

УДК 532.5.013:532.516:538.5:544.6

EDN: BIRUDM DOI: 10.31429/vestnik-21-2-80-92

Электрофорез микрочастицы с гидрофобной поверхностью в сильном электрическом поле

Е. А. Франц¹✉, А. А. Крылов², Е. А. Демёхин^{1,3}¹ Финансовый университет при Правительстве РФ, Краснодар, 350051, Россия² Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИИ Механики, Мичуринский пр. 1, Москва, 119192, Россия

✉ Франц Елизавета Александровна; ORCID 0000-0002-9813-4933; SPIN 2566-9895; e-mail: eafnants@fa.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается задача электрофореза диэлектрической частицы с гидрофобной поверхностью. Приводится полная размерная постановка задачи, а затем осуществляется переход к безразмерной форме. Основным методом исследования является аналитическое решение задачи, которое выполняется отдельно для электрической и гидродинамической частей. Основной целью было получение соотношения для скорости электрофореза микрочастицы с гидрофобной поверхностью в зависимости от следующих параметров: напряженности внешнего электрического поля E_∞ , длины скольжения β , плотности поверхностного заряда σ , числа Дебая ν и отношения диэлектрических проницаемостей частицы и среды δ . Кроме того, в работе проведено сравнение аналитически полученной скорости электрофореза гидрофобной частицы с результатами численного моделирования и выполнена оценка вклада параметра длины скольжения в прирост скорости электрофореза. Также отдельно продемонстрировано влияние параметров σ и δ на скорость электрофореза.

Ключевые слова: электрофорез, гидрофобная поверхность, скорость скольжения, сильное электрическое поле.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-00082).

Цитирование: Франц Е. А., Крылов А. А., Демёхин Е. А. Электрофорез микрочастицы с гидрофобной поверхностью в сильном электрическом поле // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 80–92. EDN: BIRUDM. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-80-92

Поступила 12 мая 2024 г. После доработки 24 июня 2024 г. Принято 18 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Electrophoresis of Microparticle with Hydrophobic Surface in Strong Electric Field

Е. А. Frants¹✉, А. А. Krylov², Е. А. Demekhin^{1,3}¹ Financial University under the Government of the Russian Federation, Krasnodar, 350051, Russia² Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia³ Lomonosov Moscow State University, Research Institute of Mechanics, Michurinsky pr. 1, Moscow, 119192, Russia

✉ Elizaveta A. Frants; ORCID 0000-0002-9813-4933; e-mail: eafnants@fa.ru

Abstract. The study addresses the problem of electrophoresis of a dielectric particle with a hydrophobic surface. A complete dimensional formulation of the problem is presented, followed by a transition to a dimensionless formulation. The main method of investigation is the analytical solution of the problem, conducted separately for the electrical and the hydrodynamic components. The primary task was to derive a relationship for the electrophoresis velocity of the micro-particle with a hydrophobic surface based on key parameters of the problem: the intensity of the external electric field E_∞ , the slip length β , the surface charge density σ , the Debye number ν , and the ratio of the dielectric permittivities of the particle and the medium δ . Additionally, the study includes a comparison of the analytically obtained electrophoresis velocity of the hydrophobic particle with the results of numerical modeling of electrophoresis of a dielectric particle and an assessment of the contribution of the slip length parameter to the increase in electrophoresis velocity. The influence of the parameters σ and δ on the electrophoresis velocity is also demonstrated separately.

Keywords: electrophoresis, hydrophobic surface, sliding speed, high electric field.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-79-00082).

Cite as: Frants, E. A., Krylov, A. A., Demekhin, E. A., Electrophoresis of microparticle with hydrophobic surface in strong electric field. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 80–92. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-80-92

Received 12 May 2024. Revised 24 June 2024. Accepted 18 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

В последние несколько десятилетий возрос интерес к исследованиям, посвященным переносу жидкости в микромасштабе. Это связано с развитием микрофлюидных технологий. Как известно, отношение площади поверхности к объему обратно пропорционально характерному масштабу. Что означает возрастание важности граничных условий при уменьшении масштабов. В последние годы также активизировался интерес к использованию гидрофобных поверхностей для более эффективного переноса жидкости. Увеличение длины проскальзывания, в свою очередь, приводит к значительному падению поверхностного трения и, как следствие, уменьшению энергозатрат [1, 2].

Обычно условие скольжения жидкости на границе раздела жидкости и твердого тела моделируется с использованием граничного условия Навье, которое для плоской геометрии означает, что скорость скольжения пропорциональна локальному градиенту скорости с некоторым коэффициентом пропорциональности. Этот параметр известен как «длина скольжения» [3]. Для обычного сдвигового течения длина скольжения соответствует некоторому расстоянию на твердой поверхности, где скорость жидкости равна нулю. В последние несколько десятилетий было экспериментально показано, что это действительно так и для некоторых типов поверхности удалось оценить длину скольжения [3–5]. Также существует экспериментальное подтверждение увеличения скорости электроосмоса благодаря скольжению жидкости на поверхности [6]. Vouzigues и др. [7] провели эксперименты, в которых они измерили длину проскальзывания по гидрофобной и гидрофильной поверхностям с помощью прямого измерения профиля скорости электроосмотического потока и потока, вызванного градиентом давления. Авторы сообщают о первых подробно измеренных профилях скорости, полученных на расстояниях от 20 до 300 нм от поверхности. Это исследование позволило впервые отделить электростатические эффекты от динамических эффектов, связанных с дзета-потенциалом. Результаты подтверждают сильное усиление дзета-потенциала за счет эффектов проскальзывания жидкости, тем самым предлагая новый способ управления потоками с помощью свойств поверхности.

