

УДК 519.63

EDN: KCACPH DOI: 10.31429/vestnik-21-2-14-22

Вычислительные аспекты расчета вертикальной скорости в модели ветровой циркуляции

В. С. Кочергин  , С. В. Кочергин 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskochoer@gmail.com

Аннотация. В работе для упрощенной трехмерной стационарной модели ветровых течений жидкости в водоеме рассматриваются различные аспекты вычисления компонент скорости. Представлено широкое параметрическое семейство разностных схем для интегрирования уравнения для функции тока, обладающее определенными свойствами при различных значениях параметров. Реализованы различные подходы при вычислении вертикальной скорости. Показано преимущество подхода использующего метод прогонки.

Ключевые слова: модель ветровой циркуляции, метод прогонки, вертикальная скорость, численная дискретизация.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вычислительные аспекты расчета вертикальной скорости в модели ветровой циркуляции // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 14–22. EDN: KCACPH. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-14-22

Поступила 27 мая 2024 г. После доработки 11 июня 2024 г. Принято 21 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Computational Aspects of Calculating Vertical Velocity in a Wind Circulation Model

V. S. Kochergin , S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskochoer@gmail.com

Abstract. Qualitative calculation of the vertical component of the velocity does not lose its relevance even today. Basically, the results obtained are compared by calculations using other models and with a priori information about the dynamics of waters in the studied area. More accurate testing of calculation methods can be carried out if there is an accurate analytical solution to the problem. For these purposes, a three-dimensional analytical solution to the problem of wind circulation in a rectangular reservoir with a flat bottom is used for a given wind effect. Analytical expressions for the barotropic and additional three-dimensional components of the velocity field are obtained. The expression for the vertical component of the velocity field in this paper is used for comparison with the values calculated from the continuity equation. The vertical velocity was calculated in various ways: by standard integration of the vertical continuity equation and by the run-through method. In addition, in this work, when integrating the equation for the current function, a family of difference discretizations obtained for solving a similar class of problems is used. As the results of numerical experiments presented in the tables have shown, even with a sufficiently accurate solution of the problem for the current function, the calculation of the horizontal components of the total flow can lead to significant errors if the specifics of the problem are not taken into account. The algorithms used give a fairly good accuracy of reproducing the solution of the equation for the current function. On a fine grid, the error is hundredths of a percent of the norm used. The technique used in this work allows, within the framework of a single approach, to solve the problem for the current function and calculate the derivatives of this solution, which guarantees the accuracy of determining the horizontal components of the total flow. The paper shows that the use of the run-through method in calculating

vertical velocity significantly improves the calculation results. The results of the work can be used in modeling dynamic processes in the sea.

Keywords: wind circulation model, run-through method, vertical velocity, numerical discretization.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Computational aspects of calculating vertical velocity in a wind circulation model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 14–22. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-14-22

Received 27 May 2024. Revised 11 June 2024. Accepted 21 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Качественное вычисление вертикальной компоненты скорости [1] не теряет своей актуальности и в наши дни. В основном получаемые результаты сравниваются с расчетами по другим моделям и с априорной информацией о динамике вод в исследуемом районе. Более точное тестирование методов расчета можно осуществить при наличии точного аналитического решения задачи [2]. Для этих целей в работе [3] построено трехмерное аналитическое решение задачи ветровой циркуляции [4, 5] в водоеме прямоугольной формы с плоским дном при заданном ветровом воздействии. Получены аналитические выражения для баротропной и добавочной трехмерной составляющей поля скорости. Выражение для вертикальной компоненты поля скорости в данной работе используются для сравнения со значениями, вычисленными из уравнения неразрывности. Вертикальная скорость вычислялась различными способами: стандартным интегрированием уравнения неразрывности по вертикали и методом прогонки [6]. В данной работе при интегрировании уравнения для функции тока используется семейство разностных дискретизаций, полученное для решения подобного класса задач [7].

1. Постановка задачи

Рассмотрим решение для упрощенной трехмерной стационарной модели ветровых течений жидкости в водоеме. Жидкость однородна и в модели отсутствуют механизмы адвекции и горизонтальной диффузии. Такая модель относится к классу моделей Экмановского типа [8], которые используются для описания картины течений в некотором приближении. Если для таких моделей удастся найти аналитические решения, то их использование для тестирования численных методов и соответствующих алгоритмов оказывается весьма полезным.

