УДК 517.927.4 EDN: AUGWCQ DOI: 10.31429/vestnik-21-2-6-13

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка

Г. Э. Абдурагимов ✉

Дагестанский государственный университет, ул. Магомеда Гаджиева 43-а, Махачкала, 367000, Россия

✉ Абдурагимов Гусен Эльдерханович; ORCID 0000-0001-7095-932X; SPIN 9245-5007; e-mail: gusen_e@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с симметричными граничными условиями. С помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке конуса установлены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения рассматриваемой задачи. В сублинейном случае доказана и единственность такого решения. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус, функция Грина.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: *Абдурагимов Г. Э.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 6–13. EDN: AUGWCQ. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-6-13

Поступила 26 марта 2024 г. После доработки 1 мая 2024 г. Принято 13 мая 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for One Nonlinear Functional Differential Equation of Third Order

G. E. Abduragimov ✉

Dagestan State University, st. Magomed Gadzhiev 43-a, Makhachkala, 367000, Russia

✉ Gusen E. Abduragimov; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Abstract. The boundary value problem is considered

$$\begin{aligned} &x'''(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1,\\ &x(0) = x(1) = 0,\\ &x''(0) = x''(1), \end{aligned}$$

where T — linear positive continuous operator. Using the Green's function and Krasnoselsky's fixed point theorem, we formulate and prove the existence of positive solutions to the above boundary value problem for a third-order nonlinear functional differential equation. Next, in the sublinear case, using the fixed point principle, we establish the uniqueness of a positive solution to the problem under study. In addition, an example is given to illustrate the results obtained.

Keywords: positive solution, boundary value problem, cone, Green's function.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Abduragimov, G. E., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of third order. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 6–13. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-6-13

Received 26 March 2024. Revised 1 May 2024. Accepted 13 May 2024. Published 28 June 2024.

The author declare no competing interests.

Введение

Краевым задачам для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассматриваются вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т.д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. Впоследствии методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

Одним из наиболее часто используемых инструментов для доказательства существования положительных решений интегральных уравнений и краевых задач является теорема Красносельского о конусном расширении и сжатии и различные модификации этой известной теоремы. Уравнения третьего порядка возникают в различных областях прикладной математики и физики, таких как отклонение изогнутой балки, имеющей постоянное или переменное поперечное сечение, задачи для трехслойной балки, электромагнитных волн или гравитационных потоков и т.д. Существует большое количество работ, посвященных проблеме существования положительных решений краевых задач. Однако лишь в немногих работах рассматривалась задача для дифференциальных уравнений третьего порядка (например, [1–8]). Во всех упомянутых выше работах авторы использовали теорему Красносельского о неподвижной точке теории конуса или индекса неподвижной точки.

Насколько нам известно, вопросы существования и единственности положительных решений нелинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений третьего порядка мало изучены; в основном, результаты касаются уравнений с запаздывающим аргументом (например, [9, 10] и ссылки в них). В предлагаемой статье предпринята попытка в некоторой мере обобщить разрозненные частные результаты и устранить обозначенный выше пробел. С помощью известной теоремы Го–Красносельского получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка. В сублинейном случае на основе принципа сжатых отображений установлена и единственность положительного решения.

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через $\mathbb{C}$ пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, $\mathbb{L}_p$ $(1<p<\infty)$ — пространство суммируемых на $[0,1]$ со степенью $p\in(1,\infty)$ функций и $\mathbb{W}^3$ — пространство вещественных функций с абсолютно непрерывной второй производной, определенных на $[0,1]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$x'''(t)+f\left(t,(Tx)(t)\right)=0,\qquad 0<t<1, \tag{1.1}$$

$$x(0)=x(1)=0, \tag{1.2}$$

$$x''(0)=x''(1), \tag{1.3}$$

где $T\colon \mathbb{C}\to\mathbb{L}_p$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times[0,\infty)$, монотонна по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\,\cdot\,,0)\equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1.1)–(1.3) будем подразумевать функцию $x\in\mathbb{W}^3$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2)–(1.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{1.4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\mathrm{d}^3/\mathrm{d}t^3$ с краевыми условиями (1.2)–(1.3)

$$G(t,s)=\begin{cases}\left(s-\dfrac{s^2}{2}\right)t-\dfrac{t^2}{2}, & 0\leqslant t\leqslant s,\\[2ex] \dfrac{s^2}{2}(1-t), & s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Нетрудно показать, что имеют место следующие свойства:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} G(t,s)=\psi(s),\quad s\in[0,1] \tag{1.5}$$

и

$$G(t,s)\geqslant \psi(s)\varphi(t),\quad (t,s)\in[0,1]\times[0,1], \tag{1.6}$$

где

$$\psi(s)=\frac{1}{2}\left(s-\frac{s^2}{2}\right),\quad \varphi(t)=\min\{t,1-t\}.$$

Предположим, что при почти всех $t\in[0,1]$ и $u\geqslant 0$ функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u)\leqslant bu^{p/q}, \tag{1.7}$$

где $b>0$, $q\in(1,\infty)$.