Усиление электрофоретического движения заряженных коллоидов с гидрофобной поверхностью исследовалось не только экспериментально, но и теоретически несколькими авторами [1, 8]. Было показано, что даже «умеренные» отклонения от гидродинамических граничных условий прилипания приводят к значительному (до 2-х порядков величины) увеличению большинства явлений переноса, вызванных свойствами межфазной поверхности. Khaïr и Squires [9] провели систематическое исследование электрофореза коллоидной частицы с гидрофобной поверхностью. Их исследование основано на анализе возмущений первого порядка основных электрокинетических уравнений в предположении слабого приложенного поля, принятом в классических работах O'Brien и White [10]. Анализ, проведенный в работе [9], показывает, что для значений поверхностного потенциала от низких до умеренных обнаруживается значительное увеличение подвижности для тонкого дебаевского слоя. Однако такое увеличение подвижности при высоком дзета-потенциале (т.е. намного большем, чем термический потенциал 25 мВ) является незначительным из-за неоднородной поверхностной проводимости и концентрационной поляризации поверхности диэлектрика. Park [11] определил подвижность коллоидной частицы с гидрофобной поверхностью на основе модели Пуассона–Больцмана. Он получил аналитическую формулу для определения электрофоретической подвижности частицы с гидрофобной поверхностью с точки зрения длины проскальзывания и дзета-потенциала.

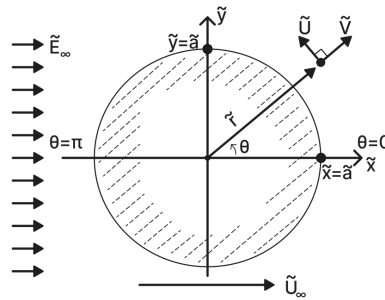


Рис. 1. Диэлектрическая частица под действием электрического поля E_∞ . В сферической осесимметричной системе $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$. U — тангенциальная компонента скорости, а V — нормальная составляющая скорости жидкости. Точка начала отсчета совпадает с центром частицы, угол θ отсчитывается в направлении против часовой стрелки. U_∞ — электрофоретическая скорость частицы. Условие на компоненты скорости на бесконечности: $U \rightarrow -U_\infty \sin \theta$ и $V \rightarrow U_\infty \cos \theta$

1. Математическая постановка задачи

Математическая модель рассматривает сферическую микрочастицу радиуса \tilde{a} , поверхность которой является гидрофобной (задается условие проскальзывания жидкости на поверхности частицы) и непроницаемой для ионов электролита (поток катионов и анионов через поверхность равен нулю). Чтобы отбросить возможное влияние стенок на движение частицы, предполагается что она находится в некотором бесконечно протяженном резервуаре. Микрочастица находится в вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости, которая является бинарным электролитом. В данном случае под электролитом понимается диэлектрическая жидкость, в которой растворены ионы некоторой соли (например, $NaCl$ или KCl). При этом вводятся некоторые ограничения и упрощения. Так, рассмотрен только бинарный (2 типа ионов) и симметричный электролит ($z^+ = z^- = 1$, где z^+ и z^- — валентность ионов). Предполагается также равенство коэффициентов диффузии катионов и анионов, т.е. $D^+ = D^- = D$.

Через частицу полностью отсутствует поток ионов. К гидродинамической части задачи также применяются некоторые упрощения. В силу микромасштабов используется приближение Стокса для ползущего течения. Математическое описание базируется на модели сплошной среды. Задача описывается системой сцепленных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в которую входят: 1) уравнение Пуассона относительно электрического потенциала Φ ; 2) уравнение Стокса, описывающее течение жидкости с членом, отвечающим за объемную электрическую силу; 3) уравнения Нернста–Планка для переноса ионов, включающие все три механизма переноса (диффузию, конвекцию, электромиграцию).

В силу того, что изучается движение сферической частицы, удобно использовать сферическую систему координат с началом отсчета в центре частицы (рис. 1). Задача будет сформулирована для осесимметричного случая. В данной системе действует постоянное электрическое поле напряженности E_∞ , которое имеет нормальную и касательную составляющие относительно поверхности частицы. Нормальная составляющая вызывает рост пространственного заряда на поверхности, а касательная — движение жидкости вдоль поверхности частицы. В приложенном электрическом поле частица начинает двигаться и приобретает электрофоретическую скорость U_∞ . Данная скорость может быть получена из условия баланса сил, действующих на частицу, а именно, баланса вязкой и электрической силы.

На поверхности частицы будут заданы следующие граничные условия: 1) поток анионов и катионов через поверхность равен нулю; 2) скачок электростатического потенциала Φ , связанный с плотностью поверхностного заряда; 3) условие Навье для скольжения жидкости на поверхности. Система уравнений имеет несколько параметров, наиболее важным из которых для численного решения является число Дебая. Поставленную задачу планируется решать при помощи аналитических и численных методов. В малых масштабах число Рейнольдса предполагается равным нулю, что приводит к значительному упрощению системы, которая,

тем не менее, остается нелинейной за счет уравнений переноса ионов. Далее мы рассмотрим отдельно электрическую и гидродинамическую части задачи.

