xi_0 = \xi_1/2$. Введем безразмерную величину, связанную с максимальным прогибом ($\xi = \xi_1/2$)

$$w_0 = -12(1 - \nu_1\nu_2)\gamma^3 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} (2 - \delta_0^n) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right); \quad (6.10)$$

$$w_0 = \frac{w_{\max} E_1 R}{P}; \quad w_{\max} = w\left(\frac{\xi_1}{2}, 0\right); \quad \gamma = \frac{R}{h}.$$

Прогиб (6.10) в точке приложения нагрузки имеет медленную сходимость, в отличие от значений моментов, ряды для которых в особой точке расходятся (имеют логарифмическую особенность). Для их вычисления необходимо сосредоточенную нагрузку равномерно распределить по малой площадке.

Сделаем некоторые вычисления ряда (6.10) для однонаправленного композита на основе табл. 1 при следующей геометрии $R/h = \gamma = 100$, $\xi_1 = L/R = 1$, $m_{\max} = n_{\max} = 191$, что дает при $\delta < 1$ три верных знака, а при $\delta > 1$ четыре верных знака.

Табл. 2 показывает значения безразмерного прогиба (6.10) для различных материалов при расположении волокон по длине цилиндра ($\delta < 1$) и по окружности ($\delta > 1$). В последней строке табл. 2 приведены значения безразмерного прогиба (частный случай слоистой цилиндрической ортотропной оболочки, изготовленной из композиционного материала), которые свидетельствуют о достаточной точности выведенных уравнений. Эти уравнения также учитывают непологость цилиндрической ортотропной оболочки и выведены на основе общих уравнений в вещественной форме при отбрасывании некоторых малых слагаемых.

Таблица 2. Сравнение прогибов для цилиндрической оболочки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон

Table 2. Comparison of deflections for a cylindrical shell under different conditions predominant stiffness of fiber reinforcement

$N_{\text{матер}}$	1 ($\delta = 0,064$)	1 ($\delta = 15,625$)	2 ($\delta = 0,056$)	2 ($\delta = 18$)	3 ($\delta = 0,07$)	3 ($\delta = 13,8$)
$ w_0 $	86045	2651,8	97932	2496,1	95141	3303
$ w_{0M} $	86095	2652,7	98013	2497,4	95346	3307

Заключение

В статье было проведено исследование методики использования комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которое позволило в комплексной форме существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений, даже несмотря на появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволила более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях появилась возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях, например, для пологих и непологих оболочек в условиях свободного опирания влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь, поэтому для указанных случаев были исследованы пологие конические ортотропные оболочки вращения и непологие цилиндрические ортотропные оболочки.

Литература [References]

1. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань, ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the boundary element method*. Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]
2. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропной пластины, лежащей на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика»*, 2008, т. 8, вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of an isotropic plate lying on a complex two-parameter elastic base. *Proceedings of the Saratov University. The series "Mathematics. Mechanics. Informatics"*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]
3. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Решение задачи изгиба анизотропной пластины методом граничных элементов. В сб. *Актуальные проблемы механики сплошных сред – 2020*, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., The solution of an anisotropic plate bending problem by the boundary element method. In *Actual problems of continuum mechanics – 2020*, pp. 105–111. (in Russian)]
4. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. *Актуальные проблемы механики сплошных сред – 2020*, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. *Actual problems of continuum mechanics – 2020*, pp. 111–115. (in Russian)]
5. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Using the indirect boundary element method for calculating isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak-Vlasov. *Bulletin of Samara University. Natural science series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]
6. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the method of boundary elements. *Bulletin of the Samara University. Natural science series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]

7. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Bulletin of Samara University. Natural science series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 46–54. (in Russian)]
8. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Bulletin of Samara University. Natural science series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 40–52. (in Russian)]
9. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)]
10. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. *TransSiberia 2023. E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 402, art. 11010. DOI: 0.1051/e3sconf/202340211010
11. Новожилов, В.В., *Теория тонких оболочек*. Москва, Судпромгиз, 1962. [Novozhilov, V.V., *Theory of thin shells*. Moscow, Sudpromgiz, 1962. (in Russian)]
12. Артюхин, Ю.П., Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки. В сб. *Исследования по теории пластин и оболочек*, вып. 4. Казань, Изд-во КГУ, 1966, с. 91–110. [Artyukhin, Yu.P., Calculation of single-layer and multilayer orthotropic shells for local loads. In *Research on the theory of plates and shells*, iss. 4. Kazan, Publishing House of KSU, 1966, pp. 91–110. (in Russian)]
13. Артюхин, Ю.П., Великанов, П.Г., Действие локальных нагрузок на ортотропную сферическую и коническую оболочки вращения. В сб. *Материалы Всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением»*. Казань, 2008, с. 22–23. [Artyukhin, Yu.P., Velikanov, P.G., The effect of local loads on orthotropic spherical and conical shells of rotation. In *Proc. of the All-Russian Seminar “Analytical mechanics, stability and motion control”*. Kazan, 2008, pp. 22–23. (in Russian)]
14. Амбарцумян, С.А., *Теория анизотропных оболочек*. Москва, Физматгиз, 1961. [Ambartsumyan, S.A., *Theory of anisotropic shells*. Moscow, Fizmatgiz, 1961. (in Russian)]
15. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society. Publishing house of CamPI, 2002. (in Russian)]
16. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Издательство Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]
17. Артюхин, Ю.П., Изгиб пологих ортотропных оболочек вращения силой, приложенной в полюсе. *Исследования по теории пластин и оболочек*, вып. 5. Казань, Изд-во КГУ, 1966, с. 152–160. [Artyukhin, Yu.P., Bending of shallow orthotropic shells of rotation by a force applied at the pole. *Research on the theory of plates and shells*, vol. 5. Kazan, Publishing House of KSU, 1966, pp. 152–160. (in Russian)]
18. Бейтмен, Г., Эрдейи, А., *Высшие трансцендентные функции*, т. 2. Москва, Наука, 1974. [Bateman, G., Erdeli, A., *Higher transcendental functions*, vol. 2. Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]
19. Ватсон, Г.Н., *Теория бесселевых функций*, ч. 1. Москва, Иностранная литература, 1949. [Watson, G.N., *Theory of Bessel functions*, pt. 1. Moscow, Inostrannaya literatura, 1949. (in Russian)]
20. Снеддон, И., *Преобразования Фурье*. Москва, Иностранная литература, 1955. [Sneddon, I., *Fourier transforms*. Moscow, Inostrannaya literatura, 1955. (in Russian)]
21. Градштейн, И.С., Рыжик, И.М., *Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений*. Москва, Наука, 1971. [Gradstein, I.S., Ryzhik, I.M., *Tables of integrals, sums of series and products*. Moscow, Nauka, 1971. (in Russian)]
22. Мэттьюз, Ф., Роллингс, Р., *Композитные материалы. Механика и технология*. Москва, Техносфера, 2004. [Matthews, F., Rawlings, R., *Composite materials. Mechanics and technology*. Moscow, Technosphere, 2004. (in Russian)]