Рассмотрим задачу в безразмерной постановке. Пусть поверхность рассматриваемого водоема в плоскости xOy имеет прямоугольную форму

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q], \quad (1.1)$$

глубина его $H > 0$ — постоянна. Оси координат направлены следующим образом: Ox — на восток, Oy — на север, Oz — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\} \quad (1.2)$$

рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} -\ell v = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \ell u = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega} \quad (1.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \left\{ z = 0, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\} : & k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \\ \left\{ z = H, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\} : & k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \\ \left\{ 0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial\Omega_0 \right\} : & Un_x + Vn_y = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Горизонтальные компоненты полного потока определяются следующим образом:

$$U(x, y) = \int_0^H u(x, y, z) dz, \quad V(x, y) = \int_0^H v(x, y, z) dz, \quad (1.5)$$

на дне придонное трение определено выражение

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \quad (1.6)$$

Следуя работам Стоммела [4, 5, 9], имеем

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const} > 0. \quad (1.7)$$

Компоненты касательного напряжения трения ветра зададим формулами

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y); \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y), \end{cases} \quad (1.8)$$

в которых приняты обозначения

$$\begin{aligned} r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q}; \\ l, s = 0, 1, 2, \dots; \quad m, p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, модель ветра содержит ряд параметров, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Отметим, что Стоммел использовал модель ветра следующего вида

$$\tau_x = -F \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \quad (1.10)$$

— которая следует из (1.8), (1.9) при

$$F_1 = -F, \quad F_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1.$$

2. Численный метод решения уравнения для функции тока

Численный метод решения с использованием проекционного варианта интегро-интерполяционного метода предложен в работе [10] и исследован в монографии [11]. Этот подход позволяет получать разностные схемы для численного интегрирования задачи и соответствующие формулы для аппроксимации производных от самого решения. Последнее обычно используется при вычисления U и V по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

где $\Psi(x, y)$ — интегральная функция тока.

Обозначим

$$f(x, y) \equiv \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Для задачи (1.1)–(1.7) имеем следующую постановку для определения $\Psi(x, y)$:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega_0^0, \\ \Psi = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассмотрим в $\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]$ вычислительную сетку вида

$$\omega_h \equiv \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i = (i-1)\Delta x, y_j = (j-1)\Delta y; \right. \\ \left. i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}; \Delta x = \frac{r}{n-1}; \Delta y = \frac{q}{k-1} \right\}. \quad (2.4)$$

Пусть на ней определяется сеточная функция $\{\Psi_{i,j}\}$, которая состоит из приближенных значений для величин $\{\Psi(x_i, y_j)\}$ – точного решения. Для вычисления значений $\{\Psi_{i,j}\}$ рассмотрим следующее семейство разностных дискретизаций:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \\ + \beta \left(\frac{1 + \theta_{i,j}}{2} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1 - \theta_{i,j}}{2} \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) = f(x_i, y_j), \\ i = \overline{2, n-1}; j = \overline{2, k-1}; \\ \Psi_{i,j} = 0, \quad i, j \in \partial\omega_h, \quad \theta_{i,j} \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Здесь $\theta_{i,j}$ – набор параметров, который определяет аппроксимацию производных $\partial\Psi/\partial x$, $\partial\Psi/\partial y$ в узле сетки (x_i, y_j) . Преобразуем это семейство следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\beta\Delta x}{2\mu} (1 + \theta_{i,j}) \right) \Psi_{i+1,j} + \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(1 - \frac{\beta\Delta x}{2\mu} (1 - \theta_{i,j}) \right) \Psi_{i-1,j} + \\ + \frac{\mu}{\Delta y^2} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) = \left(\frac{2\mu}{\Delta y^2} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\beta\Delta x}{2\mu} \theta_{i,j} \right) \right) \Psi_{i,j} + f_{i,j}; \\ i = \overline{2, n-1}; j = \overline{2, k-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласованные аппроксимации производных для внутренних узлов области можно выписать следующим образом:

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} = \frac{1}{2} (D_y^+ \Psi_{i,j} + D_y^- \Psi_{i,j}), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} = \frac{1-\theta}{2} [1 + R(\theta+1)] D_x^+ \Psi_{i,j} + \frac{1+\theta}{2} [1 + R(\theta-1)] D_x^- \Psi_{i,j}.$$

