

УДК 519.634

EDN: RANMTJ DOI: 10.31429/vestnik-21-2-62-69

Схлопывание осесимметричной каверны при медленных движениях цилиндра в жидкости после отрывного удара

М. В. Норкин  

Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344000, Россия

✉ Норкин Михаил Викторович; ORCID 0000-0002-9508-5996; SPIN 1638-4892; e-mail: norkinmi@mail.ru

Аннотация. Рассматривается осесимметричная задача о вертикальном и отрывном ударе цилиндра конечных размеров под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Предполагается, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью. Позади тела образуется присоединенная каверна и появляется новая внутренняя свободная граница жидкости. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда. В главном асимптотическом приближении формулируется задача с односторонними ограничениями, на основе которой определяется динамика круговой линии отрыва и время схлопывания тонкой каверны. Проводится асимптотический анализ формы каверны с учетом решений типа пограничного слоя вблизи линии отрыва. Показывается, что при малых числах Фруда внутренняя свободная граница подходит к линии отрыва под прямым углом.

Ключевые слова: отрывной удар цилиндра, динамика зоны отрыва, схлопывание каверны, малые числа Фруда, решения типа пограничного слоя.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Норкин М. В. Схлопывание осесимметричной каверны при медленных движениях цилиндра в жидкости после отрывного удара // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 62–69. EDN: RANMTJ. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-62-69

Поступила 27 мая 2024 г. После доработки 10 июня 2024 г. Принято 12 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Collapse of an Axisymmetric Cavity During Slow Movements of a Cylinder in a Liquid After a Separation Impact

M. V. Norkin 

Southern Federal University, Bolshaya Sadovaya str., 105/42, Rostov-on-Don, 344000, Russia

✉ Mikhail V. Norkin; ORCID 0000-0002-9508-5996; e-mail: norkinmi@mail.ru

Abstract. The axisymmetric problem of the vertical and separation impact of a cylinder of finite dimensions under the free surface of an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. It is assumed that after the impact the cylinder moves deep into the liquid at a constant speed. An attached cavity is formed behind the body and a new internal free fluid boundary appears. It is required to study the process of cavity collapse at low cylinder speeds, which correspond to small Froude numbers. In the main asymptotic approximation, a problem with one-sided constraints is formulated, on the basis of which the dynamics of the circular separation line and the collapse time of a thin cavity are determined. An asymptotic analysis of the cavity shape is carried out taking into account solutions such as a boundary layer near the separation line. It is shown that at low Froude numbers the internal free boundary approaches the separation line at a right angle.

Keywords: separation impact of a cylinder, dynamics of the separation zone, cavity collapse, small Froude numbers, boundary layer type solutions.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Norkin, M. V., Collapse of an axisymmetric cavity during slow movements of a cylinder in a liquid after a separation impact. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 62–69. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-62-69

Received 27 May 2024. Revised 10 June 2024. Accepted 12 June 2024. Published 28 June 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Задача об ударе плавающего тела с учетом отрыва частиц жидкости от его поверхности относится к числу классических задач современной гидродинамики [1]. Представляя большой самостоятельный интерес для аналитических исследований, она дает начальные условия для решения более сложной динамической кавитационной задачи. Сразу после удара начинает формироваться присоединенная каверна и образуется внутренняя свободная граница жидкости. Давление в каверне предполагается постоянным и равным давлению насыщенных паров жидкости или газа (или давлению газа при искусственной кавитации). Требуется изучить динамику каверны и влияние на нее характерных параметров задачи. Одним из направлений исследования таких задач является асимптотический анализ на малых временах. Такой подход позволяет определить форму каверны на некотором начальном этапе движения тела в жидкости (подробная библиография приводится в [2]). Изучение дальнейшей динамики, в общем случае, остается сложной и малоизученной задачей. В связи с этим представляют интерес такие подходы, в которых нет серьезных ограничений на продолжительность времени рассматриваемого процесса. В работах [3, 4] данные задачи изучались при дополнительном предположении о малости скорости движения тела после удара (что соответствует небольшим числам Фруда). При таком допущении возмущения свободных границ жидкости являются незначительными и процесс схлопывания каверны, в основном, сводится к изучению динамики точек отрыва. Следует отметить, что несмотря на малость поперечных размеров каверны, определение ее формы также представляет определенный интерес. Ранее такие задачи исследовались только в плоской постановке (круг и прямоугольник [3, 4]). В настоящей статье дается обобщение этих результатов на пространственную осесимметричную задачу. Показывается, что специальные пограничные решения, построенные для возмущения внутренней свободной границы жидкости, также хорошо аппроксимируют внешнее разложение, как и аналогичные решения в плоском случае.

