

УДК 519.63

EDN: NNULDD DOI: 10.31429/vestnik-21-1-34-40

Вычислительные аспекты построения градиентов в пространстве параметров при численной реализации вариационных алгоритмов идентификации параметров модели переноса пассивной примеси

В. С. Кочергин  , С. В. Кочергин 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе представлена разностная дискретизация уравнения переноса пассивной примеси и согласованная аппроксимация градиентов полей решений основной и сопряженных задач при реализации вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений и идентификации параметров модели. Представлено широкое параметрическое семейство разностных схем для интегрирования используемой модели переноса, обладающих определенными свойствами при различных значениях параметров. Выписаны соответствующие аппроксимации градиентов полей, необходимых при реализации вариационного алгоритма идентификации.

Ключевые слова: модель переноса, вариационный алгоритм ассимиляции, численная дискретизация.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).


Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вычислительные аспекты построения градиентов в пространстве параметров при численной реализации вариационных алгоритмов идентификации параметров модели переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 1. С. 34–40. EDN: NNULDD. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-34-40

Поступила 8 марта 2024 г. После доработки 23 марта 2024 г. Принято 25 марта 2024 г. Публикация 26 марта 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Computational Aspects of Constructing Field Gradients in the Numerical Implementation of Variational Algorithms for Identifying the Parameters of the Transfer Model

V. S. Kochergin , S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. When solving environmental problems, methods of numerical modeling of dynamic processes in reservoirs, modeling the spread of various impurities and pollutants occupy an important place. A special place in this case is occupied by methods of assimilation of measurement data in numerical models. One of the approaches to solving such problems is the variational approach. Such algorithms are based on solving conjugate problems and problems in variations in the identification of numerical simulation parameters. The search for such parameters is carried out by minimizing the prediction quality functional, which characterizes the deviations of model estimates of the state from the measurement data. When implementing the variational algorithm, the gradient components in the parameter space are determined. If the identification of the initial field requires the presence of the solution of the conjugate problem itself, then when determining the coefficients of turbulent diffusion, it is necessary to calculate the spatial derivatives of the concentration field itself, as well as the solutions of the conjugate problem. In this paper, we consider the difference discretization of the passive impurity transfer equation and the consistent approximation of the gradients of the fields of solutions to the main and associated problems in the

implementation of a variational algorithm for assimilation of measurement data and identification of model parameters. A wide parametric family of difference schemes for integrating the used transfer model with certain properties at different parameter values is presented. The corresponding approximations of the gradients of the fields necessary for the implementation of the variational identification algorithm are written out.

Keywords: transfer model, variational assimilation algorithm, numerical discretization.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Computational aspects of constructing field gradients in the numerical implementation of variational algorithms for identifying the parameters of the transfer model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 34–40. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-34-40

Received 8 March 2024. Revised 23 March 2024. Accepted 25 March 2024. Published 26 March 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

При решении задач экологической направленности важное место занимают методы численного моделирования динамических процессов в водоемах [1], моделирование распространения и трансформации различных примесей и загрязнений. Особое место при этом занимают методы ассимиляции данных измерений в численных моделях. Одним из подходов к решению таких задач является вариационный подход. Основы вариационного подхода заложены в работах [1–4] и в монографической литературе [5–9]. Достаточно полный обзор по данной тематике представлен в работе [10]. Такие алгоритмы основаны [11] на решении сопряженных задач и задач в вариациях при идентификации параметров численного моделирования. Поиск таких параметров осуществляется за счет минимизации функционала качества прогноза, характеризующего отклонения модельных оценок состояния от данных измерений. При решении задачи переноса пассивной примеси ограничения модели линейны, поэтому не меняют общей выпуклости функционала. Это позволяет осуществлять итерационно адекватный поиск искомых параметров. При реализации вариационного алгоритма определяются компоненты градиента в пространстве параметров. Если для идентификации начального поля требуется наличие самого решения сопряженной задачи, то при определении коэффициентов турбулентной диффузии необходимо вычислять пространственные производные от самого поля концентрации, а также решения сопряженной задачи.