2. Электростатическая часть

Рассмотрим сначала размерный вид уравнений. Здесь и далее величины с тильдой обозначают размерные величины, а соответствующие обозначения без тильды — безразмерные величины. Внутри электролита электростатический потенциал Φ описывается уравнением Пуассона, которое в сферической системе для осесимметричного случая имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{r}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right) \right] = \frac{\tilde{F}}{\tilde{\varepsilon}} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+). \quad (2.1)$$

Внутри частицы распределение потенциала φ описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.2)$$

Граничные условия на поверхности частицы при $\tilde{r} = \tilde{a}$ следующие:

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} = -\tilde{\sigma} + \tilde{\varepsilon}_d \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}}; \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}. \quad (2.3)$$

При $\tilde{r} \rightarrow \infty$: $\tilde{\Phi} \rightarrow -\tilde{E}_\infty \tilde{r} \cos \theta + const$. В точке $\tilde{r} = 0$ должно выполняться условие отсутствия сингулярности. В безразмерной форме данная система уравнений выглядит следующим образом:

$$\nu^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] = -r^2 (c^- - c^+) = -r^2 \rho, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$r = 1 : \nu \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sigma + \delta \nu \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \Phi = \varphi, \quad (2.6)$$

$$r \rightarrow \infty : \Phi = -E_\infty r \cos \theta + const. \quad (2.7)$$

Для перехода к безразмерной постановке были использованы следующие характерные величины: радиус микрочастицы \tilde{a} , термический потенциал $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, равновесная концентрация электролита \tilde{c}_∞ , динамическая вязкость жидкости $\tilde{\mu}$ и коэффициент диффузии ионов \tilde{D} . Здесь \tilde{R} — универсальная газовая постоянная, \tilde{T} — абсолютная температура, \tilde{F} — постоянная Фарадея. Система описывается следующими безразмерными параметрами:

$$E_\infty = \frac{\tilde{a}\tilde{E}_\infty}{\tilde{\Phi}_0}, \quad \nu = \frac{\tilde{\lambda}_D}{\tilde{a}}, \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_d}{\tilde{\varepsilon}}, \quad \sigma = \frac{\tilde{\lambda}_D \tilde{\sigma}}{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0}, \quad \varkappa = \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0}{\tilde{\mu} \tilde{D}}, \quad \beta = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \quad (2.8)$$

где $\tilde{\lambda}_D^2 = \tilde{\varepsilon} \tilde{R} \tilde{T} / 2 \tilde{F}^2 \tilde{c}_\infty$ — толщина двойного электрического слоя; $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\varepsilon}_d$ — диэлектрические проницаемости среды и частицы соответственно. Параметр β описывает относительную важность скольжения на границе по сравнению с общими характеристиками потока. Параметр \varkappa описывает характеристики электролита. Например для водных электролитов типичное значение от 0,2 до 0,3, меньшие значения параметра ($\varkappa < 0,1$) соответствуют неполярным электролитам.

Распределение потенциала φ может быть найдено аналитически через разложение по многочленам Лежандра относительно $\eta = \cos \theta$

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(r) P_k(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k r^k + \frac{b_k}{r^{k+1}} \right) P_k(\eta),$$

где P_k — многочлены Лежандра. Так как действует условие отсутствия сингулярности при $r = 0$, это означает, что все $b_k = 0$, и тогда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(r) P_k(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k P_k(\eta).$$

Введем обозначение $a_k r^k = \varphi_k$. В дальнейшем аналитическом решении ограничимся только двумя членами разложения

$$\varphi = \varphi_0 P_0 + \varphi_1 P_1 = a_0 + a_1 r \eta, \quad (2.9)$$

где a_0 и a_1 — некоторые константы, которые будут найдены из условия сращивания решений на границе частицы и электролита.

Теперь рассмотрим потенциал Φ в растворе электролита, который также можно представить в виде разложения по многочленам Лежандра

$$\Phi = \Phi_0(r) P_0(\eta) + \Phi_1(r) P_1(\eta). \quad (2.10)$$

Уравнение (2.4) имеет ненулевую правую часть с $\rho \neq 0$ внутри двойного электрического слоя (ДЭС), толщину которого можно оценить как $O(\nu)$. Заряд внутри ДЭС индуцирован поверхностным зарядом σ , распределение которого не зависит от угла θ . Поэтому только Φ_0 связано с плотностью поверхностного заряда σ . В противоположность этому Φ_1 создается за счет внешнего электрического поля напряженности E_∞ . Это можно увидеть, если в уравнение (2.6) подставить выражения (2.9) и (2.10). Из уравнения (2.9) следует, что на поверхности частицы

$$\begin{aligned} \varphi_0 = a_0 = \text{const} &\Rightarrow \frac{d\varphi_0}{dr} = 0, \\ \varphi_1 = a_1 r; \quad \left. \frac{d\varphi_1}{dr} \right|_{r=1} &= \varphi_1|_{r=1} = \Phi_1, \\ \nu \frac{d\Phi_0}{dr} = -\sigma, \quad \frac{d\Phi_1}{dr} &= \delta \Phi_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

а при $r \rightarrow \infty$: $\Phi_0 \rightarrow \text{const}$; $\Phi_1 \rightarrow -E_\infty r$. Далее рассмотрим отдельно решения для Φ_0 и Φ_1 .

2.1. Решение для Φ_1 во внешней области электролита

Уравнение для Φ_1 можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_1}{dr} - \frac{2}{r^2} \Phi_1 = 0 \quad (2.12)$$

с граничными условиями:

$$r = 1 : \quad \frac{d\Phi_1}{dr} = \delta \Phi_1, \quad (2.13)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_1 \rightarrow -E_\infty r. \quad (2.14)$$

При этом случай $\delta = 0$ соответствует изолятору или так называемой неполяризуемой поверхности, а $\delta = \infty$ — проводнику.