Среди близких направлений исследования отметим задачи проникания твердых тел в жидкость с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей [5]; задачи подводного старта ракет кавитационным способом [6]; экспериментальное изучение ударного воздействия жидкости на твердые стенки в условиях кавитации [7, 8].

Общие принципы кавитационных течений при взаимодействии твердых тел с жидкостью изложены в [9, 10].

1. Постановка задачи

Рассматривается осесимметричная задача об отрывном ударе цилиндра конечных размеров под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости [1]. Предполагается, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью. За телом образуется присоединенная каверна, форма которой зависит от физических и геометрических параметров задачи. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1)

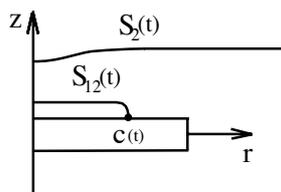


Рис. 1. Схема течения жидкости в меридиональной плоскости r, z

Fig. 1. Scheme of fluid flow in the meridional plane

$$\Delta\varphi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -n_z, \quad R \in S_{11}(t), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0,5\varepsilon^2 (\nabla\varphi)^2 + b + \zeta - \varepsilon^2\tau - H - 0,5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 1 = \frac{\partial\zeta}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0,5\varepsilon^2 (\nabla\varphi)^2 + \psi = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad R \in S_2(t), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H_b + \varepsilon^2\tau; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad r = R_b, \quad (1.7)$$

$$\varphi(r, z, 0) = \varphi_0(r, z), \quad \psi(r, 0) = 0, \quad \zeta(r, 0) = 0. \quad (1.8)$$

Потенциал скоростей $\varphi_0 = \varphi_0(r, z)$, приобретенных частицами жидкости в момент, непосредственно следующий после удара (в начальный момент времени), а также первоначальная зона отрыва находятся на основе решения классической модели удара с отрывом [1]:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_0 = 0, \quad z = H, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = -n_z, \quad \varphi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \geq -n_z, \quad \varphi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = 0, \quad z = -H_b; \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = 0, \quad r = R_b. \quad (1.12)$$

В поставленной задаче используется растянутое время τ , связанное с безразмерным временем t равенством $t = \varepsilon\tau$. Целесообразность его введения объясняется быстротой процесса схлопывания каверны после удара (обычно он составляет сотые или десятые доли секунды), а также необходимостью согласования порядков рассматриваемых величин в главном асимптотическом приближении.

Основными безразмерными параметрами задачи являются числа Фруда и кавитации

$$\varepsilon = Fr = \frac{V_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho ga},$$

где p_a — атмосферное давление; $p_c = \text{const}$ — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости.

Скорость цилиндра V_0 предполагается малой величиной по сравнению с характерной скоростью $V = \sqrt{ga}$. Малый параметр ε , по которому строится асимптотическое разложение, фактически совпадает с числом Фруда.

Безразмерные переменные вводятся с помощью равенств

$$t' = \frac{a}{V}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az, \quad \varphi' = aV\varphi, \quad p' = \rho V^2 p,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y, Z связаны с подвижными x, y, z соотношениями $X = x, Y = y, Z = z + h(t)$, где $h(t)$ — закон движения цилиндра. Предполагается, что ось z направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре цилиндра.

Функции φ , ζ , ψ выражаются через потенциал скоростей Φ , а также возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости η и ξ по формулам

$$\varphi(r, z, \tau) = \varepsilon^{-1}\Phi(r, z, \varepsilon\tau), \quad \zeta(r, \tau) = \eta(r, \varepsilon\tau), \quad \psi(r, \tau) = \xi(r, \varepsilon\tau).$$

В статье также используются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область течения жидкости; $S_{11}(t) = \{z = b, c(t) \leq r \leq 1\} \cup \{z = -b, 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r = 1, -b \leq z \leq b\}$ — часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t) = \{z = b + \eta(r, t), 0 < r < c(t)\}$ — внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $z = H + \xi(r, t) + \varepsilon t$ — уравнение внешней свободной границы; $\mathbf{V} = (0, 0, -V_0)$ — скорость, приобретенная цилиндром в результате удара ($V_0 > 0$); $h(t) = -\varepsilon t$ — безразмерный закон движения цилиндра; a , $2b$ — радиус и высота цилиндра (после обезразмеривания для b сохраняется прежнее обозначение); R_b — радиус цилиндрического бассейна, в котором находится плавающий цилиндр; $z = -H_b$ — его дно; R — радиус-вектор с цилиндрическими координатами (r, z) .