Определим величину $R \equiv \beta\Delta x/(2\mu)$. Последнюю задачу (2.5) будем решать итерационно. Параметры $\theta_{i,j}$ являются функциями от числа R . Функцию $\theta(R)$ можно выбирать в частности следующим образом:

1. $\theta(R) = 0$ – схема с центральной разностью [11];
2. $\theta(R) = \text{sign}(R)$ – схема с направленной разностью [11];
3. $\theta(R) = \frac{|R|}{1+|R|} \cdot \text{sign}(R)$ – схема Самарского А.А. [12];
4. $\theta(R) = \frac{|R|}{1+|R|+|R|^2} \cdot R$ – схема Булеева Н.И., Тимухина Г.И. [13];

$$5. \theta(R) = \frac{1 + 2|R|}{3 + 3|R| + 2|R|^2} \cdot R - \text{схема Булеева Н.И. [14];}$$

$$6. \theta(R) = \text{cth}(R) - \frac{1}{R} - \text{схема Ильина А.М. [15, 16].}$$

Выбор функции $\theta(R)$ с использованием вариантов 2–6 гарантирует однозначную разрешимость системы уравнений (2.3), так как в этом случае сеточный оператор этой системы будет оператором монотонного вида [17].

3. Алгоритмы вычисления вертикальной скорости

Пусть горизонтальные скорости представлены в виде

$$u = U + \hat{u}, \quad v = V + \hat{v}, \quad (3.1)$$

где U, V — компоненты баротропной составляющей, \hat{u}, \hat{v} — добавочные трехмерные компоненты скорости, которые при условии бароклинности модели называются бароклинными.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Для U, V выполняется равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

поэтому из (1.2) можно записать выражение

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

В дальнейшем применим уравнение (3.4) для улучшения качества расчета w и уменьшения ошибок при ее вычислении. Проинтегрируем (3.2) от 0 до z с учетом краевых условий $w(0) = 0$, $w(H) = 0$, где H — глубина моря, 0 — соответствует его поверхности. В результате получим выражение

$$w(z) = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (3.5)$$

Аналогично из (3.4) получаем

$$w(z) = - \int_0^z \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) dz. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.2), следуя [2], можно записать со вторым порядком аппроксимации

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta z_{k+1/2}} = \frac{\bar{f}_{k+1} + \bar{f}_k}{2}, \quad \Delta z_{k+1/2} = z_{k+1} - z_k \quad (3.7)$$

или

$$\frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta z_{k-1/2}} = \frac{\bar{f}_k + \bar{f}_{k-1}}{2}, \quad \Delta z_{k-1/2} = z_k - z_{k-1}, \quad (3.8)$$

где

$$\bar{f} = S_x D_x u + S_y D_y v \quad (3.9)$$

или

$$\bar{f} = S_y D_x u + S_x D_y v. \quad (3.10)$$

В (3.9) и (3.10) используются следующие разностные операторы

$$D_x \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right) - \Phi\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{\Delta x}, \quad (3.11)$$

$$D_y \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right) - \Phi\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}, \quad (3.12)$$

$$S_x \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right) + \Phi\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{2}, \quad (3.13)$$

$$S_y \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right) + \Phi\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{2}, \quad (3.14)$$

где $\Phi(x, y)$ — некоторая функция.

Вычтем из (3.7) выражение (3.8), тогда имеем

$$\frac{1}{\Delta z_{k+1/2}} w_{k+1} - \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1/2}} + \frac{1}{\Delta z_{k-1/2}} \right) w_k + \frac{1}{\Delta z_{k-1/2}} w_{k-1} = \frac{1}{2} (\bar{f}_{k+1} - \bar{f}_{k-1}). \quad (3.15)$$

Используя (3.9), получаем для f центрально-разностную дискретизацию. Отметим, что (3.15) реализуется при помощи метода прогонки [6] с учетом обоих краевых условий для w на поверхности и на дне.