В операторной форме уравнение (1.4) можно записать так:

$$x=GNTx,$$

где $N\colon \mathbb{L}_p\to\mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G\colon \mathbb{L}_q\to\mathbb{C}$ — оператор Грина.

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен [11, с. 161].

Определим конус K пространства $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$K=\left\{x\in\mathbb{C}:\ x(t)\geqslant 0, x(t\geqslant \varphi(t)\|x\|_{\mathbb{C}}\right\}.$$

Лемма 1. Оператор A оставляет инвариантным конус K.

Доказательство. В силу (1.5) при $x\in K$ имеем

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\mathrm{d}s\leqslant\int\limits_0^1\psi(s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\mathrm{d}s. \tag{1.8}$$

С другой стороны, в силу (1.6) и (1.8) при $x\in K$ соответственно получим

$$(Ax)(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\mathrm{d}s\geqslant\varphi(t)\int\limits_0^1\psi(s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\mathrm{d}s\geqslant\varphi(t)\|Ax\|_{\mathbb{C}}.$$

$\square$

В дальнейшем для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3) нам понадобится следующая известная теорема Красносельского [12].

Теорема 1. Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X. Предположим, что Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества в X с $0 \in \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $\mathcal{A} : P \to P$ — вполне непрерывный оператор такой, что

(i) $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$, или

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$.

Тогда $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку в $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Введем обозначения:

$$\Omega_r = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} < r\}, \quad \Omega_R = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} < R\},$$

$$\partial\Omega_r = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} = r\}, \quad \partial\Omega_R = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} = R\},$$

$$\Omega = \overline{\Omega}_R \backslash \Omega_r,$$

где r, $R > 0$, причем $r < R$.

Кроме того, для удобства выкладок целесообразно введение следующих обозначений:

$$f_0 = \lim_{u \to 0^+} \operatorname{vrai} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}, \quad f_\infty = \lim_{u \to +\infty} \operatorname{vrai} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}.$$

Теорема 2. Предположим, что вместе с (1.7) выполнены условия

1) $p \neq q$;
2) $f_0 = \infty$ при $p < q$;
3) $f_\infty = \infty$ при $p > q$;
4) $\min_{t \in [0,1]}(T\chi)(t) > 0$, где $\chi(t) \equiv 1$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Рассмотрим случай $p < q$. Покажем выполнение условия (ii) теоремы 1. Для этого, в частности, укажем такое число $r > 0$, что при $x \in \partial\Omega_r$

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \geqslant \|x\|_{\mathbb{C}}. \tag{1.9}$$

В силу условия 2 настоящей теоремы найдется такое число $L > 0$, что

$$\operatorname{vrai} \inf_{t \in [0,1]} f(t,u) \geqslant \delta u, \quad 0 < u \leqslant L, \tag{1.10}$$

где $\delta \geqslant \dfrac{2}{\int\limits_0^1 \psi(s)(T\varphi)(s)\,\mathrm{d}s} > 0$.

При $x \in \partial\Omega_r$, выбрав $0 < r \leqslant \dfrac{L}{\max_{t \in [0,1]}(T\chi)(t)}$, имеем

$$(Tx)(t) \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}}(T\chi)(t) \leqslant r \max_{t \in [0,1]}(T\chi)(t) \leqslant L, \quad t \in [0,1].$$

В силу (1.6) и (1.10) для $x \in \partial\Omega_r$ имеем

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) \mathrm{d}s \geqslant \delta\varphi(t) \int\limits_0^1 \psi(s)(Tx)(s)\,\mathrm{d}s \geqslant \delta\varphi(t) \int\limits_0^1 \psi(s)(T\varphi)(s)\,\mathrm{d}s \cdot \|x\|_{\mathbb{C}}.$$

После нормировки обеих частей последнего неравенства, принимая во внимание ограничения на δ, придем к соотношению (1.10).

Подберем теперь такое число $R > 0$, что при $x \in \partial\Omega_R$ выполнено условие

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}}. \tag{1.11}$$

Действительно, в силу (1.5) и (1.7), воспользовавшись неравенством Гёльдера, при $x \in \partial\Omega_R$ имеем

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) \mathrm{d}s \leqslant b \int\limits_0^1 \psi(s) \left(Tx\right)^{\frac{p}{q}}(s) \, \mathrm{d}s \leqslant$$
$$\leqslant b\|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \leqslant b\|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} = b\|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R^{\frac{p}{q}-1} \|x\|_{\mathbb{C}},$$

где τ — норма оператора T,

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1.$$

Взяв теперь в качестве R такое положительное число, что

$$R \leqslant \left(\frac{1}{b\|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{q}{p-q}}, \tag{1.12}$$

очевидным образом гарантируем выполнение (1.11).