На линии пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (на круговой линии отрыва) ставится условие Кутты–Жуковского, означающее, что скорость жидкости на ней должна быть конечной.

2. Асимптотика медленных движений

Решение задачи (1.1)–(1.12) будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\varphi(r, z, \tau) = \varphi_1(r, z, \tau) + \dots, \quad c(t) = c(\varepsilon\tau) = c_0(\tau) + \dots, \quad (2.1)$$

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^2\zeta_1(r, \tau) + \dots, \quad \psi(r, \tau) = \varepsilon^2\psi_1(r, \tau) + \dots, \quad (2.2)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по ε .

Подставляя разложения (2.1)–(2.2) в уравнение и граничные условия задачи (1.1)–(1.8), с помощью формулы Тейлора осуществляя перенос краевых условий с возмущенных участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущенный уровень, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , придем в главном приближении к смешанной краевой задаче теории потенциала в области $\Omega(0)$. В предположении, что круговая линия отрыва монотонно стягивается в точку, проинтегрируем полученное динамическое условие в зоне отрыва по времени от 0 до τ при фиксированном $r \in (0, c_0(\tau))$. Интегрируя еще динамическое условие на внешней свободной границе, придем к следующей задаче:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_1 = 0, \quad z = H, \quad (2.3)$$

$$\varphi_1 = (0,5\chi + H - b)\tau, \quad z = b, \quad 0 < r < c_0(\tau), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -1, \quad z = b, \quad c_0(\tau) < r < 1, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -1, \quad z = -b, \quad 0 < r < 1; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0, \quad r = 1, \quad -b < z < b, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = -H_b; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0, \quad r = R_b. \quad (2.7)$$

В силу неизвестности $c_0(\tau)$ задача (2.3)–(2.7) является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Радиус круговой линии отрыва $c_0(\tau)$ в каждый момент времени определяется из условия Кутты–Жуковского, которое равносильно системе неравенств

$$(0,5\chi + H - b)\tau - \varphi_1 + \varphi_0 \geq 0, \quad z = b, \quad c_0(\tau) < r < 1, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \geq -1, \quad z = b, \quad 0 < r < c_0(\tau). \quad (2.9)$$

Неравенство (2.8) является следствием динамического условия $p \geq p_c$, означающего что давление в зоне контакта не может опускаться ниже давления в каверне. Кинематическое

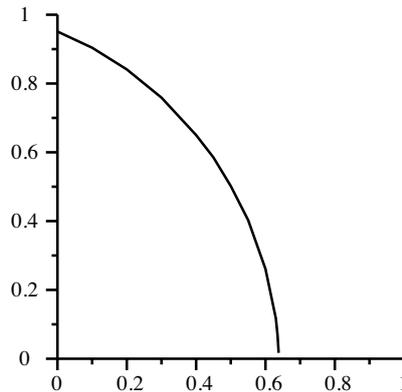


Рис. 2. График функции $C_0(\tau)$

Fig. 2. Function graph $C_0(\tau)$

условие (2.9) говорит о том, что жидкие частицы не входят внутрь твердого тела. Начальное условие $\varphi_1(r, z, 0) = \varphi_0(r, z)$ выполняется, поскольку при $\tau = 0$ получается задача, совпадающая с классической моделью удара с отрывом (1.9)–(1.12).

Задача с односторонними ограничениями (2.3)–(2.9) решается численно с помощью специального итерационного метода, применявшегося ранее при исследовании плоских задач [2–4]. Приведем численные значения величины $c_0(\tau)$ для некоторых τ ($\chi = 0, b = 0,1, H = 1, R_b = 4, H_b = 3$): $c_0(0) = 0,951$; $c_0(0,2) = 0,841$; $c_0(0,4) = 0,65$; $c_0(0,5) = 0,502$; $c_0(0,6) = 0,261$; $c_0(0,63) = 0,117$; $c_0(0,635) = 0,067$. При $\tau = 0,64$ зона отрыва не видна (происходит схлопывание тонкой каверны). График функции $C_0(\tau)$ изображен на рис. 2.

