

УДК 533.69

EDN: UDUZEL DOI: 10.31429/vestnik-21-1-41-46

Аналитический метод в линейной трехмерной аэродинамике тонкого крыла с винглетами

И. К. Самсонов  , М. А. Сумбатян 

Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая ул., 105/42, Ростов-на-Дону, 344000, Россия

✉ Самсонов Илья Константинович; ORCID 0000-0003-1248-9416; SPIN 9628-8577; e-mail: hazar7073@yandex.ru

Аннотация. В работе представлен аналитический метод в классической задаче обтекания тонкой прямоугольной пластинки с винглетами и без винглетов. Описана методика расчета индуктивного сопротивления тонкой пластинки. Рассмотрена методика расчета подсосывающей силы для расчета индуктивного сопротивления для пластинки с винглетами. Описана дискретизация уравнения индуктивного сопротивления. Показано сравнение аэродинамического качества для пластинок с винглетами и без винглетов. Сделаны выводы о влиянии винглетов на аэродинамическое качество тонкой пластинки с винглетами с учетом подсосывающей силы.

Ключевые слова: аэродинамика, тонкая прямоугольная пластинка, винглеты, подъемная сила, аэродинамическое качество.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Самсонов И. К., Сумбатян М. А. Аналитический метод в линейной трехмерной аэродинамике тонкого крыла с винглетами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–46. EDN: UDUZEL. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-41-46

Поступила 12 марта 2024 г. После доработки 23 марта 2024 г. Принято 25 марта 2024 г. Публикация 26 марта 2024 г.

Постановка задачи, расчетные формулы для определения индуктивного сопротивления, а также анализ полученных результатов (Сумбатян М.А.). Дискретизация системы интегральных уравнений, их численный расчет, а также анализ полученных результатов (Самсонов И.К.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Analytical Method in the Linear Three-Dimensional Aerodynamics of a Thin Wing with Winglets

I. K. Samsonov , M. A. Sumbatyan

Southern Federal University, Bolshaya Sadovaya str., 105/42, Rostov-on-Don, 344000, Russia

✉ Ilya K. Samsonov; ORCID 0000-0003-1248-9416; e-mail: hazar7073@yandex.ru

Abstract. The paper presents an analytical method in the classical problem of flow around a thin rectangular plate with and without winglets. There is described the method for calculating inductive reactance of the thin plate. The method for calculating the suction force, to calculate the inductive reactance of the plate with winglets is considered. There is also described a discretization of equations, to calculate inductive reactance. Then we demonstrate a comparison of the aerodynamic quality for plates with and without winglets. After that, we give some conclusions about the influence of winglets on the aerodynamic quality of the thin plate with winglets, taking into account the suction force.

Keywords: aerodynamics, thin rectangular plate, winglets, lifting force, aerodynamic quality.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Samsonov, I. K., Sumbatyan, M. A., Analytical method in the linear three-dimensional aerodynamics of a thin wing with winglets. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 41–46. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-41-46

Received 12 March 2024. Revised 23 March 2024. Accepted 25 March 2024. Published 26 March 2024.

Sumbatyan M.A. has formulated the problem, has proposed the calculation formulas to determine the inductive reactance, as well as the analysis of the results obtained. Samsonov I.K. has performed the discretization of the system of integral equations, its calculation, as well as the analysis of the obtained results. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Теоретические расчеты различных конфигураций крыла являются важной частью проектной деятельности в авиационной отрасли. Предварительный прогноз аэродинамических характеристик крыла позволяет учесть их при проектировании летательного аппарата (ЛА) еще на ранней стадии разработки, что позволяет подбирать наиболее подходящие параметры аэродинамического обвода ЛА для выполнения тех или иных задач.

На сегодняшний день существует множество программных пакетов для расчета характеристик крыла [1–3]. Проблема данных программных пакетов состоит в том, что такие расчеты, даже с учетом современной компьютерной техники, занимают продолжительное время. Также используются и классические методы расчета аэродинамики ЛА, такие как методы дискретных вихрей [4]. Эти методы позволяют сократить время расчетов, но их недостатком является невозможность расчета крыльев сложной формы, а также крыльев с законцовками (винглетами). Эффективность винглетов не подвергается сомнению, на этот счет существует множество исследований [5, 6]. С целью исправить данный недостаток было решено вывести теорию тонкого крыла с винглетами [7].