Для контроля качества вычисления вертикальной компоненты скорости будем сравнивать полученные значения w с точным аналитическим решением \bar{w} . В работе [3] получено аналитическое решение трехмерной задачи ветровой циркуляции при заданном ветровом воздействии в бассейне прямоугольной формы с плоским дном. Сравнение будем производить в следующих нормах:

$$NC\Phi = \frac{\max_{\Omega} |\Phi - \bar{\Phi}| \cdot 100\%}{\max_{\Omega} |\bar{\Phi}|}, \quad NL\Phi = \frac{\sum_{\Omega} |\Phi - \bar{\Phi}| \cdot 100\%}{\sum_{\Omega} \bar{\Phi}}, \quad (3.16)$$

где $\bar{\Phi}$ — аналитическое значение, Φ — оценка функции, получаемая тем или иным способом.

4. Результаты численных экспериментов

Для анализа результатов в качестве модельного объекта рассмотрим прямоугольный водоем с плоским дном со следующими характерными размерами:

$$\begin{aligned} a &= 11 \cdot 10^7 \text{ (см)} = 1100 \text{ (км)}, \\ b &= 5 \cdot 10^7 \text{ (см)} \approx 500 \text{ (км)}, \\ D &= 2 \cdot 10^5 \text{ (см)} = 2000 \text{ (м)}, \\ R &= 0,02 \text{ (см/сек)}, \quad G = 0,1 \text{ (Па)}, \\ E &= 1 \text{ (см}^2\text{/сек)}, \quad \rho_0 = 1 \text{ (г/см}^3\text{)}, \\ \ell_0 &= 10^{-4} \left(\frac{1}{\text{сек}} \right), \quad \beta = 2 \cdot 10^{-13} \left(\frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}} \right). \end{aligned}$$

Выберем характерные масштабы

$$L = 10^7 \text{ (см)}, \quad h = 2 \cdot 10^5 \text{ (см)}, \quad u_0 = 10 \text{ (см/сек)}.$$

Тогда получим

Таблица 1. Значения погрешностей для различных дискретизаций при вычислении функции тока

Table 1. Error values for different discretizations in calculating the current function

	Схема направленных разностей	Схема центральных разностей	Схема Самарского	Схема Тимухина, Булеева	Схема Булеева	Схема Ильина
NCΨ	6,9467	0,60586	0,87911	0,29147	0,15405	0,15376
NLΨ	0,25649	0,03833	0,54748	0,030001	0,031229	0,024101

Таблица 2. Значения погрешностей для различных дискретизаций при вычислении скоростей

Table 2. Error values for different discretizations in calculating velocities

	Схема направленных разностей	Схема центральных разностей	Схема Ильина
NCU	0,92748	0,49380	0,49380
NLU	0,39095	0,49342	0,49342
NCV	23,335	3,3475	0,23083
NLV	9,5639	1,6699	0,23085

$$r = 11, \quad q = 5, \quad H = 1, \quad k = 0,05;$$

$$\ell_0 = 1, \quad \beta = 0,02;$$

$$F = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}, \quad \mu = 0,001; \quad w_0 = 0,2.$$

Найдя решение задачи (1.1)–(1.5), решение размерной задачи определяем по формулам

$$\bar{u} = \bar{u}(Lx, Ly, hz) = u_0 u(x, y, z),$$

$$\bar{v} = \bar{v}(Lx, Ly, hz) = u_0 v(x, y, z),$$

$$\bar{w} = \bar{w}(Lx, Ly, hz) = w_0 w(x, y, z), \quad w_0 = \frac{hu_0}{L},$$

где чертой обозначены компоненты вектора скорости для размерной задачи.

Расчеты показали, что наилучший результат в смысле норм (3.16) при вычислении функции тока имеем при использовании схемы Ильина. Сравнение значений норм представлено в табл. 1.

В дальнейшем при вычислении функции тока будем применять именно эту схему, а компоненты полного потока (2.1) будем определять с использованием различных схем. Из табл. 2 видно, что использование схемы Ильина при аппроксимации производных приводит к существенному улучшению результатов расчетов при заданных значениях входных параметров модели.

Численные эксперименты показали, что наихудший результат при расчете вертикальной скорости из уравнения неразрывности (1.5) получается с использованием полных скоростей. Реализация формулы (3.6) приводит к некоторому улучшению результатов расчетов, которые представлены в табл. 3.

Использование алгоритма прогонки по формуле (3.15) приводит к существенному уменьшению указанных норм отклонений.