На основании решения задачи (2.3)–(2.9) находятся главные приближения для возмущений внутренней и внешней свободных границ жидкости. Для функций $\zeta_1(r, \tau), \psi_1(r, \tau)$ справедливы следующие представления:

$$\zeta_1(r, \tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + 1 \right) d\tau, \quad z = b; \quad \psi_1(r, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} d\tau, \quad z = H. \quad (2.10)$$

Далее вкратце остановимся на построении двух специальных погранслоиных решений для функции $\zeta(r, \tau)$. Первое из них дает хорошую аппроксимацию внешнего разложения (2.2) практически во всей зоне отрыва, а второе поправляет это разложение в маленькой окрестности линии отрыва (условие $\zeta_1(c_0(\tau), \tau) = 0$ не выполняется).

Учитывая регулярность решения задачи с односторонними ограничениями (1.9)–(1.12) и тот факт, что производная функции φ_1 по r обращается в ноль при $z = b, 0 < r < c_0(\tau)$, заменим производные функции φ_1 по z и r в кинематическом уравнении (1.4) асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + 1 &\sim \beta(\tau) \sqrt{c_0(\tau) - r}, \quad r \rightarrow c_0(\tau) - 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z}(r, b, \tau) \zeta + \dots \sim \frac{-\beta(\tau)}{2\sqrt{c_0(\tau) - r}} \zeta, \quad r \rightarrow c_0(\tau) - 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где коэффициент $\beta(\tau)$ находится численно.

В результате придем к уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию $\zeta(r, \tau)$. Вначале, следуя классическому подходу, представим искомую функцию в виде

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^{7/2} \frac{\beta(\tau)}{c_0'(\tau)} F(\tilde{r}) + \dots, \quad F(\tilde{r}) = \frac{2}{3} \tilde{r}^{3/2}, \quad \tilde{r} = \frac{c_0(\tau) - r}{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в дифференциальное уравнение внутренней свободной границы, осуществляя переход к погранслошной переменной \tilde{r} и, используя приведенные выше асимптотические формулы, видим, что функция $\zeta(r, \tau)$ удовлетворяет этому уравнению в главном асимптотическом приближении (левая часть дифференциального уравнения и производная по времени имеют порядок $\sqrt{\varepsilon}$, а нелинейный член имеет более высокий порядок малости). Также можно убедиться в том, что выполняется условие сращивания для производной $\zeta_\tau(r, \tau)$. В самом деле, из (2.12) следует асимптотическая формула

$$\zeta_\tau(r, \tau) = \varepsilon^{5/2} \beta(\tau) \sqrt{\tilde{r}} + \dots,$$

которая при больших \tilde{r} должна переходить в соответствующее внешнее разложение. Последнее вытекает из того, что главный член асимптотики производной внешнего разложения (2.2) при $r \rightarrow c_0(\tau) - 0$ после перехода к внутренней переменной \tilde{r} будет иметь такой же вид (получается на основании формул (2.10), (2.11)). Не останавливаясь на подробном анализе остальных условий заметим, что функция, определяемая формулами (2.12), не может быть использована в качестве погранслошной. Это объясняется тем, что в силу отрицательности коэффициента ($\beta(\tau) > 0$, $c'_0(\tau) < 0$) соответствующая осесимметричная поверхность лежит внутри цилиндра. Отметим также, что функция (2.12) не удовлетворяет однородному начальному условию и условию сращивания с внешним разложением (хотя однородное условие на линии отрыва выполняется). Таким образом, эту функцию необходимо подправить. Поскольку условие сращивания справедливо для производной $\zeta_\tau(r, \tau)$, то можно попытаться восстановить функцию $\zeta(r, \tau)$ с помощью интегрирования по времени. В силу того, что сама зона сращивания зависит от времени, неправильно будет выполнить интегрирование по времени с произвольной постоянной при фиксированном r (то есть, добавить к (2.12) произвольную постоянную). Если все-таки так сделать и определить эту постоянную из начального условия, то полученное решение будет плохо согласовываться с внешним разложением. Однако можно провести локальное интегрирование за весьма маленький временной промежуток в окрестности фиксированного τ (при этом r считаем фиксированным и принадлежащем зоне сращивания). При интегрировании возникает произвольная постоянная, которая для каждого бесконечно малого временного промежутка будет своя. В результате получим функцию от времени, которую представим в виде произведения временного множителя в (2.12) на некоторую величину γ . Определяя γ из начального условия, придем к следующему решению типа пограничного слоя

