УДК 510.67 + 502.3

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ[1]

В. Г. Лежнев[2], ***А. Н. Марковский***[3]

DIRECT AND INVERSE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

Lezhnev V. G., Markovsky A. N.

The paper considers the first boundary-value problem for convection-diffusion equation in the bounded domain. The solution correctness of this problem has been proved, and representation of the solution in terms of a series has been obtained. The algorithm for the inverse problem solution is offered.

Для уравнения диффузионного приближения распространения субстанции в атмосфере

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi = D\varphi + f, \qquad (1)$$

где

$$D\varphi = \frac{\partial}{\partial x_1}\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\nu\frac{\partial\varphi}{\partial x_3},$$

рассматриваются прямая и обратная краевые задачи в ограниченной области. Функция $\varphi(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $t > 0$, трактуется как концентрация некоторой субстанции, $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ — постоянный вектор определяющий смещение градиента концентрации $\varphi(\mathbf{x},t)$ (скорость ветра), функции $\mu(\mathbf{x})$, $\nu(\mathbf{x})$ — коэффициенты неизотропной диффузии [1,2]. Предполагается, что функции входящие в уравнение (1) являются осредненными по достаточно большому интервалу времени, и разность значений, соответствующих реальному физическому процессу, и значению осредненных функций является достаточно малой [1].

Атмосфере Земли свойственна стратификация, поэтому будем рассматривать двумерную по пространственным горизонтальным переменным задачу для исходного уравнения [1]. Изложенная методика может быть применена и для трехмерного случая.

В первом разделе доказывается корректность прямой задачи и представление решения в виде ряда. Во втором рассматривается обратная задача для уравнения (1), предлагается метод регуляризации решения обратной задачи.

1. Корректность первой краевой задачи

Пусть функции φ, σ_1, k, s и f_1, зависят от двух пространственных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D$, тогда из основного уравнения (1) получим

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial t} + u_1\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_2} + \\ + \sigma_1(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_1}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(s(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_2}\right) + f_1(\mathbf{x},t), \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена в рамках проектов РФФИ (03-01-96587, 04-01-00026).

[2]Лежнев Виктор Григорьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

[3]Марковский Алексей Николаевич, аспирант кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

$$(x_1, x_2, t) \in \Sigma = D \times (0, T),$$

где компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ будем полагать постоянными.

Заменой искомой функции φ в уравнении (2) могут быть исключены слагаемые $u_1 \dfrac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1}$ и $u_2 \dfrac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2}$.

Будем предполагать также, что

$$\sigma_1(\mathbf{x}) > 0,\ k(\mathbf{x}) \geqslant \gamma_1 > 0 \text{ и } s(\mathbf{x}) \geqslant \gamma_2 > 0,$$

тогда

$$\sigma(\mathbf{x}) \geqslant \gamma > 0.$$

Для полученного уравнения рассмотрим следующую краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sigma(\mathbf{x}) v - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(s(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = f, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in D, \quad t \in (0, T), \quad T > 0,$$

$$v(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0, \quad (4)$$

$$v(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = p(\mathbf{x}). \quad (5)$$

1.1. Задача (3)–(5) является корректной. Для ее решения $v(x, t)$ может быть получена оценка

$$\iiint\limits_{\Sigma} v^2(\mathbf{x}, t)\, dx_1\, dx_2\, dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\gamma} \iint\limits_{D} p^2(\mathbf{x})\, dx_1\, dx_2 + \\ + \frac{1}{\gamma^2} \iiint\limits_{\Sigma} f^2(\mathbf{x}, t)\, dx_1\, dx_2\, dt.$$

1.2. Докажем разрешимость задачи (3)–(5). Предварительно рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[s(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_2}\right] + \\ + \sigma(\mathbf{x}) v = g(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$$\mathbf{x} \in D,$$

$$v|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0. \quad (7)$$

Умножим (6) на произвольную функцию $\varphi(\mathbf{x})$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (пространство Соболева) и проинтегрируем по D. Используя интегрирование по частям и граничные условия, получим

$$\iint\limits_{D} \left[k(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + s(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \right. \\ \left. + \sigma(\mathbf{x}) v \varphi\right] dx_1\, dx_2 = \iint\limits_{D} g \varphi\, dx_1\, dx_2. \quad (8)$$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (6)–(7) будем называть функцию $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (8) при любой $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Так как компоненты $k(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$ не отрицательны, то левая часть в (8) образует скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ [3]. Будем обозначать это скалярное произведение через $\langle\, ,\, \rangle$, а соответствующую норму — $\|\|\cdot\|\|$.

Интегральное тождество (8) может быть переписано в виде

$$\langle v(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\rangle = (g(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})), \\ \varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D). \quad (9)$$

Лемма 2. Обобщенное решение задачи (6)–(7) существует и единственно.