Отметим, что уравнение (2.12) не включает плотность заряда, так как $\rho_1 = 0$. Плотность заряда ρ должна учитываться только для полинома P_0 . Если внешнее поле достаточно сильное, оно может генерировать за счет нелинейных эффектов также члены ρ_0, ρ_2, \dots , которые не являются нулевыми. Эти эффекты исключены из рассмотрения в данной работе. Уравнение (2.12) с граничными условиями (2.13)–(2.14) имеет решение

$$\Phi = -E_\infty \left(r + \frac{1 - \delta}{2 + \delta} \frac{1}{r^2} \right). \quad (2.15)$$

2.2. Решение для Φ_0 в тонком слое около поверхности частицы

Уравнение для Φ_0 более сложное и имеет вид

$$\frac{\nu^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = c^- - c^+ = -\rho. \quad (2.16)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_0 \rightarrow \text{const} = \zeta - \text{неизвестная}, \quad (2.17)$$

$$r = 1 : \quad \nu \frac{d\Phi_0}{dr} = -\sigma, \quad \Phi_0 = 0. \quad (2.18)$$

Решение связано с неопределенностью константы на бесконечности, а также с константой a_0 в диэлектрике. При $r = 1$, $\Phi_0 = a_0$. Не использовалась возможность выбрать произвольную константу для Φ . Для удобства возьмем $a_0 = 0$.

$$r = 1 : \quad \nu \frac{d\Phi_0}{dr} = -\sigma, \quad \Phi_0 = \zeta - \text{потенциал.}$$

Тогда при $r \rightarrow \infty$, $\Phi_0 \rightarrow 0$. Концентрации c^+ и c^- являются неизвестными функциями. Чтобы их определить, вернемся к определению в размерной форме. Для тонкого ДЭС ($\lambda_D \ll \tilde{a}$) справедлива система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{c}^+ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^+}{\partial \tilde{r}} \right) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{c}^- \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^-}{\partial \tilde{r}} \right) = 0, \quad (2.20)$$

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}^2} = -\tilde{F}(\tilde{c}^+ - \tilde{c}^-) \quad (2.21)$$

с граничными условиями на поверхности частицы при $\tilde{r} = \tilde{a}$

$$\frac{\tilde{F}\tilde{c}^+}{\tilde{R}\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^+}{\partial \tilde{r}} = 0; \quad \frac{\tilde{F}\tilde{c}^-}{\tilde{R}\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^-}{\partial \tilde{r}} = 0; \quad \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} = -\tilde{\sigma}, \quad \tilde{\Phi} = 0, \quad (2.22)$$

на бесконечности: $\tilde{r} \rightarrow \infty : \tilde{c}^+ \rightarrow \tilde{c}_\infty^+, \quad \tilde{c}^- \rightarrow \tilde{c}_\infty^-, \quad \tilde{\Phi}_0 \rightarrow \tilde{\zeta}$.

Проинтегрируем уравнения (2.19) и (2.20) один раз и, используя граничные условия (2.22), установим, что константы интегрирования равны нулю. Вернемся к безразмерной форме. Введем замену переменной $y = r - 1 = O(\nu)$, таким образом на поверхности частицы $y = 0$. Тогда

$$c^+ \frac{d\Phi_0}{dy} + \frac{dc^+}{dy} = 0; \quad c^- \frac{d\Phi_0}{dy} - \frac{dc^-}{dy} = 0; \quad \nu^2 \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} = c^- - c^+; \quad (2.23)$$

$$y \rightarrow \infty : \quad c^+ \rightarrow 1, \quad c^- \rightarrow 1, \quad \Phi_0 \rightarrow \zeta; \quad (2.24)$$

$$y = 0 : \quad \nu \frac{d\Phi_0}{dy} = -\sigma, \quad \Phi_0 = 0.$$

С этого момента и далее опустим индекс «0». Из граничных условий выше $\Phi|_{y=0} = \zeta$; $\Phi|_{y=\infty} = 0$. Из уравнений (2.23) получим $c^+ = Ae^{-\Phi}$ и $c^- = Be^{-\Phi}$. При $y \rightarrow \infty$: $c^+ \rightarrow 1$, $c^- \rightarrow 1$, $\Phi \rightarrow 0$, следовательно $A = B = 1$. Тогда

$$\nu^2 \frac{d^2\Phi}{dy^2} = e^\Phi - e^{-\Phi}.$$

Проинтегрируем уравнение Больцмана один раз, получим

$$\frac{\nu}{\sqrt{2}} \frac{d\Phi}{dy} = -(e^{\Phi/2} - e^{-\Phi/2}).$$

Применим граничное условие при $y = 0$ или $r = 1$, из которого можно получить связь между дзета-потенциалом и плотностью поверхностного заряда

$$\sigma = 2\sqrt{2} \sinh \frac{\zeta}{2}; \quad \zeta = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}. \quad (2.25)$$

Для $\zeta \rightarrow 0$ соотношение примет вид $\sigma = \sqrt{2}\zeta$. Это же соотношение в размерной форме запишем в форме

$$\tilde{\sigma} = \frac{2\sqrt{2}\tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0}{\tilde{\lambda}_D} \sinh \frac{\tilde{\zeta}}{2\tilde{\Phi}_0}, \quad (2.26)$$

известной как уравнение Грэхема. Вернемся к решению уравнения для потенциала. Используя уравнение Грэхема в итоге получим следующее решение:

$$\Phi = \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2, \quad (2.27)$$

константу y_0 можно получить из граничного условия

$$y_0 = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \right); \quad y_0 = -\nu\sqrt{2} \operatorname{arctanh} e^{\zeta/2}. \quad (2.28)$$

Первое соотношение верно для произвольного σ , однако второе соотношение будет верно только для отрицательных значений дзета-потенциала.