1. Постановка задачи

Тонкое слабоизогнутое прямоугольное в плане крыло с размерами $(-l, l) \times (-a, a)$ расположено почти параллельно горизонтальной плоскости xy под малым углом атаки α_0 к однородному равномерному потоку, набегающему со скоростью V_0 параллельно оси x . Здесь $\alpha_0 = -\partial f/\partial x$, где $z = f(x, y)$ – форма поверхности крыла. В данном случае рассматривается случай незакрученного крыла с углом атаки, постоянным вдоль оси y . Также рассмотрим пластинку, имеющую те же габариты, но на концах которой расположены винглеты под углом 90° к основному крылу с габаритами $(-a, a) \times (0, c)$ и жестко соединенные с ним. Винглеты располагаются параллельно набегающему потоку. Схема обтекания тонкой прямоугольной пластинки с винглетами и без винглетов представлена на рис. 1.

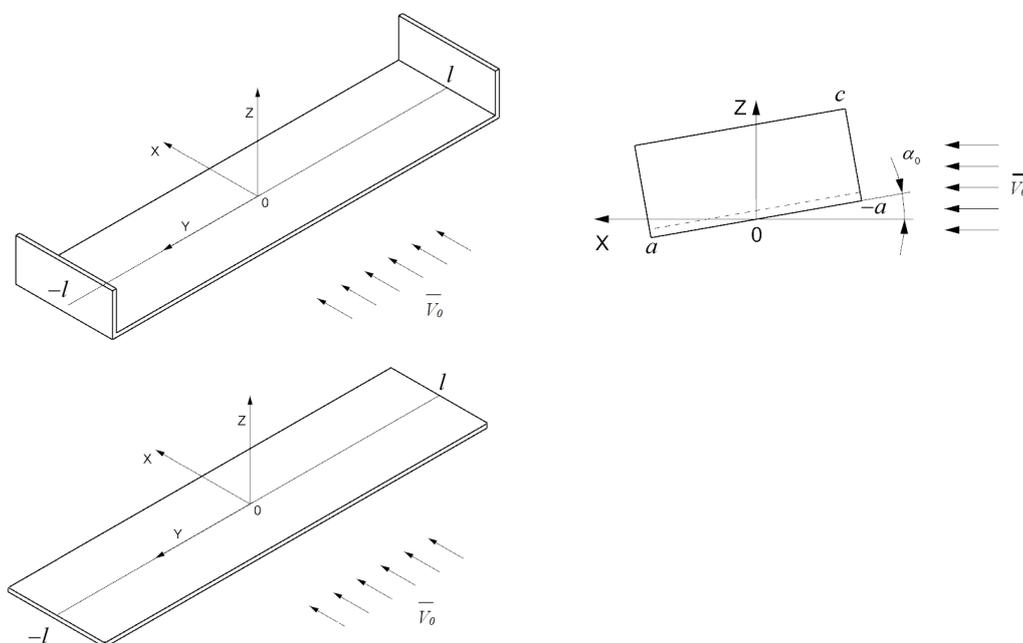


Рис. 1. Схема обтекания тонкой пластинки с винглетами и без винглетов

Fig. 1. Scheme of flow around a thin plate with and without winglets

В случае симметричного обтекания пластинки вдоль оси Ox при удовлетворении условию непроницаемости на основном крыле S_w при $z = 0$ получим первое уравнение, где за локальную подъемную силу на крыле отвечает функция γ_w . Это уравнение выглядит следующим образом:

$$\iint_{S_w} \frac{\gamma_w(\xi, \eta)}{(y - \eta)^2} \left(\frac{x - \xi}{q_{ww}} + 1 \right) d\xi d\eta - \iint_{S_1} \gamma_1(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{l + y}{t_{w1}} \left(\frac{x - \xi}{q_{w1}} + 1 \right) + \frac{l - y}{t_{w2}} \left(\frac{x - \xi}{q_{w2}} + 1 \right) \right] d\xi d\zeta = 4\pi\rho V_0^2 \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(x, y, 0) \in S_w, \quad (1.1)$$

$$t_{w1} = (l + y)^2 + \zeta^2, \quad q_{w1} = [(x - \xi)^2 + (l + y)^2 + \zeta^2]^{1/2},$$

$$t_{w2} = (l - y)^2 + \zeta^2, \quad q_{w2} = [(x - \xi)^2 + (l - y)^2 + \zeta^2]^{1/2},$$