1. Модель переноса примеси

Рассмотрим следующее уравнение переноса пассивной примеси в области интегрирования $M_t = M \times [0, \bar{t}]$,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} = K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + A_H \Delta C \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (1.2)$$

и начальными данными

$$t = 0 : C(x, y, z) = C_0(x, y, z), \quad (1.3)$$

где t — время; C — концентрация примеси; U, V, W — компоненты поля скорости; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно; \mathbf{n} — нормаль к боковой границе.

При проведении соответствующих выкладок нами использовалось уравнение неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

2. Вариационный алгоритм идентификации

Пусть данные измерений поступают в моменты времени $t_m \in [0, T]$, тогда задача ассимиляции данных измерений $C_{t_m}^{\text{изм}}$ состоит в нахождении экстремума выпуклого квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} (P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}))_{M_t}, \quad (2.1)$$

где M — область интегрирования модели на интервале времени $[0, T]$, R — оператор проектирования в точки наблюдений, P — оператор расширения нулями функций невязок заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (2.1) со связями, накладываемыми моделью (1.1)–(1.3), эквивалентна поиску минимума выпуклого функционала

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_H \frac{\partial C}{\partial z}, C^* \right]_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M, \quad (2.2)$$

где $M_t = M \times [0, T]$.

Интегрируя вариацию функционала (2.2) по частям с учетом уравнения неразрывности (1.4) и краевых условий, можно получить вариации функционала по отношению к различным параметрам модели переноса.

Из определения стационарности функционала по отношению к вариациям тех или иных параметров [12] и определения градиента имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{C_0} I &= C^*(x, y, z, 0), \\ \nabla_{A_H} I &= \int_0^T \iiint_M \left(\frac{\partial C^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) dx dy dz dt, \\ \nabla_{K_H} I &= \int_0^T \iiint_M \left(\frac{\partial C^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где C^* — множители Лагранжа являются решением сопряженной задачи

$$\begin{aligned} - \frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial C^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_H \frac{\partial C^*}{\partial z} = -P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad z = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \quad z = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (2.6)$$

Алгоритм определения параметров в целом состоит в следующем:

- при интегрировании модели (1.1)–(1.3) запоминаются невязки прогноза для моментов времени $t_m \in [0, T]$;
- решается сопряженная задача (2.4)–(2.6) и строятся соответствующие градиенты функционала (2.3) в зависимости от поставленной задачи;
- интегрируется задача в вариациях;
- находится итерационный параметр τ ;
- осуществляется итерационный спуск в пространстве параметров для минимизации функционала (2.2).

Как видно из (2.3), для вычисления градиентов при определении коэффициентов модели необходимо находить градиенты поля концентрации и решения сопряженной задачи по пространственным переменным. Из (2.3) видно, что даже небольшие ошибки в их определении суммируются при вычислении интегралов. Поэтому важно, чтобы аппроксимация таких производных была согласована с разностной дискретизацией основной задачи.

3. Разностная дискретизация основной задачи

Рассмотрим следующую разностную дискретизацию уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \left(\frac{1+\theta}{2} D_x^+ C_{i,j,k} + \frac{1-\theta}{2} D_x^- C_{i,j,k} \right) + V \left(\frac{1+\theta}{2} D_y^+ C_{i,j,k} + \frac{1-\theta}{2} D_y^- C_{i,j,k} \right) + \\ + W \left(\frac{1+\theta}{2} D_z^+ C_{i,j,k} + \frac{1-\theta}{2} D_z^- C_{i,j,k} \right) - \\ - A_H \left(\frac{C_{i+1,j,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{C_{i,j+1,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \right) - \\ - K \left(\frac{C_{i,j,k+1} - 2C_{i,j,k} + C_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_y^+ C_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j+1,k} - C_{i,j,k}}{\Delta y}, & D_y^- C_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j,k} - C_{i,j-1,k}}{\Delta y}, \\ D_x^+ C_{i,j,k} &= \frac{C_{i+1,j,k} - C_{i,j,k}}{\Delta x}, & D_x^- C_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j,k} - C_{i-1,j,k}}{\Delta x}, \\ D_z^+ C_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j,k+1} - C_{i,j,k}}{\Delta z}, & D_z^- C_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j,k} - C_{i,j,k-1}}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Функцию $\theta(R)$ можно выбирать различными способами, в частности, в литературных источниках можно найти следующие варианты:

1. $\theta(R) = 0$ – схема с центральной разностью [13];
2. $\theta(R) = \text{sign}(R)$ – схема с направленной разностью [13];
3. $\theta(R) = \frac{|R|}{1+|R|} \cdot \text{sign}(R)$ – схема Самарского А.А. [14];
4. $\theta(R) = \frac{|R|}{1+|R|+|R|^2} \cdot R$ – схема Булеева Н.И., Тимухина Г.И. [15];
5. $\theta(R) = \frac{1+2|R|}{3+3|R|+2|R|^2} \cdot R$ – схема Булеева Н.И. [16];
6. $\theta(R) = \text{cth}(R) - \frac{1}{R}$ – схема Ильина А.М. [17].

В каждом конкретном случае по направлениям вместо R берется один из вариантов

$$R_x \equiv \frac{U\Delta x}{2A_H}, \quad R_y \equiv \frac{V\Delta y}{2A_H}, \quad R_z \equiv \frac{W\Delta z}{2K}.$$

Перепишем (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{A_H}{\Delta x^2} (1+R_x+R_x\theta) C_{i+1,j,k} - \frac{A_H}{\Delta x^2} (1-R_x+R_x\theta) C_{i-1,j,k} + \frac{2A_H}{\Delta x^2} (1-R_x\theta) C_{i,j,k} - \\ - \frac{A_H}{\Delta y^2} (1+R_y+R_y\theta) C_{i,j+1,k} - \frac{A_H}{\Delta y^2} (1-R_y+R_y\theta) C_{i,j-1,k} + \frac{2A_H}{\Delta y^2} (1-R_y\theta) C_{i,j,k} - \\ - \frac{K}{\Delta z^2} (1+R_z+R_z\theta) C_{i,j,k+1} - \frac{K}{\Delta z^2} (1-R_z+R_z\theta) C_{i,j,k-1} + \frac{2K}{\Delta z^2} (1-R_z\theta) C_{i,j,k}. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Выбор функции $\theta(R)$ с использованием вариантов 2–6 гарантирует однозначную разрешимость системы уравнений (3.1), так как в этом случае сеточный оператор этой системы будет оператором монотонного вида [18]. Легко проверить, что аналогичная схема может быть записана несколько по другому в терминах $D_x^+, D_x^-, D_y^+, D_y^-, D_z^+, D_z^-$. В целом записанная схема представляет из себя целый класс монотонных консервативных схем [19].

Во внутренних узлах расчетной сетки имеем аппроксимации градиентов

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{1-\theta}{2} [1+R_x(\theta+1)] D_x^+ C_{i,j,k} + \frac{1+\theta}{2} [1+R_x(\theta-1)] D_x^- C_{i,j,k}, \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{1-\theta}{2} [1+R_y(\theta+1)] D_y^+ C_{i,j,k} + \frac{1+\theta}{2} [1+R_y(\theta-1)] D_y^- C_{i,j,k}, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{1-\theta}{2} [1+R_z(\theta+1)] D_z^+ C_{i,j,k} + \frac{1+\theta}{2} [1+R_z(\theta-1)] D_z^- C_{i,j,k}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

На левой вертикальной границе имеем

$$\frac{\partial C}{\partial x} = [1+R_x(\theta+1)] D_x^+ C_{i,j,k} - \frac{\Delta x(1+\theta)}{2\Delta y} (D_y^+ C_{i,j,k} - D_y^- C_{i,j,k}). \quad (3.4)$$

На правой вертикальной границе

$$\frac{\partial C}{\partial x} = [1+R_x(\theta-1)] D_x^- C_{i,j,k} - \frac{\Delta x(1-\theta)}{2\Delta y} (D_y^+ C_{i,j,k} - D_y^- C_{i,j,k}). \quad (3.5)$$