Составим полное решение для электрического потенциала, получим

$$\Phi = -E_\infty \left(r + \frac{1 - \delta}{2 + \delta} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta + \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2. \quad (2.29)$$

Для $r - 1 = y = O(\nu)$ это выражение превращается в следующее:

$$\Phi = -\frac{3}{2 + \delta} E_\infty \cos \theta + \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2. \quad (2.30)$$

3. Гидродинамическая часть

Гидродинамическая часть описывается уравнением Стокса с учетом электрической силы. Подставив данный член, найденный в предыдущем параграфе, в уравнение Стокса и, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{\partial \theta}$, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} - \varkappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\varkappa E \frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\varkappa}{2} \frac{\partial E^2}{\partial r}, \quad E \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) следует, что $\Pi = \frac{\varkappa}{2} E^2$, тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \varkappa \left[E \frac{\partial E}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]. \quad (3.3)$$

Член $E \frac{\partial E}{\partial \theta}$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$ и им можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\varkappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (3.4)$$

Дважды проинтегрируем и получим

$$U = -\varkappa[\Phi - \zeta] \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (3.5)$$

Интегрирование было выполнено с предположением, что $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \text{const}(r)$. На самом деле это решение является решением неоднородного уравнения с $\rho = c^+ - c^- \neq 0$. Подставив в уравнение (3.5) выражение для потенциала (2.27) и его производную по углу, получим

$$U = -\frac{3\varkappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 \right\} \sin \theta, \quad (3.6)$$

$$\Psi_1^* = -\frac{6\varkappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \int_0^y \ln \left(\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 dy - \zeta \cdot y \right\}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Psi_1^*}{dr} = -\frac{6\varkappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \ln \left(\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 - \zeta \right\}, \quad (3.8)$$

$$\int_0^\infty \ln \left(\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 dy = O(\nu) \equiv \nu J\sqrt{2}.$$

Здесь J имеет смысл интеграла от внутреннего решения для потенциала внутри ДЭС. Далее будет введена связанная характеристика $\chi = 2J/\zeta$, которая отражает отношение общего влияния электрического поля в дебаевском слое к локальному потенциалу на границе раздела фаз.

При

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{\nu} = \frac{y}{\nu} \rightarrow \infty : \psi_1^* &\rightarrow \frac{6\varkappa E_\infty}{2 + \delta} (\zeta y - \nu\sqrt{2}J); \quad \frac{d\psi_1^*}{dr} \rightarrow \frac{6\varkappa E_\infty \zeta}{2 + \delta}, \\ \int_0^\infty \ln \left(\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 dy &= \nu\sqrt{2} \int_0^\infty \ln [\tanh(\eta - \eta_0)]^2 d\eta = \nu\sqrt{2} \cdot J(\zeta), \\ \eta_0 = \frac{y_0}{\nu\sqrt{2}} &= -\text{arctanh} e^{\frac{\zeta}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Внешнее решение имеет вид $\psi_1^0 = C_1 r + D_1/r$. Не будем приводить всю процедуру поиска коэффициентов C_1 и D_1 . Они могут быть найдены из условия сращивания решений. Итоговое выражение для внешнего решения имеет вид

$$\psi_1^0 = \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2 + \delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2 + \delta} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}; \quad \chi \equiv \frac{2J}{\zeta}. \quad (3.10)$$

Отметим, что $\chi \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow 0$ и запишем составное решение

$$\begin{aligned} \psi_1 = -\frac{6\varkappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \int_0^y \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 dy - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \zeta \chi \right\} + \\ + \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2 + \delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2 + \delta} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение однородного бигармонического уравнения с граничными условиями

$$r = 1 : \bar{\psi}_1 = 0, \quad \frac{d\bar{\psi}_1}{dr} = 0; \quad r \rightarrow \infty : \psi_1 \rightarrow -U_\infty r^2$$

имеет вид

$$\bar{\psi}_1 = -U_\infty r^2 + \frac{3}{2}U_\infty r - \frac{1}{2}U_\infty \frac{1}{r} \quad (3.12)$$

Полное решение является суперпозицией однородного и неоднородного решений, $\psi = \psi_1 + \bar{\psi}_1$. Согласно известной теореме Гэри Лиля коэффициент перед r должен быть равен нулю для соблюдения баланса нулевой силы. Эта теорема применима, если поверхность $r = 1$ отодвигается на расстояние $O(\nu)$, так что $c^+ - c^- = 0$. Для больших $\tilde{\lambda}_D/\tilde{a}$ теорема не верна. Исходя из этого условия баланса сил получим

$$\frac{3\kappa E_\infty \zeta}{2 + \delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}}\chi\right) + \frac{3}{2}U_\infty = 0.$$

Скорость электрофореза выражается как

$$U_\infty = -\frac{2\kappa E_\infty \zeta}{2 + \delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}}\chi\right) \approx \frac{2\kappa E_\infty \zeta}{2 + \delta}. \quad (3.13)$$

3.1. Гидрофобная поверхность

Такие поверхности могут радикально изменить свойства переноса потока. По сравнению с рассмотренным выше случаем изменяются только граничные условия

$$r = 1 : U = \beta \frac{\partial U}{\partial r}, \quad V = 0, \quad \beta = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$$

Здесь \tilde{b} — это длина скольжения, которая изменяется в диапазоне от 100 нм до нескольких микрометров. Для микрочастиц она очень близка к нулю, но для наночастиц может достигать 10, т.е. $\beta \in [0, 10]$. Найдем выражение для скорости электрофорез частицы с гидрофобной поверхностью по аналогии с предыдущим параграфом.

$$r = 1 : \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \beta \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right);$$

$$r \rightarrow \infty : \psi_1 \rightarrow -U_\infty^2 r^2;$$

$$\bar{\psi}_1 = -U_\infty r^2 + \frac{3}{2}U_\infty \frac{1 + \beta}{1 + 2\beta} r - \frac{1}{2}U_\infty \frac{1 - \beta}{1 + 2\beta} \frac{1}{r}.$$

При $\beta = 0$ это соотношения совпадают с уравнением (3.12). Это решение однородной задачи, $c^+ - c^- = 0$. Теперь найдем решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее условию скольжения. Внутреннее решение

$$U = -\frac{3\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 - \zeta - \beta \frac{\sigma}{\nu} \right\} \sin \theta$$

Внутреннее решение для функции тока

$$\psi_1^* = -\frac{6\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \int_0^y \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 dy - \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) y \right\}.$$

Или в другом виде

$$\psi_1^* \rightarrow \frac{6\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) y - \nu\sqrt{2}J \right\}.$$