Следовательно, вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Ω, что в свою очередь равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) в указанной области. По аналогичной схеме несложно доказать справедливость теоремы и в случае $p > q$. Как легко видеть, для этого необходимо убедиться в выполнении условия (i) теоремы 1. Теорема доказана. □

В предположении справедливости теоремы 2 запишем неравенство (1.10), вытекающее из условия 2 теоремы 2, следующим образом:

$$\operatorname{vrai}\inf_{t \in [0,1]} f(t,u) \geqslant \delta L^{1-\frac{p}{q}} u^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < u \leqslant L. \tag{1.13}$$

В силу (1.4), (1.6) и (1.13) для $x \in K$ имеем

$$x(t) \geqslant \varphi(t) \delta L^{1-\frac{p}{q}} \int\limits_0^1 \psi(s) \left(Tx\right)^{\frac{p}{q}}(s) \, \mathrm{d}s \geqslant \varphi(t) \delta L^{\frac{q-p}{q}} \|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} \int\limits_0^1 \psi(s) \left(T\varphi\right)^{\frac{p}{q}}(s) \, \mathrm{d}s.$$

Откуда после нормировки, разрешив полученное неравенство, получим априорную оценку

$$\|x\|_{\mathbb{C}} \geqslant \xi, \tag{1.14}$$

где

$$\xi = L \left(\frac{\delta}{2} \int\limits_0^1 \psi(s) \left(T\varphi\right)^{\frac{p}{q}}(s) \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{q}{q-p}}.$$

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 2, функция $f(t,u)$ дифференцируема по второму аргументу, а частная производная $f'_u(t,u)$ монотонно убывает по u. Кроме того, допустим, что

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < \frac{4}{\tau}, \tag{1.15}$$

где

$$\theta(t) = f'_u(t,\zeta), \quad \zeta = \xi \min_{0\leqslant t\leqslant 1} (T\chi)(t), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — различные положительные решения задачи (1.1)–(1.3). Согласно формуле конечных приращений Лагранжа

$$f\left(s, (Tx_1)(s)\right) - f\left(s, (Tx_2)(s)\right) = f'_u(t, \tilde{u}(s))(Ty)(s), \tag{1.16}$$

где функция $\tilde{u}(t)$ принимает значения промежуточные между $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$. При этом заметим, что соотношение (1.14) влечет оценку

$$\tilde{u}(t) \geqslant \zeta, \tag{1.17}$$

где $\zeta = \xi \min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}(T\chi)(t) > 0$.

Ввиду монотонности $f'_u(t,u)$, (1.5) и (1.17) с учетом того, что $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\psi(s) = 1/4$, для любого $x \in K$ имеем

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_0^1 |f'_u(s,\tilde{u}(s))|\,|(Ty)(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int\limits_0^1 |f'_u(s,\zeta)||(Ty)(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{4}\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leqslant \frac{1}{4}\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\tau\|y\|_{\mathbb{C}},$$

где

$$\theta(t) \equiv f'_u(t,\zeta), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Следовательно, в силу условия (1.15) теоремы из принципа сжатых отображений следует, что краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение. □

В заключение приведен пример, иллюстрирующий выполнение полученных результатов.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения:

$$x'''(t) + \alpha(t+1)^{\beta}\sqrt{\int\limits_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s} = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.18}$$

$$x(0) = x(1), \; x''(0) = x''(1), \tag{1.19}$$

где $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$.

Здесь, $p/q = 1/2$ и $f(t,u) = \alpha(t+1)^{\beta}\sqrt{u}$. Для определенности положим $p = 2$ и $q = 4$. В качестве $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{L}_2$ взят линейный интегральный оператор, определенный равенством

$$(Tx)(t) = \int\limits_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Имеем

$$(T\varphi)(t) = \int\limits_0^1 \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}.$$

Потребуем теперь выполнение условия (1.10) теоремы 2:

$$\alpha\sqrt{u} \geqslant \delta u, \quad u \in (0, L],$$

где $\delta \geqslant 48$. Отсюда легко видеть, что последнее неравенство выполняется, например, при $L = (\alpha/\delta)^2$. Следовательно, следуя схеме доказательства теоремы 2, в качестве в качестве r, можно взять его верхнюю границу, т.е. число $4\,(\alpha/\delta)^2$.