Доказательство существования следует из теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Так как $(g(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}))$ определяет линейный ограниченный функционал в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то существует функция $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, такая что функционал $(g, u) = \langle v, u\rangle$ представляется скалярным произведением в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ для любой функции $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. То есть выполняется линейное тождество (9), и $v(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи (6)–(7).

Для доказательства единственности положим в (9) $\varphi = v$, имеем

$$\|\|v\|\|^2 \leqslant \|g\| \cdot \|v\| \leqslant C\, \|g\| \cdot \|\|v\|\|,$$

где постоянная C не зависит от $v(\mathbf{x})$. Получаем оценку

$$\|\|v\|\| \leqslant C\, \|g\|, \quad (10)$$

откуда следует единственность, а также непрерывная зависимость решения от правой части $g(\mathbf{x})$. Лемма доказана.

Задача (6)–(7) определяет оператор A, ставящий в соответствие функции

$g(\mathbf{x}) \in L_2(D)$ решение $v(\mathbf{x})$ задачи (6)–(7). Оператор A линейный, его областью определения является пространство $L_2(D)$, а областью значений $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$,

$$A : g(\mathbf{x}) \to u(\mathbf{x}).$$

Теорема 1. Оператор A компактен в $L_2(D)$ и симметричен, его собственные числа положительны.

Доказательство. Из оценки (10) следует, что оператор A переводит ограниченное множество в $L_2(D)$ в ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. А так как ограниченное в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ множество компактно в $L_2(D)$ [3], то компактность оператора A доказана.

Для доказательства симметричности возьмем две произвольные функции $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ в $L_2(D)$. Пусть

$$Ag = v, \quad Af = u.$$

Используя (9) имеем

$$(g, Af) = (g, u) = \langle v, u \rangle ,$$

по определению также получаем

$$\langle u, v \rangle = (f, v) = (f, Ag).$$

Таким образом, симметричность оператора A доказана.

Из симметричности следует, что спектр является дискретным вещественным, собственные числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Так как

$$Av_k = \lambda_k v_k,$$

то по определению обобщенного решения

$$\begin{gathered} \langle v_k, u \rangle = (Av_k, u) = \lambda_k (v_k, u), \\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D). \end{gathered} \tag{11}$$

Полагая $u = v_k$, получим

$$\lambda_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Из (11) также следует, что $\lambda_0 = 0$ не может быть собственным числом, так как иначе при $u = v_k$

$$\langle v_0, v_0 \rangle = 0,$$

и собственная функция должна быть нулем. Теорема доказана.

Следствие. Система собственных функций $v_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, оператора A образует ортонормированный базис в $L_2(D)$ [3].

Из (11) следует, что функции $v_k(\mathbf{x})$, как обобщенные решения задачи (6)–(7) с правой частью $\lambda_k v_k(\mathbf{x}) \in L_2(D)$, также принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Из (11) следует также, что $v_k(\mathbf{x})$ взаимно ортогональны в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, и система функций $v_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, замкнута в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Действительно, пусть некоторая функция $w(\mathbf{x})$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ ортогональна всем $v_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, то есть

$$\langle w, v_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $w(\mathbf{x})$ ортогональна всем $v_k(\mathbf{x})$ в пространстве $L_2(D)$, и, следовательно, равна нулю, так как $v_k(\mathbf{x})$ образует базис в $L_2(D)$.

Из замкнутости системы функций $v_k(\mathbf{x})$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ следует полнота. Проведем перенормировку $v_k(\mathbf{x})$ и будем далее считать эту систему функций ортонормированным базисом в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$,

$$\begin{gathered} \langle v_k, v_m \rangle = (v_k, v_m) = 0, \\ k, m = 1,\, 2, \ldots \text{ при } k \neq m, \\ \left\| |v_k| \right\|^2 = \lambda_k \left\| v_k \right\| . \end{gathered}$$

1.3. Обратимся к представлению решению задачи (3)–(5).

Определение 2. Обобщенным решением задачи (3)–(5) называется функция $v(\mathbf{x}, t)$, принадлежащая вместе с производной $v_t(\mathbf{x}, t)$ по t пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ при любом $t \geqslant 0$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint\limits_D \left[v_t \varphi + k(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + s(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \sigma(\mathbf{x}) v \varphi \right] dx_1\, dx_2 = \iint\limits_D f \varphi \, dx_1\, dx_2 \tag{12}$$

для любой $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и равенству

$$v(\mathbf{x}, 0) = p(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Покажем, что обобщенное решение $v(\mathbf{x}, t)$ существует, единственно и разлагается в ряд по функциям $v_k(\mathbf{x})$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ [4]. Будем предполагать, что функции $f(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x})$ являются достаточно гладкими.