Внешнее решение имеет вид $\psi_1^0 = C_1 r + D_1/r$. При $r \rightarrow 1$ $\psi_1^0 = C_1 + D_1 + (C_1 - D_1)y$. Условия срачивания внутреннего и внешнего решений имеют вид

$$\psi_1|_{y \rightarrow 0} = \psi_1^*|_{y/\nu \rightarrow \infty}, \quad \left. \frac{d\psi_1^0}{dy} \right|_{y \rightarrow 0} = \left. \frac{d\psi_1^*}{dy} \right|_{\frac{y}{\nu} \rightarrow \infty},$$

Тогда итоговое внешнее решение имеет вид

$$\psi_1^0 = \frac{3\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\kappa E_\infty \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right)}{2 + \delta} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}.$$

Составное решение запишется как

$$\psi_1 = -\frac{6\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \int_0^y \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu \sqrt{2}} \right]^2 dy - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \chi \right\} + \\ + \frac{3\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}.$$

В конечном итоге получаем формулу скорости частицы

$$U_\infty = \frac{2\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right).$$

Из последней формулы можно заключить, что гидрофобная поверхность может ускорить частицу от 10 до 100 раз.

4. Результаты.

Рассматривается влияние основных параметров на скорость частицы. Зафиксируем значение числа Дебая $\nu = 0,002$ (если не указано иное), что для типичной концентрации электролита ($c_\infty = 1$ моль/м³) дает характерную напряженность $E_\infty = 3676$ В/м. Из экспериментальных работ известно, что нелинейные эффекты при электрофорезе диэлектрической частицы начинают проявляться при напряженности электрического поля около 1 кВ/см. [12]. Также известно, что частицы с гидрофобной поверхностью могут развивать намного большую скорость, в 10–100 раз выше, чем скорость обычной диэлектрической частицы при определенных условиях. В предыдущем параграфе для случая гидрофобной поверхности было выведено аналитическое выражение для скорости частицы из условия баланса сил, действующих на частицу.

В статье [12] авторы исследовали поведение скорости диэлектрической частицы от напряженности электрического поля, доходящей до 3 кВ/см. Сравнение с данной экспериментальной работой было приведено в работе [13]. В данной статье исследовано влияние гидрофобной поверхности на скорость для трех случаев: при изменении концентрации электролита, при изменении дзета-потенциала и размера частицы. Сначала представим результаты для фиксированного значения параметра длины скольжения $\beta = 0,01$.

Рис. 2а показывает эффект дзета-потенциала для скорости электрофореза. В соответствии с уравнением Грэхема увеличение дзета-потенциала приводит к росту плотности поверхностного заряда и, как следствие, более сильному воздействию электрического поля на частицу. В современной литературе существует оценка, что при дзета-потенциале менее термического (около 25 мВ) сохраняется симметрия поверхностного заряда и выполняется формула Смолуховского. При значениях дзета-потенциала выше этого значения при достаточной напряженности электрического поля может происходить искажение распределения поверхностного заряда и нарушение линейной теории. Из рис. 2а видно, что скорость электрофореза гидрофобной частицы, как и ожидалось, выше диэлектрической и увеличивается при росте дзета-потенциала.

Рис. 2б показывает влияние размера частиц. Здесь также видно, что размер частицы влияет на расхождение скоростей. Для более крупных частиц прирост в скорости гидрофобной частицы больше, чем для более мелких. Отметим, что характерный размер частицы входит сразу в два параметра задачи: число Дебая ν и длину скольжения β .

Рис. 3а показывает эффект концентрации электролита. Как видно, чем выше концентрация электролита, тем более значительным становится расхождение скоростей. Причем при очень

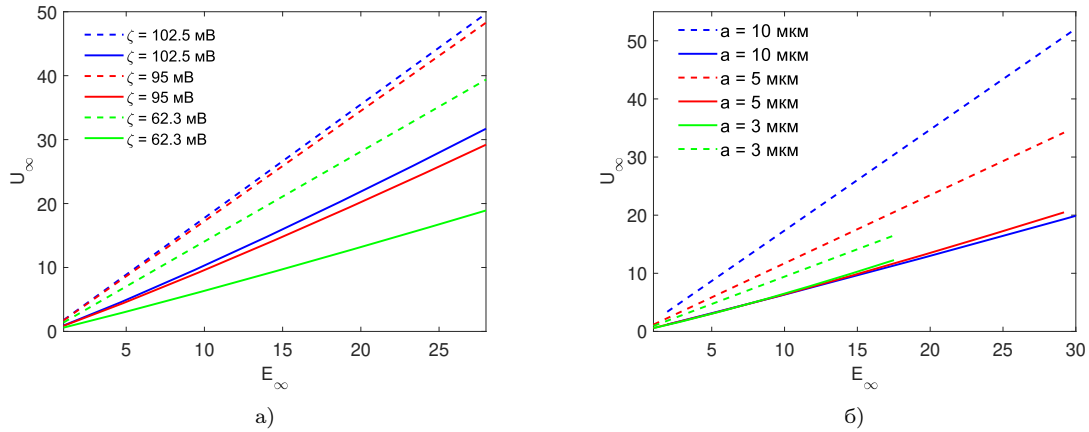


Рис. 2. Электрофоретическая скорость как функция напряженности электрического поля для разных значений (а) дзета-потенциала; (б) радиуса микрочастицы. Параметры расчетов: $\kappa = 0,26$, $\delta = 0,03$, $\beta = 0,01$. Для (а) $\nu = 0,002$, для (б) $\sigma = -4,33$. Пунктирные линии соответствуют гидрофобной частице, сплошные — диэлектрической

Fig. 2. Electrophoretic velocity as a function of electric field strength for different values of (a) zeta potential; (b) microparticle radius. Calculation parameters: $\kappa = 0.26$, $\delta = 0.03$, $\beta = 0.01$. For (a) $\nu = 0.002$, for (b) $\sigma = -4.33$. Dashed lines correspond to a hydrophobic particle, solid lines – to a dielectric particle