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^{7/2} \frac{\beta(\tau)}{c'_0(\tau)} [F(\tilde{r}) - F(\tilde{r}_0)], \quad \tilde{r} = \frac{c_0(\tau) - r}{\varepsilon}, \quad \tilde{r}_0 = \frac{c_0(0) - r}{\varepsilon}. \quad (2.13)$$

Теперь проведем другие рассуждения, подтверждающие справедливость формулы (2.13). Поскольку решение типа пограничного слоя строится при фиксированном τ , то можно с самого начала искать решение в форме (2.13) с замороженным коэффициентом $\beta(\tau)[c'_0(\tau)]^{-1}$ (при этом зависимость от времени будет осуществляться только через погранслошную переменную). В этом случае функция (2.13) будет удовлетворять в главном приближении кинематическому дифференциальному уравнению (1.4) для данного фиксированного момента τ и, кроме этого, будет выполнено условие сращивания для производной $\zeta_\tau(r, \tau)$ (также для данного τ). Последние рассуждения теряют силу в случае, если $F(\tilde{r}_0)$ заменить на величину, зависящую от времени.

Справедливость условия сращивания для самой функции ζ проверяется численно на различных примерах. Отметим, что начальное условие при $\tau = 0$ будет выполнено точно, а условие на линии отрыва по-прежнему не выполняется (хотя соответствующая кривая подходит к твердой границе ближе, чем внешнее разложение).

На рис. 3 показано согласование формулы (2.13) с внешним разложением при $\varepsilon = 0,4$, $\tau = 0,4$, $\chi = 0$, $b = 0,1$, $H = 1$, $R_b = 4$, $H_b = 3$. Рис. 4 соответствует случаю $\varepsilon = 0,3$ (остальные параметры не меняются). Из приведенных рисунков видно, что при уменьшении параметра ε происходит сближение соответствующих кривых вблизи точки отрыва. Последнее полностью соответствует условию сращивания в главном приближении. Заметим, что хорошее



Рис. 3. Согласование погранслоного решения (сплошная линия) и внешнего разложения (пунктирная линия) при $\varepsilon = 0,4$; $\tau = 0,4$ в меридиональной плоскости r, z

Fig. 3. Agreement between the boundary layer solution (solid line) and the external expansion (dashed line) at $\varepsilon = 0,4$; $\tau = 0,4$ in the meridional plane r, z



Рис. 4. Согласование погранслоного решения (сплошная линия) и внешнего разложения (пунктирная линия) при $\varepsilon = 0,3$; $\tau = 0,4$ в меридиональной плоскости r, z

Fig. 4. Agreement between the boundary layer solution (solid line) and the external expansion (dashed line) at $\varepsilon = 0,3$; $\tau = 0,4$ in the meridional plane r, z

согласование получается не только вблизи точки отрыва, но также и во всей зоне отрыва. Таким образом, для определения формы внутренней свободной границы жидкости при малых ε можно использовать формулу (2.13).

Теперь построим второе решение типа пограничного слоя, которое будет удовлетворять необходимому условию при $r = c_0(\tau)$ и согласовываться с первым решением. Искомую функцию будем искать в виде

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^\alpha F(\tilde{r}) + \dots, \quad \tilde{r} = \frac{c_0(\tau) - r}{\varepsilon^\lambda}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0.$$

Подставляя этот проект решения в кинематическое уравнение (1.4) и учитывая асимптотические формулы (2.11), придем к равенству, в которое входят слагаемые, имеющие следующие порядки малости по ε : $\varepsilon^{0,5\lambda}$, $\varepsilon^{2\alpha-1,5\lambda}$, $\varepsilon^{\alpha-2-\lambda}$. Если все показатели равны, то величина $\lambda = -4$. Поэтому рассмотрим случаи, когда равными оказываются только два показателя степени а третье слагаемое имеет более высокий порядок малости по ε . Возможны три случая: $0,5\lambda = 2\alpha - 1,5\lambda$, $0,5\lambda = \alpha - 2 - \lambda$, $2\alpha - 1,5\lambda = \alpha - 2 - \lambda$. В первом случае $\lambda < -4$. Во втором — получается решение с отрицательным коэффициентом, уходящее внутрь твердого тела. Поэтому остается третий случай, который приводит к следующему выражению для функции $F(\tilde{r})$ ($\lambda = 2\alpha + 4$):

$$F(\tilde{r}) = -\frac{2c'_0(\tau)}{\beta(\tau)}\sqrt{\tilde{r}}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим для возмущения свободной границы вблизи линии отрыва асимптотическую формулу

$$\zeta(r, \tau) \sim -\varepsilon^{-2}\frac{2c'_0(\tau)}{\beta(\tau)}\sqrt{c_0(\tau) - r}.$$