Таблица 3. Значения погрешностей для различных методов при вычислении вертикальной скорости

Table 3. Error values for different methods in calculating vertical speed

	Формула (3.5)	Формула (3.6)	Прогонка (3.15)
NCW	26,832	26,476	2,115
NLW	24,733	22,330	3,5452

Заклучение

Как показали результаты численных экспериментов, представленные в таблицах, даже при достаточно точном решении задачи для функции тока (табл. 1), вычисление горизонтальных компонент полного потока (табл. 2) может приводить к существенным ошибкам, если не учитывать специфику задачи. Используемые алгоритмы дают достаточно хорошую точность воспроизведения решения уравнения для функции тока. На мелкой сетке ошибка составляет сотые доли процента в используемой норме. Реализованная в данной работе методика позволяет, в рамках единого подхода, решать задачу для функции тока и вычислять производные от этого решения, что гарантирует точность определения горизонтальных компонент полного потока. В работе показано, что использование метода прогонки при вычислении вертикальной скорости существенно улучшает результаты расчетов. Результаты работы могут быть использованы при моделировании динамических процессов в море.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана*. Москва, Наука, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie tsirkulyatsii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation*. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
2. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, «Экоси-гидрофизика», 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins*. Sevastopol, «Ekosi-gidrofizika», 2002. (in Russian)]
3. Кочергин, В.С., Кочергин, С. В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*, № 2(20), 2019, с. 198–203. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Protsessy v geosredakh = Processes in geoenvironments*, no. 2(20), 2019, pp. 198–203. (in Russian)]
4. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description*. University of California Press, 1965.
5. Стоммел, Г., *Гольфстрим*. Москва, ИЛ, 1965. [Stommel, G., *Gol'fstrim = Gulf Stream*. Moscow, Inostrannaya literatura, 1965. (in Russian)]
6. Годунов, С.К., Рябенкий, В.С., *Разностные схемы. Введение в теорию*. Москва, Наука, 1977. [Godunov, S.K., Ryabenskiy, V.S., *Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu = Difference Schemes. Introduction to Theory*. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
7. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости. *Морской гидрофизический журнал*, 2023, т. 39, № 3, с. 299–313. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Calculation of the components of the total flow in models of wind-induced fluid motion. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2023, vol. 39, no. 3, pp. 299–313.] EDN: RUBXPZ. DOI: 10.29039/0233-7584-2023-3-299-313
8. Ekman, V.W., On the influence of the Earth rotation on ocean currents. *Arkiv Mat., Astron., or Fysik*, 1905, bd. 2, no. 11, pp. 1–52.
9. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
10. Sklyar, S.N., A projective version of the integral-interpolation method and its application for the discretization of the singular perturbation problems. *Proc. of the Int. Conf. "Advanced Mathematics: Computations and Applications" (AMCA-95)*. NCC Publisher, Novosibirsk, 1995, pp. 380–385.
11. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980. [Roach, P., *Vychislitel'naya gidrodinamika = Computational Fluid Dynamics*. Moscow, Mir, 1980. (in Russian)]
12. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1983. [Samarskii, A.A., *Theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
13. Булеев, Н.И., Тимухин, Г.И., О составлении разностных уравнений гидродинамики вязкой неоднородной среды. *Численные методы механики сплошной среды*, 1972, т. 3, № 4, с. 19–26. [Buleev, N.I., Timukhin, G.I., On the formulation of difference equations for the hydrodynamics of a viscous inhomogeneous medium. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy = Numerical Methods of Continuum Mechanics*, 1972, vol. 3, no. 4, pp. 19–26. (in Russian)]

14. Булеев, Н.И., *Пространственная модель турбулентного обмена*. Москва, Наука, 1983. [Buleev, N.I., *Prostranstvennaya model' turbulentnogo obmena = Spatial model of turbulent exchange*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
15. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)]
16. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. Москва, Мир, 1983. [Doolan, E., Miller, J., Shielders, W., *Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem = Uniform Numerical Methods for Solving Boundary Layer Problems*. Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]
17. Коллатц, Л., *Функциональный анализ и вычислительная математика*. Москва, Мир, 1969. [Collatz, L., *Funktional'nyy analiz i vychislitel'naya matematika = Functional Analysis and Computational Mathematics*. Moscow, Mir, 1969. (in Russian)]