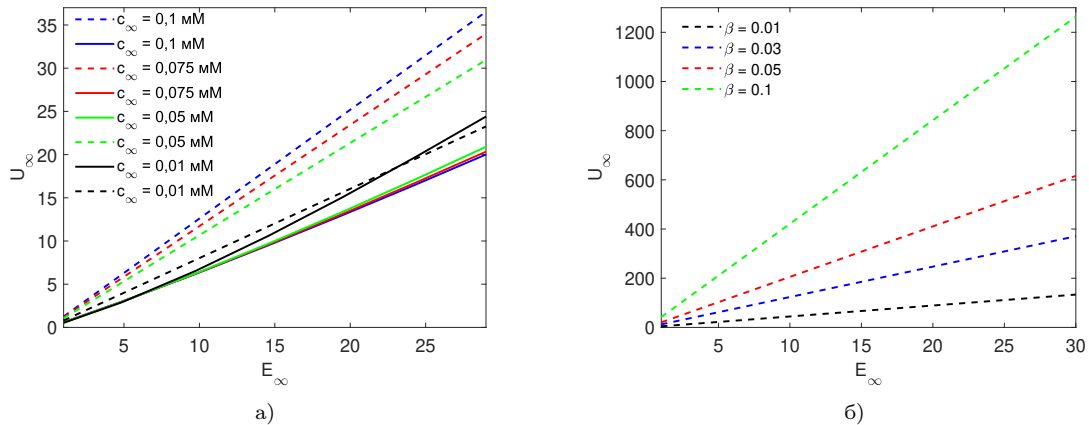


Рис. 3. Электрофоретическая скорость как функция напряженности электрического поля для разных значений (а) концентрации буферного электролита; (б) длины скольжения. Параметры для (а) $\kappa = 0,26$, $\delta = 0,03$, $\beta = 0,01$, $\sigma = -4,33$. Пунктирные линии соответствуют гидрофобной частице, сплошные — диэлектрической; (б) $\kappa = 0,26$, $\delta = 0,05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$

Fig. 3. Electrophoretic velocity as a function of electric field strength for different values of (a) buffer electrolyte concentration; (b) slip length. Parameters for (a) $\kappa = 0.26$, $\delta = 0.03$, $\beta = 0.01$, $\sigma = -4.33$. Dashed lines correspond to a hydrophobic particle, solid lines to a dielectric particle; (b) $\kappa = 0.26$, $\delta = 0.05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0.002$

малой концентрации (0,01 миллимоляр) расхождение в скорости между двумя типами частиц минимально и достигает порядка 50 % при увеличении концентрации до 0,1 миллимоляр. Это можно объяснить тем, что в растворах низкой концентрации электрическая проводимость раствора также низка и приложенное электрическое поле может быть более однородным по всему раствору, так как нет значительного количества ионов для создания локальных различий в проводимости. Это означает, что как диэлектрические, так и гидрофобные частицы испытывают примерно одинаковую силу воздействия электрического поля.

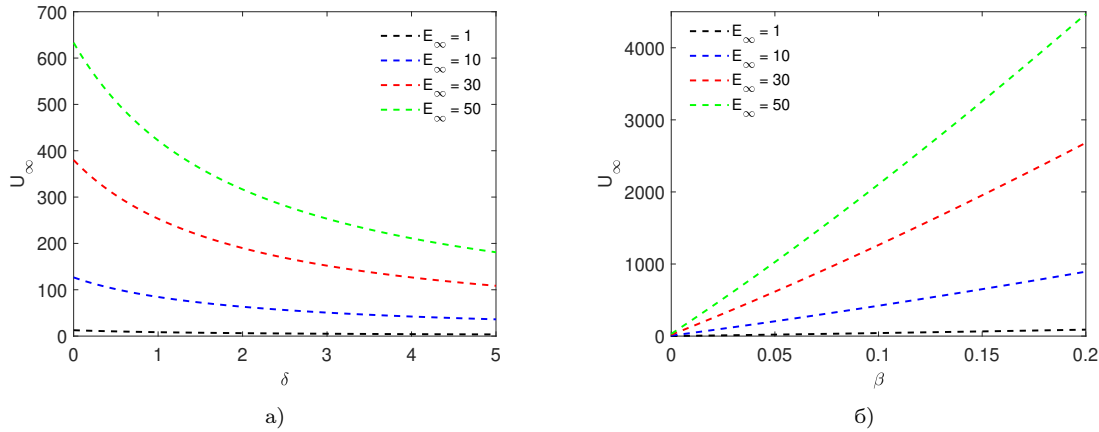


Рис. 4. Электрофоретическая скорость как функция (а) отношения диэлектрических проницаемостей частицы и электролита; (б) длины скольжения при фиксированных значениях напряженности электрического поля. Параметры: (а) $\kappa = 0,26$, $\beta = 0,03$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$ (б) $\kappa = 0,26$, $\delta = 0,05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$

Fig. 4. Electrophoretic velocity as a function of (a) the ratio of permittivities of the particle and electrolyte; (b) the slip length at fixed values of the electric field strength. Parameters: (a) $\kappa = 0.26$, $\beta = 0.03$, $\sigma = -3$, $\nu = 0.002$ (b) $\kappa = 0.26$, $\delta = 0.05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0.002$

Рис. 3а показывает влияние длины скольжения на скорость частицы. Как и ожидалось, данный параметр существенно влияет на скорость частицы. Увеличение β на порядок приводит к росту скорости примерно в 6 раз. В водных растворах диэлектрические частицы взаимодействуют с молекулами воды через гидратные оболочки. Эти оболочки увеличивают эффективный размер частиц и приводят к большему сопротивлению жидкости. Гидрофобные частицы могут двигаться более свободно в водной среде, если они избегают формирования стабильных гидратных оболочек, что уменьшает сопротивление, испытываемое ими во время движения. Таким образом, отсутствие обширных водных взаимодействий может позволять гидрофобным частицам двигаться быстрее.