Функция $f(\mathbf{x},t)$ может быть разложена в ряд в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ по собственным функциям $v_k(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(\mathbf{x}), \quad f_k(t)=\langle f, v_k\rangle .$$

При этом, выполняется равенство Парсеваля [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)=|||f(\mathbf{x},t)|||^2.$$

Аналогично

$$p(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)v_k(\mathbf{x}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2(t)=|||p(\mathbf{x})|||^2.$$

И так как $v(\mathbf{x},0)=p(\mathbf{x})$, то

$$c_k(0)=p_k.$$

Решение $v(\mathbf{x},t)$ задачи (3)–(5) представимо в виде

$$v(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)v_k(\mathbf{x}). \tag{14}$$

Подставим (14) формально в (3), умножим на $v_m(\mathbf{x})$ и проинтегрируем по D

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)v_k(\mathbf{x}), v_m(\mathbf{x})\right)+ \\ +\langle v(\mathbf{x},t), v_m(\mathbf{x})\rangle=\left(f(\mathbf{x},t), v_m(\mathbf{x})\right).$$

Вследствие ортогональности v_k получаем

$$c_m'(t)(v_m,v_m)+\lambda_m c_m(t)(v_m,v_m)= \\ =f_m(t)(v_m,v_m),$$

$$m=1,\,2,\ldots.$$

Для функций $c_k(t)$ рассмотрим следующую задачу

$$c_k'(t)+\lambda_k c_k(t)=f_k(t), \tag{15}$$

$$c_k(0)=p_k. \tag{16}$$

Решение задачи Коши (15)–(16) имеет вид

$$c_k(t)=e^{-\lambda_k t}\int_0^t f_k(\xi)e^{\lambda_k\xi}d\xi+p_k e^{-\lambda_k t}.$$

Откуда получаем оценки

$$c_k^2(t)\leqslant 2\left[\int_0^t f_k(\xi)e^{-\lambda_k(t-\xi)}d\xi\right]^2+2p_k^2\leqslant \\ \leqslant 2p_k^2+2t\int_0^t f_k^2(\xi)\,d\xi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(t)\leqslant 2\,|||p(\mathbf{x})|||^2+ \\ +2t\int_0^t |||f(\mathbf{x},\xi)|||^2\,d\xi, \tag{17}$$

то есть последовательность коэффициентов $c_k(t)$ принадлежит пространству l_2 и, следовательно, ряд (14) сходится в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ при любом $t\geqslant 0$.

Для $c_k'(t)$, используя (8) и (17), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k'(t)\right)^2<C(1+t), \tag{18}$$

где константа C не зависит от t. Следовательно, производная по t от функции $v(\mathbf{x},t)$ имеет вид

$$v'(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)v_k(\mathbf{x})$$

и принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ при любом $t\geqslant 0$.

Нетрудно проверить, что $v(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет тождеству (12) и является обобщенным решением задачи (3)–(5). Действительно, соотношение (12) выполняется по построению при $\varphi(\mathbf{x})=v_k(\mathbf{x})$, $k=1,\,2,\ldots$, то есть выполняется для любой конечной суммы собственных функций. Следовательно, (12) выполняется на плотном в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ множестве функций $\varphi(\mathbf{x})$, и вследствие непрерывности функционала выполняется для всех функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Единственность обобщенного решения следует из равенства нулю коэффициентов $c_k(t)$, если $f(\mathbf{x},t)=0$ и $p(\mathbf{x})=0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Обобщенное решение задачи (3)–(5) существует, единственно и представимо в виде

$$v(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}\left[\int\limits_0^t f_k(\xi)e^{\lambda_k\xi}d\xi+p_k\right]v_k(\mathbf{x}).$$

2. Обратная краевая задача

Рассмотрим следующую задачу для уравнения (3)

$$v_t+\sigma v-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[s\frac{\partial v}{\partial x_2}\right]=f, \quad (19)$$

$$\mathbf{x}\in D,\quad t\in(0,T),\quad T>0,$$

$$v|_{\mathbf{x}\in\partial D}=0, \quad (20)$$

$$v|_{t=T}=w(\mathbf{x}), \quad (21)$$

где задана $w(\mathbf{x})=v(\mathbf{x},T)$ и требуется определить функцию $v(\mathbf{x},0)=v^\circ(\mathbf{x})$ в начальный момент времени $t=0$.

Такие задачи (с обратным временем) называются обратными задачами.

Физическая интерпретация решения $v(\mathbf{x},t)$ состоит в том, что по распределению концентрации примеси в момент времени $t=T$ требуется найти концентрацию $v(\mathbf{x},t)$ в начальный момент $t=0$.