В свою очередь для нахождения R рассмотрим неравенство (1.12). Несложно видеть, что $\tau = 1$. В неравенстве (1.7) соответственно положим $b = \alpha 2^\beta$. Тогда имеем

$$R \leqslant \alpha^2 4^\beta \left(\int\limits_0^1 \psi^{\frac{4}{3}}(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}03\alpha^2 4^\beta.$$

Взяв в качестве R пограничное значение, нетрудно убедиться, что для любых $\delta \geqslant 48$ независимо от выбора α и β выполнено условие $0 < r < R$. Следовательно, в силу теоремы 2 краевая задача (1.18)–(1.19) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

Докажем теперь единственность положительного решения задачи (1.18)–(1.19). Функция

$$f'_u(t,u) = \frac{1}{2\alpha(t+1)^\beta\sqrt{u}},$$

очевидно, монотонно убывает по второму аргументу. Неравенство (1.15) соответственно запишется

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_2} < 4, \tag{1.20}$$

где

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha(t+1)^\beta\sqrt{\zeta}}, \quad \zeta = \frac{\xi}{2}.$$

В силу (1.14) имеем

$$\xi = \frac{\alpha^2}{16}\left(\int\limits_0^1 \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 = \frac{\alpha^2}{288}.$$

Тогда $\theta(t) = \dfrac{12}{\alpha^2(t+1)^\beta}$ и соответственно

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\int\limits_0^1 \theta^2(s)\,\mathrm{d}s} = \frac{24}{\alpha^2}\cdot\frac{2^{1-2\beta}-1}{1-2\beta}.$$

Следовательно, неравенство (1.20) окончательно примет вид

$$\frac{2^{1-2\beta}-1}{1-2\beta} < \frac{\alpha^2}{6}.$$

Таким образом, выполнение последнего неравенства гарантирует единственность положительного решения задачи (1.18)–(1.19).

Заключение

В работе рассматривается краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с нелинейной и нелокальной добавкой. Граничными условиями для искомой функции $x(t)$ являются симметричные соотношения $x(0) = x(1) = 0$ и $x''(0) = x''(1)$. Решение задачи ищется в классе положительных на $(0,1)$ функций с абсолютно непрерывной второй производной. С помощью функции Грина обращается дифференциальная часть и рассматриваемая задача сводится к равносильному нелинейному интегральному уравнению. Далее, используя теорему Красносельского о конусном расширении (сжатии), доказывается наличие по крайней мере одного положительного решения исследуемой задачи. Единственность такого решения установлена только в сублинейном случае.

Литература [References]

1. Yao, Q., Feng, Y., The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem. *Appl. Math. Lett.*, 2002, vol. 15, no. 2, pp. 227–232. DOI: 10.1016/S0893-9659(01)00122-7
2. Liu, Z., Ume, J.S., Kang, S.M., Positive solutions of a singular nonlinear third order two-point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 326, no. 1, pp. 589–601. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.03.030
3. El-Shahed, M., Positive solutions for nonlinear singular third order boundary value problem. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, no. 2, pp. 424–429. DOI: 10.1016/j.cnsns.2007.10.008
4. Qu, H., Positive solutions of boundary value problems of nonlinear third-order differential equations. *Int. J. Math. Anal.*, 2010, vol. 4, no. 17, pp. 855–860.
5. Gao, Y., Wang, F., Existence of solutions of nonlinear mixed two-point boundary value problems for third-order nonlinear differential equation. *J. Appl. Math.*, 2012, vol. 2012, pp. 1–12. DOI: 10.1155/2012/262139
6. Cheng, Z., Existence of positive periodic solutions for third-order differential equation with strong singularity. *Adv. Differ. Equ.*, 2014, vol. 2014, no. 162, pp. 1–12. DOI: 10.1186/1687-1847-2014-162
7. Almuthaybiri, S. S., Tisdell, C., Sharper existence and uniqueness results for solutions to third-order boundary value problems. *MMA*, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 409–420. DOI: 10.3846/mma.2020.11043
8. Murty, K. N., Sailaja, P., Existence and uniqueness of solutions to three-point boundary value problems associated with third order non-linear fuzzy differential equations. *IJECS*, 2023, vol. 12, no. 2, pp. 25648–25653. DOI: 10.18535/ijecs/v12i02.4719
9. Jankowski, T., Existence of positive solutions to third order differential equations with advanced arguments and nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, vol. 75, no. 2, pp. 913–923. DOI: 10.1016/j.na.2011.09.025
10. Ardjouni, A., Djoudi, A., Existence of positive periodic solutions for third-order nonlinear delay differential equations with variable coefficients. *Mathematica Moravica*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 17–28. DOI: 10.5937/MatMor1902017A
11. Крейн, С. Г., *Функциональный анализ.* Москва, Наука, 1972. [Crane, S.G., Funktsional'nyy analiz = Functional analysis. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
12. Zhou, W.X., Zhang, J.G., Li, J.M., Existence of multiple positive solutions for singular boundary value problems of nonlinear fractional differential equations. *Adv. Differ. Equ.*, 2014, vol. 97, pp. 1–15. DOI: 10.1186/1687-1847-2014-97