$$q_{ww} = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}.$$

Второе уравнение при условии непроницаемости на винглете S_1 , где за локальную подъемную силу на крыле отвечает функция γ_1 ,

$$- \iint_{S_w} \gamma_w(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{z}{t_{1w}} \left(\frac{x - \xi}{q_{1w}} + 1 \right) \right] d\xi d\eta + \iint_{S_1} \frac{\gamma_1(\xi, \zeta)}{(z - \zeta)^2} \left\{ \left(\frac{x - \xi}{q_{11}} + 1 \right) + \frac{1}{t_{12}} \left[\left(\frac{8l^2}{t_{12}} - 1 \right) \left(\frac{x - \xi}{q_{12}} + 1 \right) + \frac{4l^2(x - \xi)}{q_{12}^3} \right] \right\} d\xi d\zeta = 0,$$

$$(x, -l, z) \in S_1, \quad (1.2)$$

$$t_{1w} = (l + \eta)^2 + z^2, \quad q_{1w} = [(x - \xi)^2 + (l + \eta)^2 + z^2]^{1/2},$$

$$t_{12} = 4l^2 + (z - \zeta)^2, \quad q_{12} = [(x - \xi)^2 + 4l^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2},$$

$$q_{11} = [(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}.$$

В работе авторов [8] подробно описано получение интегральных уравнений, где в случае симметричного обтекания функции γ_w и γ_1 определяют локальную подъемную силу для основного крыла (1.1) и для винглета (1.2) соответственно. Интеграл от функции γ_w по основному крылу S_w есть полная подъемная сила крыла P .

2. Индуктивное сопротивление

Для вычисления индуктивного сопротивления D_{ind} существует множество формул [9, 10]. В рамках данной работы индуктивное сопротивление вычислим как разность между проекцией подъемной силы на направление потока и подсосывающей силой. Итоговая формула имеет вид

$$D_{ind} = P\alpha_0 - T. \quad (2.1)$$

Подсосывающая сила для двумерной задачи известна в теории тонкого крыла [11]. В двумерной (плоской) задаче она может быть получена как

$$T = \frac{\pi}{4\rho V_0^2} \lim_{x \rightarrow -a} (a + x)(p_- - p_+)^2, \quad (2.2)$$

где ρ — массовая плотность воздуха.

Переходя к трехмерной задаче, в случае тонкого крыла с винглетами необходимо принять во внимание еще и локальную подъемную силу γ_1 на винглетах, учитывая, что в случае

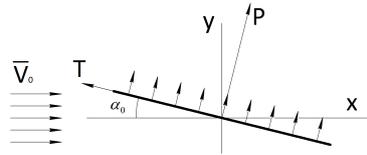


Рис. 2. Схема действия подсасывающей силы
Fig. 2. Scheme of action of suction force

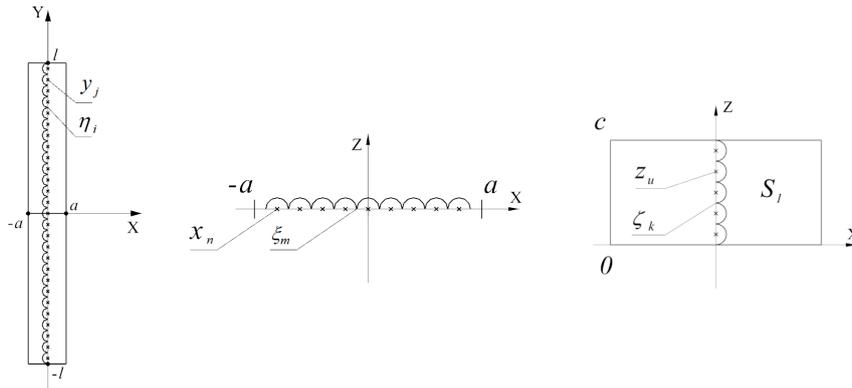


Рис. 3. Система узлов сетки на тонкой пластинке с винглетами
Fig. 3. System of grid nodes on a thin plate with winglets

симметричного обтекания вклад одного винглета просто удваивается. Тогда формула плоской задачи (2.2) обобщается следующим образом на трехмерную задачу

$$T = \frac{\pi}{4\rho V_0^2} \left[\int_{-\ell}^{\ell} \lim_{x \rightarrow -a} (a+x) \gamma_w^2(x, y) dy + 2 \int_0^c \lim_{x \rightarrow -a} (a+x) \gamma_1^2(x, z) dz \right]. \quad (2.3)$$

Схема действия индуктивного сопротивления изображена на рис. 2.