2.1. Обратная задача (19)–(21) некорректна. Действительно, пусть $f(\mathbf{x},t)=0$ и

$$w(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{M}b_k v_k(\mathbf{x}).$$

Решение однородного уравнения (19) может быть представлено в виде (14),

$$v(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{M}p_k(t)e^{-\lambda_k t}v_k(\mathbf{x}),$$

где $v_k(\mathbf{x})$ — собственные функции оператора A, а p_k — некоторые коэффициенты принадлежащие пространству l_2.

Краевое условие при $t=T$ приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{M}b_k\varphi_k(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{M}p_k e^{-\lambda_k T}v_k(\mathbf{x}).$$

Для коэффициентов p_k имеем

$$p_k=b_k e^{\lambda_k T},$$

и для решения $v(\mathbf{x},t)$ задачи (19)–(21)

$$v(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{M}b_k e^{\lambda_k(T-t)}v_k(\mathbf{x}).$$

Следовательно, коэффициенты разложения могут содержать большие экспоненциальные множители при больших $T-t$. Малые изменения заданных коэффициентов b_k могут приводить к произвольно большим вариациям решения, это обозначает, некорректность обратной задачи (19)–(21).

Отсюда, в частности, следует, что непосредственное решение задачи (19)–(21) методом сеток сверху вниз является неустойчивым.

2.2. Рассмотрим алгоритм регуляризации. Для обратной задачи теплопроводности, аналогичной (19)–(21), известен метод квазиобращения [5], который состоит в добавлении к дифференциальному уравнению квадрата лапласиана с малым коэффициентом.

В данной работе излагается алгоритм простейшей регуляризации. Рассмотрим для однородного уравнения (3) следующую краевую задачу с близким к (21) граничным условием

$$v_t+\sigma v-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[s\frac{\partial v}{\partial x_2}\right]=f, \quad (22)$$

$$\mathbf{x}\in D,\quad t\in(0,T),$$

$$v|_{\mathbf{x}\in\partial D}=0, \quad (23)$$

$$v|_{t=T}-\delta\, v|_{t=0}=w(\mathbf{x}), \quad (24)$$

где $0<\delta\ll 1$.

Замечание. Задачи (19)–(21) и (22)–(24), а также их решения являются близкими при малых параметрах δ [6].

Разложение функции $w(\mathbf{x})$ по собственным функциям $v_k(\mathbf{x})$ имеет вид

$$w(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{M}b_k v_k(\mathbf{x}).$$

Решение задачи (22)–(24) будем определять в виде

$$v(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{M}c_k(t)v_k(\mathbf{x}), \quad (25)$$

где краевые условия выполняются по построению. Подставляя (25) в уравнение и в начальное условие, получим следующую задачу для коэффициентов $c_k(t)$

$$c_k'(t)+\lambda_k c_k(t)=0,\quad t\in(0,T),$$

$$c_k(T) + \delta c_k(0) = b_k, \quad t \in (0, T).$$

Решение этой задачи имеет вид

$$c_k(t) = \frac{b_k e^{-\lambda_k t}}{\delta + e^{-\lambda_k T}},$$

где множители при b_k, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены по k,

$$|c_k(t)| \leqslant \frac{|b_k|}{\delta}.$$

Для решения (25) регуляризационной задачи (22)–(24) (вследствие неравенства Бесселя) получим

$$\|v(\mathbf{x}, t)\|^2 \leqslant \sum_k^M |c_k(t)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{-1} \sum_{k=1}^M |b_k|^2 = \delta^{-1} \|w(\mathbf{x})\|^2.$$

Так как малым изменениям функции $w(\mathbf{x})$ отвечают малые вариации решения $v(\mathbf{x}, t)$, то решение задачи (17)–(19) корректно. Используя представление (25) с вычисленными коэффициентами $c_k(t)$ и функциями $v_k(\mathbf{x})$, получаем алгоритм приближенного решения.

Литература

1. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. Наука, 1982. 319 с.
2. *Бабешко В. А., Гладской И. Б., Зарецкая М. В., Кособуцкая Е. В.* К проблеме оценки выбросов загрязняющих веществ источниками различных типов // ДАН. 1995. Т. 342. №6. С. 835–838.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 391 с.
4. *Лежнев В. Г.* Асимптотические задачи линейной гидродинамики. Краснодар, КубГУ, 1993. 91 с.
5. *Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
6. *Morozov V. A., Grebennikov A. I.* Methods for solution of ill-posed problems. Moscow University Press, 2005. 326 p.

Статья поступила 29 августа 2005 г.
Кубанский государственный университет
© Лежнев В. Г., Марковский А. Н., 2005