На нижней горизонтальной границе имеем

$$\frac{\partial C}{\partial y} = D_y^+ C_{i,j,k} + \frac{\Delta y}{2\Delta x} \{ [1+R(\theta+1)] D_x^+ C_{i,j,k} - [1+R(\theta-1)] D_x^- C_{i,j,k} \}. \quad (3.6)$$

На верхней горизонтальной границе

$$\frac{\partial C}{\partial y} = D_y^- C_{i,j,k} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} \{ [1+R(\theta+1)] D_x^+ C_{i,j,k} - [1+R(\theta-1)] D_x^- C_{i,j,k} \}. \quad (3.7)$$

Пусть при аппроксимации уравнения использована схема центральных разностей. Тогда имеем следующую аппроксимацию производных во внутренних точках области (при $\theta = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{1}{2} [1+R_x] D_x^+ C_{i,j,k} + \frac{1}{2} [1-R_x] D_x^- C_{i,j,k} = \\ &= \frac{C_{i+1,j,k} - C_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \frac{R_x \Delta x}{2} \left[\frac{C_{i+1,j,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right] \sim \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{R_x \Delta x}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

То есть при расчете градиента внутри области в согласованной схеме появляется некоторая дополнительная вязкость. Аналогично можно выписать формулы для расчета на границе области

$$\frac{\partial C}{\partial x} \sim [1+R_x] D_x^+ C_{i,j,k} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} [D_y^+ C_{i,j,k} - D_y^- C_{i,j,k}], \quad (\text{левая вертикальная граница});$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \sim [1-R_x] D_x^- C_{i,j,k} - \frac{\Delta x}{2\Delta y} [D_y^+ C_{i,j,k} - D_y^- C_{i,j,k}], \quad (\text{правая вертикальная граница}).$$

Аналогично выписываются формулы по другим направлениям. Например, имеем на нижней горизонтальной границе

$$\frac{\partial C}{\partial y} = D_y^+ C_{i,j,k} + \frac{\Delta y}{2\Delta x} \{ [1+R_y] D_x^+ C_{i,j,k} - [1-R_y] D_x^- C_{i,j,k} \},$$

и на верхней горизонтально границе

$$\frac{\partial C}{\partial y} = D_y^- C_{i,j,k} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} \{ [1 + R] D_x^+ C_{i,j,k} - [1 - R] D_x^- C_{i,j,k} \}.$$

Аналогично выписываются все необходимые формулы при использовании схемы направленной разности. При $\theta(R) = \text{sign}(R)$ и $U \geq 0$ из (3.3) имеем $\partial C/\partial x = D_x^- C_{i,j,k}$, а при $U \leq 0$ получаем $\partial C/\partial x = D_x^+ C_{i,j,k}$. Аналогично вместо (3.3) можно выписать соответствующие аппроксимации по другим направлениям в пространстве. Видно, что при $\theta(R) = \text{sign}(R)$ получаем схему направленной разности в чистом виде. В работе [19] показано преимущество схемы Ильина при аппроксимации задачи. При вычислении градиентов в пространстве параметров ошибки вычисления градиентов полей суммируются (осуществляется интегрирование см. (2.3)), что существенно при решении таких задач. Поэтому использование схемы (3.2) и аппроксимаций (3.3)–(3.7) при соответствующем выборе $\theta(R)$ (схема Ильина) для вычисления градиентов полей предпочтительно.

Заключение

Для численной реализации вариационного подхода к задаче ассимиляции данных измерений рассмотрены алгоритмы и процедуры идентификации различных входных параметров модели переноса пассивной примеси за счет ассимиляции данных измерений. Процедуры используют решения основной и сопряженных задач при организации итерационного процесса. Причем при идентификации параметров модели в некоторых случаях требуется построение градиентов от самого поля концентрации и от решения сопряженной задачи. При вычислении градиентов предлагается использование согласованных аппроксимаций с используемой при интегрировании основной задачи. В целом представленные алгоритмы реализованы при решении различных задач, в том числе при ассимиляции спутниковой информации.