3. Дискретная форма уравнений

Дискретизация двумерных интегралов в полученной системе осуществляется в соответствии с методом дискретных вихрей [12]. Принимается, что основное крыло имеет прямоугольную форму в плане и оба винглета также являются прямоугольными. При этом вдоль размаха длина крыла равна $2l$, хорда крыла равна $2a$, а высота каждого винглета равна c . Крыло и винглеты разобьем от $-a$ до a по оси X на N_x частей, от $-l$ до l по оси Y на N_y частей, от 0 до c по оси Z на N_z частей. При дискретизации выбиралось $N_y = 100$, $N_z = 10$, $N_x = 40$, так что полный размер дискретной сетки равен $(N_y + N_z)N_x = 4400$. Более подробно дискретизация двумерных интегральных уравнений (1.1) и (1.2) описана в [8]. Система распределения узлов сетки на тонкой пластинке с винглетами представлена на рис. 3.

В случае индуктивного сопротивления для расчета подсасывающей силы необходимо знать локальную подъемную силу, за которую отвечают γ_w и γ_1

$$D_{\text{ind}} = P\alpha_0 - \frac{\pi}{4\rho V_0^2} \left[h_y(a+x) \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \gamma_w^2(x_m, y_j) + 2h_z(a+x) \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_1^2(x_m, z_k) \right], \quad (3.1)$$

где для вычисления предела в формуле (2.3), при переходе к дискретному виду, для переменной x в зависимости от выбранной сетки можно выбирать узлы, близко расположенные к левому краю (то есть, к передней кромке) пластинки $x = -a$.

Таблица 1. Сравнение аэродинамического качества для пластинок с винглетми и без винглетов на различных углах атаки

Table 1. Comparison of aerodynamic quality for blades with and without winglets at different angles of attack

α_0 , град.	Q без винглетов	Q с винглетами	Выигрыш
2	7,655983554	8,01625046	4,71%
4	13,07110241	13,8825511	6,21%
6	15,84789047	16,97157551	7,09%
8	16,71731188	18,04515816	7,94%
10	16,39706717	17,80444673	8,58%
12	15,56309461	16,93001502	8,78%
14	14,64453018	16,03553791	9,50%
16	13,60903114	14,90890604	9,55%

4. Полученные результаты

Для расчетов бралась прямоугольная пластинка габаритами $20 \times 2,5$ см и высотой винглетов 1 см. При этом аэродинамическое качество пластинки вычисляется по формуле

$$Q = \frac{P}{(D_{ind} + W)}, \quad (4.1)$$

где вязкое трение W для малого угла атаки считаем не зависящим от α_0 и известным из теории Прандтля для ламинарного погранслоя как формулу Блазиуса [13]

$$W = 1,328\rho(2l)V_0^2\sqrt{\frac{2a\nu_B}{V_0}}, \quad (4.2)$$

где ν_B — кинематическая вязкость воздуха.

Сравнение аэродинамического качества пластинок габаритами $20 \times 2,5$ см с винглетами высотой 1 см и без винглетов представлено в табл. 1. График сравнения зависимости аэродинамического качества от угла атаки представлен на рис. 4.

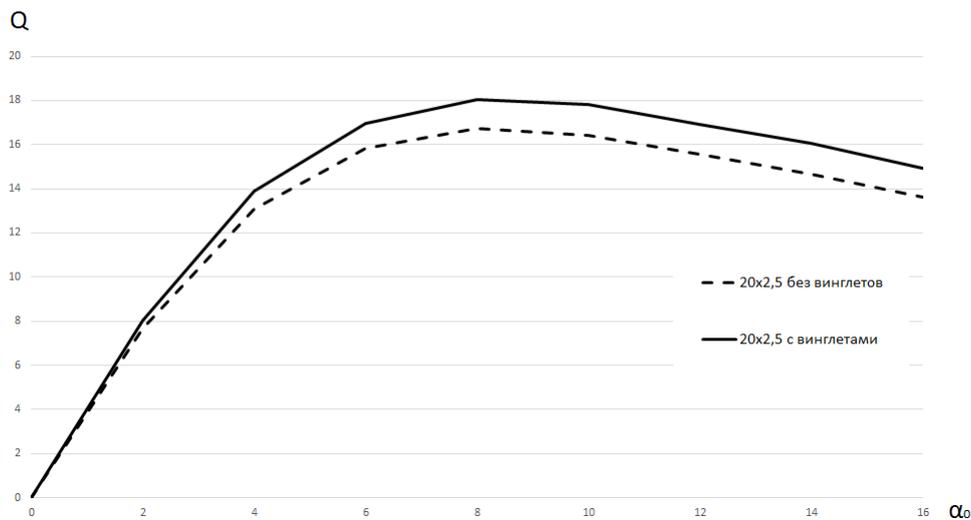


Рис. 4. Сравнение аэродинамического качества для пластинок с винглетми и без винглетов на различных углах атаки