Рис. 4а показывает влияние параметра δ на скорость частицы, а 4б — зависимость скорости от β для нескольких фиксированных значений E_{∞} . Высокое значение параметра δ приводит к замедлению скорости частицы, которое может достигать нескольких раз. Данный параметр определяет способность частицы поляризоваться во внешнем поле и высокая поляризация приводит к созданию неоднородного электрического поля вокруг частицы, что влияет на ее подвижность. Здесь следует отметить, что большинство случаев реальных материалов все же описывается низким значением δ . Например, для частицы из кварца в водном растворе значение δ составляет около 0,05.

Заключение

В данной работе исследуется влияние основных параметров на скорость электрофореза микрочастицы. Было изучено поведение гидрофобных частиц и некоторые эффекты были сопоставлены с диэлектрическими частицами. Особое внимание уделено гидрофобным частицам, скорость которых может превышать скорость диэлектрических частиц в 10–100 раз в зависимости от условий. Результаты показывают, что дзета-потенциал существенно влияет на скорость электрофореза, что приводит к нарушению симметрии распределения заряда. Эффекты размера частицы также значимы, с увеличением размера скорость гидрофобной частицы увеличивается больше, чем у диэлектрической. Изучено также влияние концентрации электролита на скорость и выявлено, что при низкой концентрации разница в скорости между разными типами частиц минимизируется. Помимо уже упомянутых параметров, в работе также рассмотрено влияние длины скольжения β . Обнаружено, что изменение этого пара-

метра значительно влияет на скорость частиц, которые, благодаря отсутствию стабильных гидратных оболочек, могут двигаться с меньшим сопротивлением в водной среде. Данные эффекты продемонстрированы с помощью полученного аналитически выражения для скорости электрофореза, которое также было верифицировано с помощью численного решения задачи в полной постановке.

Исследование подтверждает, что управление параметрами, такими как дзета-потенциал, размер частицы, концентрация электролита, длина скольжения, а также отношение диэлектрических проницаемостей, может быть использовано для оптимизации условий электрофореза для различных типов частиц. Такие данные могут служить основой для разработки новых методов и технологий в области микрофлюидики и нанотехнологий.

Литература [References]

1. Stone, H.A., Stroock, A., Ajdari, A., Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2004, vol. 36, pp. 381–411.
2. Squires, T.M., Quake, S., Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. *Rev. Mod. Phys.*, 2005, vol. 77, p. 977. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.977](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.977)
3. Lauga, E., Brenner, M.P., Stone, H.A., Microfluidics: The no-slip boundary condition. In: Tropea, C., Yarin, A., Foss, J.F. (eds), *Handbook of Experimental Fluid Dynamics*. Springer, New York, 2007, pp. 1219–1240. DOI: [10.1007/978-3-540-30299-5_19](https://doi.org/10.1007/978-3-540-30299-5_19)
4. Neto, C., Evans, D.R., Bonaccorso, E., Butt, H.-J., Craig, V.S.J., Boundary slip in Newtonian liquids: A review of experimental studies. *Rep. Prog. Phys.*, 2005, vol. 68, p. 2859. DOI: [10.1088/0034-4885/68/12/R05](https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/12/R05)
5. Vinogradova, O., Slippage of water over hydrophobic surfaces. *Int. J. Min. Process.*, 1999, vol 56, pp. 31–60. DOI: [10.1016/S0301-7516\(98\)00041-6](https://doi.org/10.1016/S0301-7516(98)00041-6)
6. Churaev, N.V., Ralston, J., Sergeeva, I.P., Sobolev, V.D., Electrokinetic properties of methylated quartz capillaries. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 20026 vol. 96, p. 265. DOI: [10.1016/s0001-8686\(01\)00084-7](https://doi.org/10.1016/s0001-8686(01)00084-7)
7. Bouzigues, C.I., Tabeling, P., Bocquet, L., Nanofluidics in the Debye Layer at Hydrophilic and Hydrophobic Surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, art. 114503. DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.114503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.114503)
8. Ajdari, A., Bocquet, L., Giant Amplification of Interfacially Driven Transport by Hydrodynamic Slip: Diffusio-Osmosis and Beyond. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, art. 186102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.186102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.186102)
9. Khair, A.S., Squires, T.M., The influence of hydrodynamic slip on the electrophoretic mobility of a spherical colloidal particle. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21, art. 042001. DOI: [10.1063/1.3116664](https://doi.org/10.1063/1.3116664)
10. O'Brien, R.W., White, L.R., Electrophoretic mobility of a spherical colloidal particle. *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 1978, vol. 74, pp. 1607–1626. DOI: [10.1039/F29787401607](https://doi.org/10.1039/F29787401607)
11. Park, H.M., Electrophoresis of particles with Navier velocity slip. *Electrophoresis*, 2013, vol. 34, p. 651–661. DOI: [10.1002/elps.201200484](https://doi.org/10.1002/elps.201200484)
12. Bentor, J., Dort, H., Chitrao, R.A., Zhang, Y., Xuan, X., Nonlinear electrophoresis of dielectric particles in Newtonian fluids. *Electrophoresis*, 2023, vol. 44, iss. 11–12, pp. 938–946. DOI: [10.1002/elps.202200213](https://doi.org/10.1002/elps.202200213)
13. Frants, E., Amiroudine, S. Demekhin, E., DNS of Nonlinear Electrophoresis. *Microgravity Sci. Technol.*, 2024, vol. 36, iss. 21. DOI: [10.1007/s12217-024-10108-w](https://doi.org/10.1007/s12217-024-10108-w)