Литература [References]

1. Sasaki, Y., A fundamental study of the numerical prediction based on the variational principle. *Journal of the Meteorological Society of Japan, Ser. 2*, 1955, vol. 33, no. 6, pp. 262–275.
2. Sasaki, Y., Some basic formations in numerical variational analysis. *Mon. Wea. Rev.*, 1970, vol. 98, pp. 875–883.
3. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In Marchuk, G.I. (ed.), *Proc. of the IFIP-TC7 Working conf. "Modelling and Optimization of Complex Systems"*. New York, Springer, 1978, pp. 240–252.
4. Пененко, В.В., *Методы численного моделирования атмосферных процессов*. Ленинград, Гидрометеоздат, 1981. [Penenko, V.V., *Metody chislennogo modelirovaniya atmosferynykh protsessov = Methods for numerical modeling of atmospheric processes*. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1981 (in Russian)]
5. Лионс, Ж.Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. Москва, Мир, 1972. [Lyons, J.L., *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisuyemyimi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi = Optimal control of systems described by partial differential equations*. Moscow, Mir, 1972. (in Russian)]
6. Лионс, Ж.Л., *Управление сингулярными распределенными системами*. Москва, Наука, 1987. [Lyons, J.L., *Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami = Managing Singular Distributed Systems*. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)]
7. Лионс, Ж.Л., *Ценность. Сопряженная функция*. Москва, Атомиздат, 1972. [Lyons, J.L., *Tsennost'. Sopryazhennaya funktsiya = Value. Conjugate function*. Moscow, Atomizdat, 1972. (in Russian)]
8. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical modeling in environmental problems*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
9. Марчук, Г.И., Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана. *Метеорология и гидрология*, 1974, № 2, с. 17–34. [Marchuk, G.I., Basic and conjugate equations of the dynamics of the atmosphere and ocean. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorology and hydrology*, 1974, no. 2, pp. 17–34. (in Russian)]

10. Shutyaev, V.P., Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 2019, vol. 55, pp. 17–31. DOI: [10.1134/S0001433819010080](https://doi.org/10.1134/S0001433819010080)
11. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма. *Морской гидрофиз. журн.*, 2015, № 2. Р. 79–88. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of the power of the pollution source in the Kazantip Bay based on the application of a variational algorithm. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2015, no. 2, pp. 79–88. (in Russian)] DOI: [10.22449/0233-7584-2015-2-79-88](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2015-2-79-88)
12. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Станичный, С.В., Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море. *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*, 2020, т. 17, № 2, с. 40–48. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of the power of the pollution source in the Kazantip Bay based on the application of a variational algorithm. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2015, no. 2, p. 79–88. (in Russian)]
13. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980. [Roach, P., *Vychislitel'naya gidrodinamika = Computational Fluid Dynamics*. Moscow, Mir, 1980. (in Russian)]
14. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1983. [Samarsky, A.A., *Teoriya raznostnykh skhem = Theory of Difference Schemes*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
15. Булеев, Н.И., Тимухин, Г.И., О составлении разностных уравнений гидродинамики вязкой неоднородной среды. *Численные методы механики сплошной среды*, 1972, т. 3, № 4, с. 19–26. [Buleev, N.I., Timukhin, G.I., On the compilation of difference equations for the hydrodynamics of a viscous inhomogeneous medium. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy = Numerical methods of continuum mechanics*, 1972, vol. 3, no. 4, pp. 19–26. (in Russian)]
16. Булеев, Н.И., *Пространственная модель турбулентного обмена*. Москва, Наука, 1983. [Buleev, N.I., *Prostranstvennaya model' turbulentnogo obmena = Spatial model of turbulent exchange*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
17. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*, 1969, vol. 6, issue 2, pp. 237–248. (in Russian)]
18. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. Москва, Мир, 1983. [Doolan, E., Miller, J., Shielders, W., *Ravnomernyye chislennyye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem = Uniform Numerical Methods for Solving Boundary Layer Problems*. Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]
19. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости. *Морской гидрофизический журнал*, 2023, т. 39, № 3, с. 299–313. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Calculation of total flow components in models of wind fluid motion. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2023, vol. 39, no. 3, pp. 299–313. (in Russian)] EDN: [RUBXPZ](https://edn.rubxpz.ru). DOI: [10.29039/0233-7584-2023-3-299-313](https://doi.org/10.29039/0233-7584-2023-3-299-313)