Fig. 4. Comparison of aerodynamic quality for blades with and without winglets at different angles of attack

Заключение

1) В работе представлен аналитический метод для тонкого слабоизогнутого крыла с винглетами в рамках классической теории малых возмущений в идеальной жидкости при симметричном обтекании набегающим потоком.

2) Аэродинамическое качество у пластинок с винглетами выше, чем без винглетов. С увеличением угла атаки разница в качестве увеличивается.

Отмеченный выше результат вполне закономерен. Экспериментально, наличие винглетов приводит к увеличению топливоэффективности ЛА. В данном случае можно сказать, что даже без эксперимента полученные данные вполне правдоподобны. Эксперимент же покажет более низкое качество, чем теоретическое. Это связано с тем, что подсосывающая сила для пластинки толщиной 2 мм будет меньше, чем для абсолютно тонкой пластинки в теории, а полная сила сопротивления — больше.

Литература [References]

1. Cunningham, K., A generic t-tail transport airplane simulation for high-angle-of-attack dynamics modeling investigations. In *2018 AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference, Kissimmee, Florida, 2018*.
2. Fairley, G., McGovern, S., A kinematic/kinetic hybrid airplane simulator model. In *ASME 2008 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pp. 11–20.
3. Jaszczur, M., An investigation of the aerodynamic parameters for Solar Plane wing profile using CFD modeling. *Computer Science*, vol. 22, pp. 123–142.
4. Белоцерковский, С.М., Лифанов, И.К., Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. Москва, Наука, 1985. [Belotserkovsky, S.M., Lifanov, I.K., *Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primeneniye v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike = Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory, electrodynamicics*. Moscow, Nauka, 1985. (in Russian)]
5. Devenport, W.J., Rife, M.C., Liapis, S.I., Gollin, G.J., The structure and development of a wing-tip vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, vol. 312, pp. 67–106.
6. Alkhafaji, A.J., Panatov, G.S., Boldyrev, A.S., Numerical analysis and optimization of a winglet sweep angle and winglet tip chord for improvement of aircraft flight performance. *Diagnostyka*, 2022, vol. 23, no. 2, Article ID 2022210.
7. Sumbatyan, M.A., Samsonov, I.K., On the theory of thin lifting surface with winglets. *Mechanics Research Communications*, 2020, vol. 109. Article ID 103519.
8. Самсонов, И.К., Сумбатян, М.А., О влиянии винглетов на аэродинамические свойства тонкого крыла. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2023, № 2, с. 38–47. [Samsonov, I.K., Sumbatyan, M.A., On the influence of winglets on the aerodynamic properties of a thin wing. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki = News of universities. North Caucasus region. Natural Sciences*, 2023, No. 2, pp. 38–47. (in Russian)]
9. Белоцерковский, С.М., *Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа*. Москва, Наука, 1965. [Belotserkovsky, S.M., *Tonkaya nesushchaya poverkhnost' v dozvukovom potoke gaza = Thin bearing surface in a subsonic gas flow*. Moscow, Nauka, 1965. (in Russian)]
10. Кочин, Н.Е., Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. *ПММ*, 1940, т. 4, вып. 1, с. 1–32. [Kochin, N.E., Theory of a finite-span wing with a circular planform. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1940, vol. 4, iss. 1, pp. 1–32. (in Russian)]
11. Седов, Л.И., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва, Наука, 1980. [Sedov, L.I., *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki = Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics*. Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)]
12. Белоцерковский, С.М., Лифанов, И.К., Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. Москва, Наука, 1985. [Belotserkovsky, S.M., Lifanov, I.K., *Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory, electrodynamicics*. Moscow, Nauka, 1985. (in Russian)]
13. Шлихтинг, Г., *Теория пограничного слоя*. Москва, Наука, 1974. [Schlichting, G., *Teoriya pogranychnoy sloya = Boundary Layer Theory*. Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]