Отметим, что при малых ε область применимости этого решения будет очень маленькой. Соответствующая кривая выходит из точки отрыва под прямым углом и практически не отличается от вертикального отрезка прямой. Сращивание двух решений типа пограничного слоя в промежуточном пределе может быть выполнено при надлежащем выборе соответствующих параметров.

Заключение

В работе представлен численно-аналитический метод определения формы присоединенной каверны при медленных движениях цилиндра в жидкости после отрывного удара. В главном

асимптотическом приближении сформулирована задача с односторонними ограничениями, на основе которой находится динамика круговой линии отрыва и время схлопывания тонкой каверны. Для определения формы внутренней свободной границы жидкости построены специальные погранслойные решения и показано их хорошее согласование с внешним разложением.

Литература [References]

1. Седов, Л.И., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва, Наука, 1980. [Sedov, L.I., *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodynamiki = Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics*. Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)]
2. Норкин, М.В., Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2016, т. 19, № 4, с. 81–92. [Norkin, M.V., Cavity formation at the inclined separated impact on a circular cylinder under a free surface of a heavy liquid. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki = Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 538–548. (in Russian)] DOI: [10.1134/S1990478916040104](https://doi.org/10.1134/S1990478916040104)
3. Норкин, М.В., Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика*, 2019, т. 60, № 5, с.19–27. [Norkin, M.V., Dynamics of separation points upon impact of a floating circular cylinder. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 798–804. (in Russian)] DOI: [10.15372/PMTF20190503](https://doi.org/10.15372/PMTF20190503)
4. Норкин, М.В., Асимптотика медленных движений прямоугольного цилиндра в жидкости после отрывного удара. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*, 2020, т. 162, кн. 4, с. 426–440. [Norkin, M.V., Asymptotics of slow motions of a rectangular cylinder in a liquid after a separation impact. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki = Scientific Notes of Kazan University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 426–440. (in Russian)] DOI: [10.26907/2541-7746.2020.4.426-440](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.4.426-440)
5. Reinhard, M., Korobkin, A.A., Cooker, M.J., Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016, vol. 96(1), pp. 155–174. DOI: [10.1007/s10665-015-9788-8](https://doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8)
6. Пегов, В.И., Мошкин, И.Ю., Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет. *Челябинский физико-математический журнал*, 2018, т. 3, № 4, с. 476–485. [Pegov, V.I., Moshkin, I.Yu, Analysis of Fluid Dynamics of Cavitation Launch Technique. *Chelyabinskii fiziko-matematicheskii zhurnal = Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, no. 4, pp. 476–485. (in Russian)] DOI: [10.24411/2500-0101-2018-13408](https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13408)
7. Bergant, A., Simpson, A.R., Tijsseling, A.S., Water hammer with column separation: A historical review. *Journal of Fluids and Structures*, 2006, vol. 22, no. 2, pp. 135–171. DOI: [10.1016/j.jfluidstructs.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.08.008)
8. Аганин, А.А., Ильгамов, М.А., Мустафин, И.Н., Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*, 2020, т. 162, кн. 1, с. 27–37. [Aganin, A.A., Ilgamov, M.A., Mustafin, I.N., Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki = Scientific Notes of Kazan University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 27–37. (in Russian)] DOI: [10.26907/2541-7746.2020.1.27-37](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37)
9. Гуревич, М.И., *Теория струй идеальной жидкости*. Москва, Наука, 1979. [Gurevich, M.I., *Teoriya struy ideal'noy zhidkosti = Theory of jets of an ideal fluid*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
10. Иванов, А.Н., *Гидродинамика развитых кавитационных течений*. Ленинград, Судостроение, 1980. [Ivanov, A.N, *Gidrodinamika razvitykh kavitatsionnykh techeniy = Hydrodynamics of developed cavitations flows*. Leningrad, Shipbuilding, 1980. (in Russian)]